



HAL
open science

Mécanique des milieux poreux en transformation finie : formulation des problèmes et méthodes de résolution

Emmanuel Bourgeois

► **To cite this version:**

Emmanuel Bourgeois. Mécanique des milieux poreux en transformation finie : formulation des problèmes et méthodes de résolution. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . tel-00529407

HAL Id: tel-00529407

<https://pastel.hal.science/tel-00529407>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
Spécialité : Structures et Matériaux

par Emmanuel BOURGEOIS

Sujet de la thèse :
MECANIQUE DES MILIEUX POREUX
EN TRANSFORMATION FINIE :
FORMULATION DES PROBLEMES
ET METHODES DE RESOLUTION

soutenue à Champs-sur-Marne le 9 décembre 1997

devant le jury composé de Messieurs :

J.-L. Auriault	président
C. Boutin	rapporteur
O. Coussy	rapporteur
L. Dormieux	examineur
Y. Guéguen	examineur
J.-B. Leblond	examineur
F. Schneider	examineur

Je souhaite remercier Monsieur Jean-Louis Auriault, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Claude Boutin et Olivier Coussy, qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je tiens également à remercier Messieurs Yves Guéguen, Jean-Baptiste Leblond et Frédéric Schneider d'avoir participé à l'évaluation de ce travail.

Je souhaite adresser ma gratitude à Luc Dormieux, qui m'a proposé un sujet à la fois ambitieux et motivant, et m'a fait bénéficier de ses connaissances et de sa grande rigueur scientifique. Il m'a donné en outre l'opportunité de participer à l'enseignement de mécanique des milieux poreux à l'Ecole des Ponts et Chaussées, ce qui a constitué pour moi une expérience extrêmement enrichissante : je tiens à l'en remercier.

Je souhaite également remercier Patrick de Buhan, directeur du CERCSO, qui m'a accueilli dans son équipe où j'ai bénéficié de conditions de travail excellentes (exceptionnelles) pour préparer cette thèse. Je souhaite bien sûr remercier aussi tous les collègues avec qui j'ai travaillé au CERCSO pour les échanges et discussions fructueux que nous avons pu avoir et pour leur contribution à l'ambiance à la fois laborieuse et détendue qui règne dans l'équipe, particulièrement Daniel Averbuch, Alain Corfdir, Denis Garnier, Samir Maghous, Bruno Sudret.

Je profite de l'occasion pour saluer les chercheurs et les doctorants que j'ai pu côtoyer au Laboratoire de Mécanique des Solides pendant la durée de cette thèse ou avant, notamment son directeur Pierre Bérest. Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu d'une manière ou d'une autre, notamment à l'équipe de la documentation recherche et à mes amis des autres centres d'enseignement et de recherche de l'Ecole des Ponts.



TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION : motivations et objectifs du travail présenté	7
CHAPITRE 1 : Modélisation mécanique des milieux poreux	13
I. Cinématique des milieux poreux	16
I.1. Cinématique du squelette	17
I.2. Cinématique du fluide	19
I.3. Grandeurs "eulériennes" et "lagrangiennes" . Champs "eulériens" et "lagrangiens"	21
II. Equations de conservation	22
II.1. Dérivées particulières et dérivée matérielle	22
II.2. Conservation de la masse	25
II.3. Conservation de la quantité de mouvement	27
III. Thermodynamique des milieux continus ouverts	30
III.1. Formulation des premier et second principes de la thermodynamique	31
III.2. Inégalité de Clausius-Duhem	34
IV. Structure d'un problème de mécanique des milieux poreux	39
IV.1. Equations de champ	39
IV.2. Conditions aux limites	39
IV.3. Situation initiale	40
V. Hypothèses simplificatrices courantes	41
V.1. Les hypothèses de petites perturbations	41
V.2. Incompressibilité des constituants	45
CHAPITRE 2 : Etude du comportement poroélastique	49
I. Equations d'état du milieu poreux en transformation finie	52
I.1. Définition du comportement poroélastique	52
I.2. Formulation alternative du comportement poroélastique	56
II. Poroélasticité en transformation infinitésimale	57
II.1. Comportement poroélastique linéaire en transformation infinitésimale	57
II.2. Comportement poroélastique non-linéaire en transformation infinitésimale	58
III. Poroélasticité finie et contraintes effectives	64
III.1. Contraintes effectives en poroélasticité infinitésimale	64
III.2. Contraintes effectives en poroélasticité finie	65
III.3. Analyse critique du concept de "tenseur des contraintes effectives"	66

CHAPITRE 3 : Etude de la consolidation et de la sédimentation en poroélasticité finie	69
I. Consolidation d'une couche poroélastique	72
I.1. Position du problème	73
I.2. Résolution	86
I.3. Rôle de la dépendance de C_0 par rapport à p en transformation finie	95
I.4. Conclusions de l'étude de la compaction	97
II. Compaction des bassins sédimentaires	98
II.1. Position du problème	99
II.2. Résolution	105
II.3. Conclusions de l'étude de la compaction	115
CHAPITRE 4 : Etude du comportement poroélastoplastique	119
I. Comportement poroélastoplastique en transformation finie	122
I.1. Cinématique des milieux poreux élastoplastiques	122
I.2. Formulation du comportement	126
I.3. Exemple : plasticité parfaite et élasticité linéaire	134
II. Comportement des argiles saturées en transformation finie	140
II.1. Prise en compte de l'incompressibilité du solide dans la modélisation biphasique des milieux poreux	140
II.2. Le modèle Cam-Clay	143
II.3. Extension du modèle Cam-Clay aux milieux poreux en transformation finie	155
II.4. Etude de la compaction des sédiments	158
CHAPITRE 5 : Résolution des problèmes de poroélastoplasticité finie	167
I. Formulation variationnelle des problèmes de poroélastoplasticité finie et algorithme de résolution	170
I.1. Formulation des problèmes de poroélastoplasticité	170
I.2. Discrétisation temporelle et formulation variationnelle du problème discrétisé	174
I.3. Résolution du problème variationnel	179
II. Etude du problème de Mandel : bloc poroélastoplastique en compression	184
II.1. Présentation du problème	184
II.2. Résolution en transformation infinitésimale	187
II.3. Résolution en transformation finie	191
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	201
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	207
ANNEXE 1 : principales notations	213
ANNEXE 2 : postulat de l'état local et non négativité de la dissipation intrinsèque	219

INTRODUCTION

**MOTIVATIONS ET OBJECTIFS
DU TRAVAIL PRESENTE**

De nombreux matériaux naturels ou artificiels sont des milieux solides à travers lesquels peut circuler un fluide (éventuellement plusieurs) : nous les désignerons ici par le terme de "milieux poreux". Les problèmes concrets qui nécessitent de tenir compte du couplage entre les déformations d'un milieu poreux et les écoulements qui s'y produisent ne manquent pas : on peut citer par exemple, dans le domaine du génie civil, l'estimation du tassement d'un terrain provoqué par une surcharge, et dans le domaine pétrolier la recherche des paramètres permettant d'optimiser l'exploitation d'un gisement. On comprend donc l'intérêt pratique de la construction d'une modélisation mécanique rigoureuse des milieux poreux. Parmi ceux qui ont entrepris une telle construction, Biot (1941,1955) a développé une modélisation macroscopique, c'est-à-dire fondée sur des grandeurs définies à l'échelle de l'ingénieur. Plus récemment, Olivier Coussy (1989,1991) a proposé dans le même cadre macroscopique une étude de la thermodynamique du milieu poreux considéré comme un milieu continu ouvert, sur laquelle nous nous appuyerons dans l'ensemble de ce travail.

Dans le cadre macroscopique employé par Biot et Coussy, le milieu poreux est considéré comme un milieu continu biphasique, c'est-à-dire comme la superposition de deux milieux continus classiques, le squelette et le fluide. On retrouve donc dans cette modélisation les outils classiques de la mécanique des milieux continus ; en particulier, la description de la cinématique du squelette est analogue à celle d'un solide habituel. D'autre part, comme en mécanique des milieux continus, on peut définir un ensemble d'hypothèses mathématiques de "petites perturbations" : lorsqu'elles sont vérifiées, ces hypothèses permettent de procéder à certaines approximations qui simplifient la formulation des problèmes. Il est fréquent cependant que l'on étudie des problèmes dans lesquels l'une ou l'autre de ces hypothèses n'est pas vérifiée : il faut alors renoncer aux simplifications correspondantes. On s'intéressera particulièrement ici à la situation où le squelette subit une transformation géométrique finie, c'est-à-dire que les éléments de volume du squelette subissent de grandes déformations ou de grandes rotations.

Le but de ce travail est donc de montrer comment se formule mathématiquement un problème de mécanique des milieux poreux en transformation finie, et de proposer des méthodes de résolution adaptées. Bien que la mécanique des milieux poreux fournisse un formalisme plus général, on s'intéressera surtout à des milieux de type sol ou roche, le fluide saturant étant en général de l'eau, et les applications envisagées appartiennent aux domaines de la géotechnique et de la géophysique. En ce qui concerne les problèmes mettant en jeu de très grandes échelles de temps et d'espace, dans lesquels le caractère fini des transformations géométriques est souvent très marqué, il faut souligner que la géométrie des structures géologiques à grande profondeur, leur comportement mécanique et les conditions aux limites à prendre en compte pour représenter une situation réelle sont en général mal connus, de sorte que l'on n'attend pas d'une modélisation qu'elle fournisse des résultats quantitatifs très précis. Le but poursuivi est donc de proposer un

modèle aussi simple que possible permettant de prendre en compte le caractère fini des transformations géométriques et la présence de fluide dans la structure.

La formulation d'un problème dans lequel le squelette d'un milieu poreux subit une transformation géométrique finie présente deux difficultés, l'une pratique, l'autre plus théorique. La première est à la fois la plus évidente et la plus facile à surmonter : puisque les changements de géométrie ne sont pas négligeables, il est nécessaire de distinguer les configurations successives du système au cours du temps. Il faut donc définir des notations suffisamment précises pour éviter tout risque de confusion et suffisamment simples pour rester d'un emploi commode : on trouve dans la littérature différents compromis entre ces deux exigences. La première difficulté se résume donc à la nécessité d'abandonner des notations familières pour revenir au cadre général des transformations finies. L'autre difficulté réside dans la formulation des lois de comportement, c'est-à-dire des relations décrivant l'évolution des efforts intérieurs à mesure que le milieu se déforme. Il s'agit de proposer une représentation mathématique (simple de préférence) de la physique sous-jacente aux processus de déformation du milieu. Même si le milieu considéré n'est pas poreux, il est délicat d'extrapoler les lois de comportement utilisées en petites perturbations au cadre des transformations finies. Par exemple, la prise en compte des rotations des éléments de matière (négligées en petites perturbations) constitue encore un problème théorique ouvert, malgré l'abondante littérature qui lui est consacrée. Par ailleurs, la présence de fluide dans un milieu poreux rend nécessaire un traitement spécifique.

Plusieurs approches permettent d'aborder le problème de la formulation de la loi de comportement : on peut d'une part envisager de déduire par voie théorique le comportement du matériau de la connaissance de sa structure et de son comportement à une échelle inférieure à celle où l'on observe : une telle approche fait appel à la fois à une connaissance précise du milieu à une échelle d'espace très fine, et à des méthodes mathématiques sophistiquées. L'approche que l'on privilégie ici consiste à construire une formulation fondée sur un petit nombre d'hypothèses clairement identifiées concernant la thermodynamique du milieu à l'échelle macroscopique. On obtient alors la forme des relations d'état, qu'il reste à identifier à partir d'expériences réalisées à la même échelle. On exploitera cette démarche dans les cas particuliers de la poroélasticité finie et de la poroélastoplasticité finie (sous certaines hypothèses simplificatrices).

Concrètement, ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Le chapitre 1 présente le cadre général de la modélisation mécanique des milieux poreux employée ici. Il rappelle les étapes de la construction d'un modèle mécanique : description de la cinématique du milieu, expression des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, construction de la représentation des efforts intérieurs. On présente ensuite le cadre

thermodynamique macroscopique mis en place par Coussy pour l'étude des milieux poreux considérés comme des milieux continus ouverts. C'est dans ce cadre que l'on cherchera à formuler les relations de comportement, c'est-à-dire les relations entre l'évolution des efforts intérieurs et la cinématique du milieu. On rappelle enfin la formulation des hypothèses simplificatrices les plus courantes en mécanique des milieux poreux : les hypothèses de petites perturbations d'une part, et d'autre part, les hypothèses d'incompressibilité des constituants du milieu poreux à l'échelle microscopique.

La structure des relations de comportement d'un milieu poreux élastique subissant de grandes transformations géométriques fait l'objet du chapitre 2. On consacre une attention particulière au cas d'un milieu dont le constituant solide est incompressible : la loi de comportement se formule alors d'une manière particulièrement compacte.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse de la consolidation et de la sédimentation unidimensionnelles d'un milieu poreux élastique en transformation finie. Il met en évidence les difficultés liées à la gestion du caractère fini des transformations géométriques et les différences entre les résultats selon que la formulation employée est construite dans le cadre des petites perturbations ou dans celui des transformations finies.

On étudie ensuite, dans le chapitre 4, la formulation du comportement poroélastoplastique en transformation finie. On considère d'abord la situation où l'élasticité est infinitésimale, linéaire et la plasticité parfaite : sous ces hypothèses, on justifie l'emploi de la dérivée de Jaumann pour l'écriture de la loi de comportement. Le modèle est ensuite étendu au cas d'un matériau écrouissable dont l'élasticité n'est pas linéaire : on propose ainsi une généralisation du modèle Cam-Clay aux milieux poreux en transformation finie, que l'on met en œuvre pour reprendre l'analyse du problème de la compaction des sédiments dans un cadre poroélastoplastique.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à la résolution, par voie numérique, des équations de la poroélastoplasticité finie. On propose une méthode générale de résolution pour les problèmes dans lesquels le squelette du milieu poreux est un système matériel indépendant du temps. Ce travail a donné lieu à une collaboration avec la société TOTAL, et a permis d'étendre au cadre de la mécanique des milieux poreux un code de résolution numérique par éléments finis des problèmes de plasticité finie. On présente également une résolution numérique par la méthode des différences finies d'un problème académique simple : le problème de la compression simple d'un bloc poreux élastoplastique (parfois appelé problème de Mandel).

CHAPITRE 1

MODELISATION MECANIQUE DES MILIEUX POREUX

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, le terme de milieu poreux désigne un matériau, qui à l'échelle où on l'observe (que l'on appellera échelle macroscopique) est perçu comme un milieu continu solide à travers lequel peut circuler un fluide. Une description du même matériau à une échelle inférieure, dite échelle microscopique, révèle qu'il s'agit d'un réseau solide parcouru par un espace poreux connecté et saturé par un fluide. Nous ne considérerons pas le cas de milieux poreux non saturés, ou saturés par plusieurs fluides.

Suivant la démarche développée par Biot (1941,1955,1977), puis par Coussy (1991,1995) pour modéliser ces milieux, nous adoptons d'emblée un point de vue macroscopique, c'est-à-dire que l'on choisit de ne pas décrire précisément la structure géométrique du réseau poreux à l'échelle microscopique, et de privilégier l'échelle de la structure étudiée (qui est celle de l'ingénieur). On admet qu'à cette échelle, le milieu poreux peut être décrit comme la superposition de deux milieux continus habituels, le "squelette" et le "fluide". A chaque instant, la matière contenue dans un volume élémentaire de l'espace géométrique $d\Omega$ est donc représentée par deux particules matérielles, l'une de "squelette", qui représente la partie du réseau solide contenue dans $d\Omega$, l'autre de "fluide", qui représente le fluide saturant l'espace poreux contenu dans $d\Omega$ (figure 1). Afin d'éviter toute confusion entre les échelles de description, on réserve dans la suite les termes "réseau solide" et "fluide saturant" à la description du milieu l'échelle microscopique, tandis que les termes "squelette" et de "fluide" (ou "milieu continu fluide") font référence à l'échelle macroscopique.

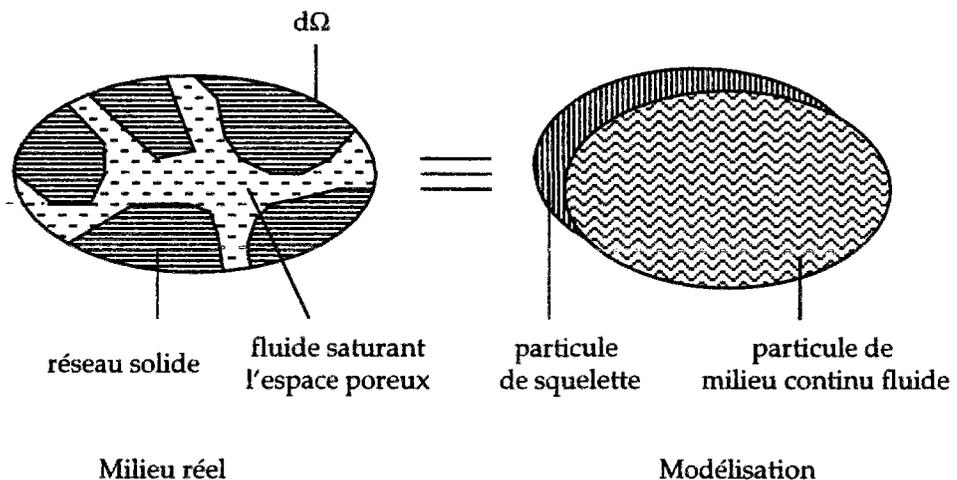


Figure 1 - Modélisation du milieu poreux comme superposition de deux milieux continus

Bien que l'on ne décrive pas précisément la structure géométrique du réseau à l'échelle microscopique, on introduit dans la description du milieu à l'échelle macroscopique la fraction du volume total effectivement occupée à l'échelle inférieure par chacune des deux phases : dans le volume géométrique $d\Omega$, le volume effectivement occupé par le fluide saturant est égal à $\phi d\Omega$. La grandeur ϕ est appelée porosité.

Il est donc possible de définir à l'échelle macroscopique deux masses volumiques différentes pour chacune des phases, selon que la masse d'une particule matérielle (de fluide ou de squelette) est rapportée au volume occupé par le milieu poreux dans son ensemble ou au volume effectivement occupé à l'échelle inférieure par la phase considérée. On définit ainsi la masse volumique apparente du fluide ρ_a^f comme le rapport de la masse de la particule de fluide au volume total $d\Omega$ occupé par le milieu, et la masse volumique apparente du squelette ρ_a^s comme le rapport de la masse de la particule de squelette au volume total $d\Omega$.

Les masses volumiques apparentes interviennent naturellement dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Il est judicieux d'introduire aussi la masse volumique vraie ρ^f du fluide, définie comme le rapport de la masse de la particule de fluide au volume effectivement occupé à l'échelle microscopique par le fluide saturant, égal à $\phi d\Omega$ par définition de la porosité. Les masses volumiques apparente et vraie du fluide sont donc reliées par :

$$(1) \quad \rho^f = \rho_a^f / \phi$$

On définit enfin la masse volumique vraie ρ^s du solide comme le rapport de la masse de la particule de squelette au volume effectivement occupé à l'échelle microscopique par le solide. Il est facile de voir que ρ_a^s et ρ^s sont reliées par l'égalité :

$$(2) \quad \rho^s = \rho_a^s / (1 - \phi)$$

La suite de la présentation de la modélisation des milieux poreux est destinée à introduire les problématiques abordées dans les chapitres suivants. Le lecteur désireux de trouver une présentation plus complète de la théorie pourra se reporter par exemple à Coussy (1991,1995).

I. CINEMATIQUE DES MILIEUX POREUX.

Les "théories de mélanges" (voir par exemple Truesdell et Toupin (1960), Bowen (1976), Muller (1975), ou Bear et Bachmat (1990)) sont aussi des théories macroscopiques dans lesquelles le milieu réel est modélisé comme un milieu multiphasique, la description étant complétée par la donnée de la fraction volumique de chaque phase. Dans ces théories, toutes les phases jouent le

même rôle. Dans la modélisation des milieux poreux développée par Biot en revanche, on attribue un rôle particulier au squelette et on considère le milieu poreux comme un milieu continu "ouvert". Cette différence de point de vue se manifeste maintenant dans le choix de la description de la cinématique des milieux poreux.

Décrire la cinématique d'un milieu poreux consiste à décrire le mouvement de chacun des milieux continus, squelette et fluide, qui représentent le milieu poreux à l'échelle choisie pour construire la modélisation. Dans les théories de mélanges, aucune des phases ne joue un rôle particulier : la description du mouvement est donc la même pour les deux milieux continus. Nous faisons au contraire le choix d'adopter une description différente pour le squelette et pour le fluide. Ce choix est justifié par les développements à venir, notamment par l'étude du comportement du milieu poreux.

L1. CINEMATIQUE DU SQUELETTE.

L1.1. Description lagrangienne du mouvement du squelette.

On considère un référentiel muni d'un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, et on introduit une configuration particulière du squelette, dite configuration de référence, dans laquelle chaque particule de squelette est repérée par le vecteur-position $\underline{X} = \underline{OM}_0$ du point géométrique M_0 où elle est située.

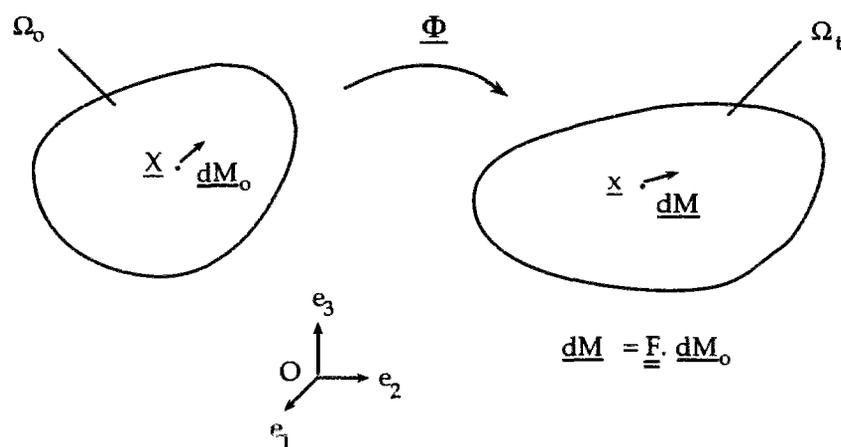


Figure 2 - Représentation lagrangienne du mouvement du squelette

On désigne par Ω_0 le domaine occupé par le squelette dans la configuration de référence. A l'instant t , le squelette est dans une nouvelle configuration, dite configuration actuelle. Dans cette configuration, le domaine occupé par le squelette est désigné par Ω_t , et la particule de squelette repérée par \underline{X} dans la configuration de référence est située au point géométrique M de

coordonnées \underline{x} (figure 2). On désigne par $\underline{\Phi}$ l'application $(\underline{X}, t) \mapsto \underline{x}(\underline{X}, t)$. On supposera que cette application est continûment différentiable par rapport aux variables d'espace et par rapport au temps, et que pour toute valeur de t fixée, l'application $\underline{\Phi}$ définit une bijection entre Ω_0 et Ω_t . La donnée de l'application $\underline{\Phi}$ sur l'ensemble $\Omega_0 \times [t_0, t_1]$ constitue la description lagrangienne du mouvement du squelette entre les instants t_0 et t_1 .

Il est habituel d'introduire un certain nombre de grandeurs utiles reliées à la transformation géométrique définie par $\underline{\Phi}$. On introduit notamment le champ de déplacement :

$$(3) \quad \underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

et le gradient de la transformation :

$$(4) \quad \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\text{Grad}}}\underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Rappelons rapidement les formules de transport associées à ce type de description du mouvement. Un vecteur matériel élémentaire de la configuration de référence $d\underline{M}_0$ dont l'origine est située au point de coordonnées \underline{X} est transformé à l'instant t en un vecteur élémentaire $d\underline{M}$ donné par :

$$(5) \quad d\underline{M} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{M}_0$$

Le volume du parallélépipède construit sur un trièdre de vecteurs matériels élémentaires $(d\underline{M}_0^{(1)}, d\underline{M}_0^{(2)}, d\underline{M}_0^{(3)})$ est égal au déterminant $d\Omega_0 = \det(d\underline{M}_0^{(1)}, d\underline{M}_0^{(2)}, d\underline{M}_0^{(3)})$. L'image par $\underline{\Phi}$ à l'instant t de ce parallélépipède élémentaire est le parallélépipède construit sur le trièdre $(\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{M}_0^{(1)}, \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{M}_0^{(2)}, \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{M}_0^{(3)})$, dont le volume est donné par :

$$(6) \quad d\Omega_t = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) d\Omega_0$$

On désigne dans la suite par $J(\underline{X}, t)$ le déterminant de $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$; J porte encore les noms de "jacobien de la transformation géométrique du squelette" ou de "dilatation volumique du squelette".

Considérons enfin une surface matérielle élémentaire de la configuration de référence représentée par le vecteur élémentaire $d\underline{S}_0$ (c'est-à-dire d'aire $\|d\underline{S}_0\|$ et de normale unitaire $d\underline{S}_0 / \|d\underline{S}_0\|$). Dans le mouvement du squelette, cette surface élémentaire est transformée en une surface élémentaire représentée par le vecteur $d\underline{S}$. Considérant le transport du volume matériel construit sur cette facette et sur un vecteur matériel élémentaire $d\underline{M}_0$, on obtient en appliquant (6) :

$$(7) \quad d\underline{S} \cdot d\underline{M} = J d\underline{S}_0 \cdot d\underline{M}_0$$

d'où l'on déduit immédiatement, compte tenu de (5) :

$$(8) \quad d\underline{S} = J (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \cdot d\underline{S}_0$$

où $\underline{\underline{T}}^T$ désigne le tenseur transposé d'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{T}}$.

I.1.2. Description eulérienne du mouvement du squelette.

Adopter une description eulérienne du mouvement consiste à définir à tout instant t la vitesse $\underline{u}^s(\underline{x},t)$ de la particule de squelette située au point géométrique de vecteur-position \underline{x} . La différence entre ce point de vue et la description lagrangienne présentée ci-dessus réside dans le fait qu'une description eulérienne ne nécessite pas de faire le choix d'une configuration particulière prise comme référence. Le champ $\underline{u}^s(\underline{x},t)$ et ceux qui s'en déduisent (comme son gradient $\underline{\text{grad}} \underline{u}^s = (\partial u_i^s / \partial x_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$, la trace et les parties symétrique et antisymétrique de $\underline{\text{grad}} \underline{u}^s$) sont donc définis et calculés en fonction de \underline{x} et t seulement, sans référence à une autre configuration que la configuration à l'instant t .

On rappelle que la description eulérienne se déduit de la description lagrangienne au moyen de l'identité :

$$(9) \quad \underline{u}^s(\underline{x},t) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(\bar{\Phi}(\underline{x},t),t)$$

où $\bar{\Phi}$ désigne l'application qui au vecteur-position \underline{x} associe les coordonnées \underline{X} qui repèrent la position dans la configuration de référence de la particule de squelette située en \underline{x} à l'instant t :

$$(10) \quad \bar{\Phi}(\bar{\Phi}(\underline{x},t),t) = \underline{x}$$

On rappelle également la formule classique qui relie le gradient eulérien des vitesses et la description lagrangienne de la cinématique du squelette :

$$(11) \quad \underline{\text{grad}} \underline{u}^s(\underline{x},t) = \dot{\underline{F}}(\bar{\Phi}(\underline{x},t),t) \cdot \underline{F}^{-1}(\bar{\Phi}(\underline{x},t),t)$$

où $\dot{\underline{F}}$ désigne la dérivée temporelle de \underline{F} :

$$(12) \quad \dot{\underline{F}}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial t}(\underline{X},t)$$

I.2. CINEMATIQUE DU FLUIDE.

I.2.1. Description eulérienne du mouvement absolu du fluide.

Comme celui du squelette, le mouvement du fluide peut être décrit de différentes manières. On peut par exemple construire une théorie reposant sur une description lagrangienne du mouvement de chacune des phases en introduisant une configuration de référence propre à chaque phase (voir par exemple (Dormieux et Stolz, 1992)). Il est cependant plus habituel d'adopter une description eulérienne pour représenter le mouvement d'un fluide. Le mouvement

du fluide est donc défini par la donnée de la vitesse $\underline{u}^f(\underline{x},t)$ de la particule de fluide située au point géométrique M de coordonnées \underline{x} à l'instant t .

I 2. 2. Descriptions eulérienne et lagrangienne

du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette.

En pratique, le point de vue consistant à privilégier le mouvement du squelette et à considérer le milieu poreux comme un système ouvert, qui sera développé en § III, conduit à utiliser le mouvement relatif du fluide par rapport au squelette plutôt que son mouvement absolu. On introduit donc la vitesse relative du fluide par rapport au squelette $\underline{u}^r(\underline{x},t)$, c'est-à-dire la différence entre les vitesses eulériennes absolues de la particule de fluide et de la particule de squelette situées à l'instant t au même point géométrique \underline{x} :

$$(13) \quad \underline{u}^r(\underline{x},t) = \underline{u}^f(\underline{x},t) - \underline{u}^s(\underline{x},t)$$

On introduit encore le vecteur eulérien courant relatif de masse fluide \underline{w} défini par :

$$(14) \quad \underline{w}(\underline{x},t) = \rho_a^f(\underline{x},t) \underline{u}^r(\underline{x},t)$$

On rappelle que $\rho_a^f(\underline{x},t)$ désigne la masse volumique apparente du fluide au point \underline{x} à l'instant t . Considérons à l'instant t une surface matérielle élémentaire orientée attachée au squelette et représentée par le vecteur $d\underline{S}_t$: il résulte de (14) que la masse de fluide qui traverse cette surface élémentaire par unité de temps est égale à $\underline{w} \cdot d\underline{S}_t$.

Il est commode d'introduire un représentant lagrangien du vecteur courant de masse fluide \underline{w} , noté \underline{M} , et défini par la formule de transport suivante :

$$(15) \quad \underline{M}(\underline{X},t) = J(\underline{X},t) [\underline{F}(\underline{X},t)]^{-1} \cdot \underline{w}(\Phi(\underline{X},t),t)$$

Il est intéressant de souligner que \underline{M} constitue une représentation lagrangienne *par rapport à la configuration du squelette choisie comme référence* de la vitesse relative du fluide par rapport au squelette.

On vérifiera sans peine que si $d\underline{S}_t$ désigne le transporté dans le mouvement du squelette d'une surface matérielle $d\underline{S}_0$ de la configuration de référence (située au point \underline{X}), on a :

$$(16) \quad \underline{M}(\underline{X},t) \cdot d\underline{S}_0 = \underline{w}(\Phi(\underline{X},t),t) \cdot d\underline{S}_t$$

De plus, on peut montrer que l'on a :

$$(17) \quad \frac{1}{J} \text{Div } \underline{M} = \text{div } \underline{w}$$

(en notations indicielles $\frac{1}{J} \frac{\partial M_i}{\partial X_i} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$).

L3. GRANDEURS "EULERIENNES" ET "LAGRANGIENNES". CHAMPS "EULERIENS" ET "LAGRANGIENS".

Une partie de la difficulté liée aux problèmes de transformation finie consiste à gérer de manière efficace une description lagrangienne du mouvement du squelette et ses relations avec la description eulérienne du mouvement des deux phases. Il convient notamment d'éviter qu'une terminologie trop peu précise entraîne des confusions. En particulier, il faut noter que le sens des qualificatifs "lagrangien" et "eulérien" est différent selon qu'ils s'appliquent à des grandeurs physiques ou à des champs, c'est-à-dire à des fonctions mathématiques.

La définition des grandeurs qui s'introduisent naturellement dans les descriptions eulériennes des mouvements du squelette et du fluide (comme les champs de vitesse \underline{u}^s et \underline{u}^f et leurs gradients sur la configuration à l'instant t , ainsi que les grandeurs qui s'en déduisent) ne nécessite pas de choisir une configuration particulière comme référence : on qualifie ces grandeurs d'eulériennes. A l'inverse, on réservera le terme de grandeur lagrangienne (par rapport au squelette) aux grandeurs physiques qui sont définies par rapport à la configuration de référence du squelette. C'est évidemment le cas du champ de déplacement et du gradient de la transformation géométrique du squelette par exemple ; c'est aussi le cas du vecteur lagrangien courant de masse fluide \underline{M} défini en §I.2.2. On notera que nous n'avons pas introduit de configuration de référence pour le fluide : il n'y a donc pas de grandeurs lagrangiennes par rapport au fluide.

Par ailleurs, on appelle "champ eulérien" une fonction des coordonnées \underline{x} , c'est-à-dire donnant la valeur d'une grandeur donnée en un point fixe \underline{x} de l'espace géométrique au cours du temps, et "champ lagrangien" une fonction des coordonnées \underline{X} , c'est-à-dire donnant la valeur d'une grandeur au point image par la transformation du squelette du point \underline{X} de la configuration initiale. Considérons un champ eulérien $b(\underline{x}, t)$: la transformation géométrique du squelette introduisant une correspondance biunivoque entre les deux systèmes de coordonnées spatiales, la grandeur physique représentée par b peut aussi être représentée par un champ lagrangien $B(\underline{X}, t)$ évidemment défini par :

$$(18) \quad B(\underline{X}, t) = b(\Phi(\underline{X}, t), t)$$

On dit que B est un "représentant lagrangien" de la grandeur représentée par b . Cette convention procure une plus grande précision dans les notations, ce qui s'avère utile dans certains contextes particuliers, pour le calcul de dérivées particulières (cf. §II.1) par exemple. Toutefois, elle provoque une augmentation du nombre de notations à manipuler qui la rend peu commode

d'emploi. On appelle également représentant lagrangien d'un champ eulérien de vecteurs ou de tenseurs un champ lagrangien défini à partir d'un champ eulérien au moyen d'une formule de transport (du type (15) par exemple) plutôt que par la formule (18) : on prendra garde au fait que le champ eulérien et son représentant lagrangien ne prennent alors pas la même valeur en des points \underline{x} et \underline{X} homologues dans la transformation du squelette.

On n'utilisera en pratique la convention (18) que dans le contexte particulier du § II, et l'on admettra en général que la même notation b désigne à la fois les deux champs eulérien et lagrangien (reliés par (18)) représentant la grandeur b , sans préciser les dépendances spatiales des champs considérés. On ne conservera une écriture complète (comme dans (11) par exemple) qu'à l'occasion de la définition de représentants lagrangiens, ou lorsque la notation complète s'avère nécessaire pour éviter une confusion. On adoptera en revanche la convention suivante (déjà utilisée dans (4) et (11)) : un opérateur de dérivation spatiale agissant sur les coordonnées spatiales \underline{x} (resp. \underline{X}) sera désigné par un symbole commençant par une minuscule (respectivement par une majuscule).

II. EQUATIONS DE CONSERVATION.

On s'intéresse ici à l'écriture des équations de conservation : conservation de la masse de chacun des milieux continus représentant le milieu poreux, et de la quantité de mouvement. On commence par rappeler la définition des outils mathématiques nécessaires à la formulation des lois de conservation. Certains résultats sont donnés sans démonstration : pour davantage de précisions, le lecteur pourra se reporter par exemple à (Salençon, 1988), et à (Coussy, 1991) pour les résultats spécifiques aux milieux poreux.

II.1. DERIVEES PARTICULAIRES ET DERIVEE MATERIELLE.

II.1.1. Dérivées particulières d'une grandeur physique.

Le calcul d'une dérivée particulière consiste à étudier les variations d'une grandeur physique lorsque l'on suit une particule matérielle sur sa trajectoire. Dans le contexte de la mécanique des milieux poreux, il faut préciser si l'on s'intéresse à une particule de fluide ou de squelette : on est donc amené à définir une dérivée particulière "en suivant le fluide" et une dérivée particulière "en suivant le squelette", notées respectivement d^f / dt et d^s / dt .

Considérons d'abord le cas d'une grandeur physique représentée par un champ lagrangien $B(\underline{X}, t)$. La dérivée particulière en suivant le squelette est simplement une dérivée par rapport au temps :

$$(19) \quad \frac{d^s}{dt} B(\underline{X}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{X}, t)$$

D'autre part, la dérivée particulière en suivant le squelette d'une grandeur représentée par un champ eulérien $b(\underline{x}, t)$ est donnée par :

$$(20) \quad \frac{d^s}{dt} b(\underline{x}, t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} b(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}^s(\underline{x}, t)$$

et de manière analogue, la dérivée particulière en suivant le fluide d'une grandeur représentée par un champ eulérien $b(\underline{x}, t)$ est donnée par :

$$(21) \quad \frac{d^f}{dt} b(\underline{x}, t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} b(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}^f(\underline{x}, t)$$

II.1.2. Dérivées particulières d'une intégrale de volume.

On s'intéresse maintenant aux variations d'une intégrale définie sur un volume que l'on suit dans le mouvement de l'un des milieux continus qui représentent le milieu poreux.

- Cas d'une densité volumique

Considérons à l'instant t un domaine géométrique Ω_t , et une grandeur physique B représentée par la densité volumique $b(\underline{x}, t)$. La quantité J de la grandeur B contenue dans Ω_t est donnée par :

$$(22) \quad J = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

Un calcul classique donne la dérivée particulière de l'intégrale J en suivant le mouvement d'un des deux milieux continus (en supposant que le champ b est continu) :

$$(23) \quad \frac{d^\alpha}{dt} J = \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b \underline{u}^\alpha \cdot \underline{n} dS_t = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \text{div}(b \underline{u}^\alpha) \right] d\Omega_t$$

où $\partial\Omega_t$ désigne le contour du domaine Ω_t , \underline{n} la normale extérieure à Ω_t en un point de $\partial\Omega_t$, et l'exposant α précise le milieu continu dont on suit le mouvement : $\alpha = s$ si l'on calcule la dérivée particulière de l'intégrale "en suivant le squelette" et $\alpha = f$ si l'on calcule la dérivée particulière de l'intégrale "en suivant le fluide".

- Cas d'une densité massique

Considérons maintenant l'intégrale d'une grandeur physique représentée par sa densité $b_m^\alpha(\underline{x}, t)$ par unité de masse du milieu continu désigné par α :

$$(24) \quad J = \int_{\Omega_t} b_m^\alpha \rho_a^\alpha d\Omega_t$$

On s'intéresse à la dérivée particulaire de cette intégrale en suivant le mouvement du milieu α . L'identité :

$$(25) \quad \frac{d^\alpha}{dt} (\rho_a^\alpha d\Omega_t) = 0$$

qui traduit la conservation de la masse pour le milieu continu considéré, permet de calculer la valeur de la dérivée particulaire de l'intégrale J :

$$(26) \quad \frac{d^\alpha}{dt} J = \int_{\Omega_t} \frac{d^\alpha}{dt} (b_m^\alpha) \rho_a^\alpha d\Omega_t$$

II.1.3. Dérivée matérielle.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement fait intervenir la variation par rapport au temps de la quantité J d'une grandeur extensive contenue dans un système matériel. Dans le cas du milieu continu monophasique, la dérivée particulaire constitue l'outil mathématique adéquat pour le calcul de cette variation. Dans le cas d'un milieu poreux, il faut tenir compte du fait que le squelette et le fluide sont animés de cinématiques différentes : la notion pertinente est celle de "dérivée matérielle".

Considérons une grandeur physique extensive B dont on donne les densités eulériennes $b_m^s(\underline{x}, t)$ par unité de masse de squelette et $b_m^f(\underline{x}, t)$ par unité de masse de fluide. La quantité J de la grandeur B contenue dans un domaine géométrique Ω_t à l'instant t est égale à la somme des contributions de chacun des milieux continus :

$$(27) \quad J = J^s + J^f \quad \text{avec} \quad J^\alpha = \int_{\Omega_t} b_m^\alpha \rho_a^\alpha d\Omega_t$$

En raison du caractère extensif de B , la variation pendant l'unité de temps de la quantité de B attachée au système matériel considéré n'est autre que la somme de la variation de J^s en suivant les particules de squelette dans leur mouvement et de la variation de J^f en suivant les particules de fluide dans leur mouvement. Par définition des dérivées particulières "en suivant le squelette" et "en suivant le fluide" d'une intégrale, la dérivée matérielle de J , notée $\frac{dJ}{dt}$, est donc donnée par :

$$(28) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{d^s}{dt} (J^s) + \frac{d^f}{dt} (J^f) = \int_{\Omega_t} \frac{d^s}{dt} (b_m^s) \rho_a^s d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \frac{d^f}{dt} (b_m^f) \rho_a^f d\Omega_t$$

Après avoir rappelé la définition des outils mathématiques utiles, nous abordons maintenant l'écriture des lois de conservation, en commençant par la conservation de la masse.

II.2. CONSERVATION DE LA MASSE.

Dans la construction d'un modèle mécanique pour les milieux poreux, l'une des conséquences de la conservation de la masse concerne la régularité du vecteur courant relatif de masse fluide.

II.2.1. Régularité du courant relatif de masse fluide \underline{w} .

La porosité du milieu et la masse volumique apparente du fluide ne sont pas nécessairement des fonctions continues des variables spatiales. Le vecteur \underline{w} peut donc être une fonction discontinue de \underline{x} . Considérons, sur une surface de discontinuité Σ de \underline{w} , une surface matérielle élémentaire attachée au squelette de normale unitaire \underline{n} et de surface dS . Le champ \underline{w} prend de part et d'autre de la surface les valeurs \underline{w}^+ et \underline{w}^- (voir figure 3). Le débit de masse fluide "entrant" et "sortant" de l'élément de surface considéré vaut respectivement $\underline{w}^+ \cdot \underline{n} dS$ et $\underline{w}^- \cdot \underline{n} dS$. La conservation de la masse de fluide impose évidemment l'égalité $\underline{w}^+ \cdot \underline{n} = \underline{w}^- \cdot \underline{n}$, c'est-à-dire la continuité de la composante normale de \underline{w} .

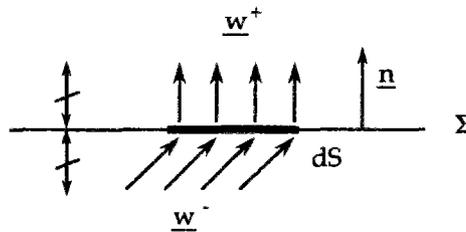


Figure 3 - Continuité de la composante normale de \underline{w} .

II.2.2. Expressions eulériennes de la conservation de la masse du squelette et du fluide.

Considérons la particule de squelette contenue à l'instant t dans un volume élémentaire $d\Omega_t$. Sa masse est égale au produit de la masse volumique apparente du squelette ρ_a^s par le volume $d\Omega_t$. La conservation de la masse de cette particule au cours de son mouvement s'écrit :

$$(29) \quad \frac{d^s}{dt} (\rho_a^s d\Omega_t) = 0$$

On rappelle que le taux de déformation volumique est relié à la divergence du champ de vitesse du squelette à l'instant t :

$$(30) \quad \frac{d^s}{dt} (d\Omega_t) = \text{div } \underline{u}^s d\Omega_t$$

On en déduit que (29) peut encore s'écrire :

$$(31) \quad \frac{d^s}{dt} (\rho_a^s) + \rho_a^s \text{div } \underline{u}^s = 0$$

ou encore, en tenant compte de (20) :

$$(32) \quad \frac{\partial \rho_a^s}{\partial t} + \text{div} (\rho_a^s \underline{u}^s) = 0$$

La conservation de la masse de fluide conduit à des formules analogues :

$$(33) \quad \frac{d^f}{dt} (\rho_a^f) + \rho_a^f \text{div } \underline{u}^f = 0$$

$$(34) \quad \frac{\partial \rho_a^f}{\partial t} + \text{div} (\rho_a^f \underline{u}^f) = 0$$

II.2.3. Expression lagrangienne de la conservation de la masse de fluide.

Considérons la dérivée particulière *en suivant le squelette* de la masse de fluide contenue dans le volume élémentaire $d\Omega_t$:

$$(35) \quad \frac{d^s}{dt} (\rho_a^f d\Omega_t) = \frac{d^s}{dt} (\rho_a^f) d\Omega_t + \rho_a^f \frac{d^s}{dt} (d\Omega_t)$$

Utilisant (20) et (30) on obtient :

$$(36) \quad \frac{d^s}{dt} (\rho_a^f d\Omega_t) = \left[\frac{\partial \rho_a^f}{\partial t} + \text{div} (\rho_a^f \underline{u}^s) \right] d\Omega_t$$

Compte tenu de l'expression eulérienne de la conservation de la masse fluide (34) et de la définition (14) de \underline{w} , on obtient encore :

$$(37) \quad \frac{d^s}{dt} (\rho_a^f d\Omega_t) = - \text{div } \underline{w} d\Omega_t$$

Cette expression résulte de relations cinématiques classiques, de la définition de \underline{w} , et de la conservation de la masse fluide, dont nous allons maintenant établir une expression lagrangienne (par rapport au squelette). On note $d\Omega_0$ le volume élémentaire de la configuration de référence dont $d\Omega_t$ est le transporté dans le mouvement du squelette, et on pose :

$$(38) \quad m(\underline{X}, t) = \rho_a^f(\Phi(\underline{X}, t), t) J(\underline{X}, t) - \rho_{a,0}^f(\underline{X})$$

où $\rho_{a,o}^f(\underline{X})$ désigne la masse volumique apparente de la particule de fluide située dans la configuration de référence au point \underline{X} . Notant ρ_o^f et ϕ_o les valeurs prises respectivement par la masse volumique vraie du fluide et par la porosité dans la configuration de référence, on déduit sans peine de (1) que (38) peut aussi s'écrire :

$$(39) \quad m = J \rho^f \phi - \rho_o^f \phi_o$$

D'après (38), la quantité $m d\Omega_o$ est égale à la différence entre la masse de fluide contenue à l'instant t dans le volume $d\Omega_t$ et la masse de fluide contenue dans le volume $d\Omega_o$ de la configuration de référence. Elle apparaît donc comme un écart par rapport à une situation de référence : à ce titre, m est une grandeur lagrangienne, que l'on appellera densité volumique lagrangienne d'apport de masse fluide, ou plus simplement apport de masse fluide. Portant cette définition dans (37), on peut exprimer la conservation de la masse fluide par :

$$(40) \quad \frac{d^s m}{dt}(\underline{X}, t) + J(\underline{X}, t) \operatorname{div} \underline{w}(\Phi(\underline{X}, t), t) = 0$$

ou encore, en utilisant le représentant lagrangien \underline{M} de \underline{w} et la relation (17) :

$$(41) \quad \frac{d^s m}{dt} + \operatorname{Div} \underline{M} = 0$$

II.3. CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

II.3.1. Conservation de la quantité de mouvement du milieu poreux.

Représentation des efforts intérieurs dans un milieu poreux.

On s'intéresse ici au sous-système matériel constitué par les particules de squelette et de fluide contenues à l'instant t dans un domaine géométrique Ω_t^i inclus dans Ω_t . Les efforts extérieurs auxquels il est soumis sont représentés par une densité de forces $\underline{F}^s(\underline{x}, t)$ par unité de masse de squelette, par une densité de forces $\underline{F}^f(\underline{x}, t)$ par unité de masse de fluide et par une densité surfacique de force \underline{T} sur sa frontière : la densité \underline{T} représente les forces surfaciques s'exerçant sur l'ensemble de la matière, c'est-à-dire l'ensemble des forces exercées sur le squelette et sur le fluide à travers une surface donnée. On suppose de plus que \underline{T} ne dépend que du point considéré, du temps, et de la normale extérieure unitaire à la frontière. Les éléments de réduction au point O du torseur des efforts extérieurs sont la résultante \underline{F} et le moment \underline{M}_o donnés par :

$$(42) \quad \underline{F} = \int_{\Omega_t^i} (\rho_a^s \underline{F}^s + \rho_a^f \underline{F}^f) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t^i} \underline{T} dS_t$$

$$(43) \quad \underline{M}_o = \int_{\Omega_t^i} \underline{OM} \wedge (\rho_a^s \underline{F}^s + \rho_a^f \underline{F}^f) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t^i} \underline{OM} \wedge \underline{T} dS_t$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement stipule que, quel que soit le sous-système considéré, le torseur des efforts extérieurs est égal à la dérivée matérielle du torseur des quantités

de mouvement du système constitué par les particules de squelette et de fluide contenues à l'instant t dans le domaine géométrique Ω_t^i . La résultante de la dérivée matérielle du tenseur des quantités de mouvements est la dérivée matérielle de l'intégrale :

$$(44) \quad \int_{\Omega_t^i} (\rho_a^s \underline{u}^s + \rho_a^f \underline{u}^f) d\Omega_t$$

On note γ^α l'accélération d'une particule du milieu continu α :

$$(45) \quad \gamma^\alpha = \frac{d^\alpha(\underline{u}^\alpha)}{dt}$$

La dérivée matérielle de l'intégrale (44) est alors égale, d'après (28), à :

$$(46) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t^i} (\rho_a^s \underline{u}^s + \rho_a^f \underline{u}^f) d\Omega_t \right] = \int_{\Omega_t^i} (\rho_a^s \gamma^s + \rho_a^f \gamma^f) d\Omega_t$$

D'autre part, la dérivée matérielle du moment au point O des quantités de mouvement est donnée par :

$$(47) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t^i} \underline{OM} \wedge (\rho_a^s \underline{u}^s + \rho_a^f \underline{u}^f) d\Omega_t \right] = \int_{\Omega_t^i} \underline{OM} \wedge (\rho_a^s \gamma^s + \rho_a^f \gamma^f) d\Omega_t$$

L'égalité des résultantes (42) et (46) du tenseur des efforts extérieurs et de la dérivée matérielle du tenseur des quantités de mouvement conduit à l'égalité suivante, qui a lieu pour tout choix du sous-domaine Ω_t^i :

$$(48) \quad \int_{\partial\Omega_t^i} \underline{T} dS_t = \int_{\Omega_t^i} (\rho_a^s (\gamma^s - \underline{F}^s) + \rho_a^f (\gamma^f - \underline{F}^f)) d\Omega_t$$

Un résultat classique connu sous le nom du "lemme du tétraèdre", dont on ne rappelle pas la démonstration ici, permet de montrer qu'il existe un champ de tenseurs d'ordre 2, noté $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$, possédant la propriété suivante :

$$(49) \quad \underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$$

Il résulte de la définition de \underline{T} que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ permet de rendre compte des efforts s'exerçant sur une facette quelconque à l'intérieur du système. Il porte le nom de tenseur des contraintes totales, car il représente les efforts s'exerçant sur les deux milieux continus squelette et fluide. Le théorème de la divergence permet d'autre part de montrer que :

$$(50) \quad \int_{\partial\Omega_t^i} \underline{T} dS_t = \int_{\Omega_t^i} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_t$$

On déduit de ce résultat et de (48) l'équation de la dynamique sous forme locale :

$$(51) \quad \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_a^s (\underline{F}^s - \gamma^s) + \rho_a^f (\underline{F}^f - \gamma^f) = 0$$

Comme pour un milieu continu, on peut établir la symétrie du tenseur des contraintes en exploitant l'égalité des moments (43) et (47) du tenseur des efforts extérieurs et de la dérivée matérielle du tenseur des quantités de mouvement.

II.3.2. Conservation de la quantité de mouvement de chaque milieu continu.

Tenseurs de contraintes partielles.

Le paragraphe précédent propose une construction des efforts intérieurs au milieu poreux considéré comme un tout. Il est utile pour la suite de la démarche (cf. § III) d'introduire une représentation des efforts intérieurs propre à chacun des deux milieux continus représentant le milieu poreux.

La démarche est identique à celle qui a conduit à introduire $\underline{\underline{\sigma}}$: on considère le système matériel constitué par les particules du milieu continu $^\alpha$ ($\alpha = s$ pour le squelette et $\alpha = f$ pour le fluide), contenues à l'instant t dans un sous-domaine géométrique Ω'_t . Les efforts extérieurs auxquels il est soumis sur sa frontière sont représentés par une densité surfacique de force $\underline{\underline{T}}^\alpha$, avec évidemment :

$$(52) \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^s + \underline{\underline{T}}^f$$

Comme précédemment, la particule de squelette située dans un volume élémentaire $d\Omega_t$ subit une force $\rho_a^\alpha \underline{\underline{F}}^\alpha d\Omega_t$. Il convient d'autre part de modéliser l'interaction entre les deux particules matérielles situées dans le même domaine géométrique : on postule qu'il est possible d'en rendre compte par une densité volumique $\underline{\underline{a}}$. La particule de fluide occupant $d\Omega_t$ exerce alors sur la particule de squelette qui coïncide avec elle la force élémentaire $\underline{\underline{a}} d\Omega_t$; en vertu du principe de l'action et de la réaction, la particule de squelette exerce sur celle de fluide une force opposée $-\underline{\underline{a}} d\Omega_t$. Ainsi, la densité volumique de force s'exerçant sur le milieu continu $^\alpha$ est donnée par $\rho_a^\alpha \underline{\underline{F}}^\alpha + \epsilon^\alpha \underline{\underline{a}}$, avec $\epsilon^s = 1$ et $\epsilon^f = -1$.

La loi de conservation de la quantité de mouvement prescrit l'égalité du torseur des efforts extérieurs et de la dérivée particulaire du torseur des quantités de mouvement. Les éléments de réduction au point O du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur le sous-système matériel considéré sont la résultante $\underline{\underline{F}}^\alpha$ et le moment $\underline{\underline{M}}_O^\alpha$ donnés par :

$$(53) \quad \underline{\underline{F}}^\alpha = \int_{\Omega'_t} (\rho_a^\alpha \underline{\underline{F}}^\alpha + \epsilon^\alpha \underline{\underline{a}}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{\underline{T}}^\alpha dS_t$$

$$(54) \quad \underline{\underline{M}}_O^\alpha = \int_{\Omega'_t} \underline{\underline{OM}} \wedge (\rho_a^\alpha \underline{\underline{F}}^\alpha + \epsilon^\alpha \underline{\underline{a}}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{\underline{OM}} \wedge \underline{\underline{T}}^\alpha dS_t$$

Les éléments de réduction de la dérivée du torseur des quantités de mouvement sont donnés par :

$$(55) \quad \underline{\underline{F}}^\alpha = \int_{\Omega'_t} \rho_a^\alpha \underline{\underline{\gamma}}^\alpha d\Omega_t$$

$$(56) \quad \underline{\underline{M}}_O^\alpha = \int_{\Omega'_t} \underline{\underline{OM}} \wedge \rho_a^\alpha \underline{\underline{\gamma}}^\alpha d\Omega_t$$

Ecrivant l'égalité des résultantes (53) et (55), on obtient :

$$(57) \quad \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}^\alpha dS_t = \int_{\Omega_t} -(\rho_a^\alpha (\underline{F}^\alpha - \underline{\gamma}^\alpha) + \varepsilon^\alpha \underline{a}) d\Omega_t$$

L'application du lemme du tétraèdre montre l'existence d'un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^\alpha$ vérifiant la relation suivante :

$$(58) \quad \underline{T}^\alpha(\underline{x}, t, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}^\alpha(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$$

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^\alpha$ est appelé tenseur des contraintes partielles dans le milieu continu α . L'application du théorème de la divergence à (57) donne finalement la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement de la phase α :

$$(59) \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^\alpha + \rho_a^\alpha (\underline{F}^\alpha - \underline{\gamma}^\alpha) + \varepsilon^\alpha \underline{a} = 0$$

L'égalité des moments (54) et (56) permet encore d'établir la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^\alpha$.

On notera que d'après (52), (49) et (58), le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est la somme des tenseurs des contraintes partielles $\underline{\underline{\sigma}}^s$ et $\underline{\underline{\sigma}}^f$ (on vérifiera sans peine que la somme des équations (59) écrites pour chacun des milieux continus squelette et fluide redonne l'expression (51)).

III. THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS OUVERTS.

Les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne déterminent pas entièrement à eux seuls un problème de mécanique des milieux continus (mono- ou multiphasiques) : il manque un certain nombre d'équations pour déterminer tous les champs inconnus. Les relations manquantes n'ont pas le même caractère général que les précédentes et dépendent du milieu considéré : ce sont les "relations constitutives" du milieu.

D'autre part, nous n'avons pas encore exploité toute l'information disponible sur la physique du système : il reste à écrire les principes de la thermodynamique. L'étude de la thermodynamique du milieu poreux ne permet pas de déterminer complètement les relations constitutives manquantes, mais fournit une condition nécessaire qu'elles doivent respecter : l'inégalité de Clausius-Duhem, généralisée aux milieux poreux par Coussy (1989).

Comme toute la construction du modèle, l'étude de la thermodynamique du milieu poreux est menée à l'échelle macroscopique. On s'intéresse ici à l'évolution du système constitué par l'ensemble de la matière (squelette et fluide) contenu dans un domaine géométrique que l'on suit *dans le mouvement du squelette*. Ce système matériel est un système ouvert, qui peut échanger de la masse fluide avec l'extérieur : ce point de vue conduit en pratique à exprimer les dérivées matérielles en fonction de dérivées particulières en suivant le squelette et du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette.

III.1. FORMULATION DES PREMIER ET SECOND PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE.

III.1.1. Premier principe de la thermodynamique.

Par définition, l'énergie E d'un système matériel Ω_t est la somme de son énergie cinétique K et de son énergie interne E :

$$(60) \quad E = K + E = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} (\rho_a^s \underline{u}^s{}^2 + \rho_a^f \underline{u}^f{}^2) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} (\rho_a^s e_m^s + \rho_a^f e_m^f) d\Omega_t$$

où e_m^s et e_m^f désignent les densités massiques d'énergie interne du squelette et du fluide respectivement. Le premier principe de la thermodynamique stipule que la dérivée matérielle de l'énergie E d'un système matériel est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs W^e et du taux de chaleur reçue par le système Q^o :

$$(61) \quad \frac{dK}{dt} + \frac{dE}{dt} = W^e + Q^o$$

Il est facile d'établir que la dérivée matérielle de l'énergie cinétique K est donnée par :

$$(62) \quad \frac{dK}{dt} = \int_{\Omega_t} (\rho_a^s \gamma^s + \rho_a^f \gamma^f) \cdot \underline{u}^s d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \rho_a^f \gamma^f \cdot \underline{u}^r d\Omega_t$$

On rappelle que \underline{u}^r désigne la vitesse relative du fluide par rapport au squelette $\underline{u}^r = \underline{u}^f - \underline{u}^s$.

La dérivée matérielle de l'énergie interne E est égale à :

$$(63) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d^s}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho_a^s e_m^s d\Omega_t \right] + \frac{d^f}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho_a^f e_m^f d\Omega_t \right]$$

Utilisant les formules de dérivation particulière d'intégrales de densités volumiques (23) pour la densité volumique $b = \rho_a^f e_m^f$, on établit sans peine que :

$$(64) \quad \frac{d^f}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho_a^f e_m^f d\Omega_t \right] = \frac{d^s}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho_a^f e_m^f d\Omega_t \right] + \int_{\Omega_t} \text{div} (e_m^f \underline{w}) d\Omega_t$$

On en déduit que la dérivée matérielle de l'énergie interne E peut s'écrire :

$$(65) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d^s}{dt} \left[\int_{\Omega_t} e d\Omega_t \right] + \int_{\Omega_t} \text{div} (e_m^f \underline{w}) d\Omega_t$$

où l'on a noté $e = (\rho_a^s e_m^s + \rho_a^f e_m^f)$ la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux.

Utilisant à nouveau (23), on obtient finalement l'expression suivante de la dérivée matérielle de l'énergie interne E :

$$(66) \quad \frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e \underline{u}^s) \right] d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \text{div} (e_m^f \underline{w}) d\Omega_t$$

La puissance des efforts extérieurs W^e s'écrit :

$$(67) \quad W^e = \int_{\Omega_t} (\rho_a^s \underline{F}^s \cdot \underline{u}^s + \rho_a^f \underline{F}^f \cdot \underline{u}^f) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{T}^s \cdot \underline{u}^s + \underline{T}^f \cdot \underline{u}^f) dS_t$$

ou encore :

$$(68) \quad W^e = \int_{\Omega_t} (\rho_a^s \underline{F}^s + \rho_a^f \underline{F}^f) \cdot \underline{u}^s d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{T}^s + \underline{T}^f) \cdot \underline{u}^s dS_t \\ + \int_{\Omega_t} \rho_a^f \underline{F}^f \cdot \underline{u}^r d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}^f \cdot \underline{u}^r dS_t$$

Appliquant le théorème de la divergence, on obtient finalement :

$$(69) \quad W^e = \int_{\Omega_t} [(\rho_a^s \underline{F}^s + \rho_a^f \underline{F}^f) \cdot \underline{u}^s + \text{div}(\underline{\sigma} \cdot \underline{u}^s)] d\Omega_t + \int_{\Omega_t} [\rho_a^f \underline{F}^f \cdot \underline{u}^r + \text{div}(\underline{\sigma}^f \cdot \underline{u}^r)] d\Omega_t$$

On précise enfin l'expression du taux de chaleur reçue par le système Q^o : faisant l'hypothèse que la chaleur reçue est due à des effets de contact à travers la frontière et éventuellement à des sources de chaleur extérieures au système et réparties dans le volume, on écrit :

$$(70) \quad Q^o = \int_{\Omega_t} R d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} -\underline{q} \cdot \underline{n} dS_t$$

où l'on a fait implicitement l'hypothèse que la chaleur reçue par contact peut être représentée par un champ de vecteur flux de chaleur \underline{q} . Le théorème de la divergence permet d'écrire encore :

$$(71) \quad Q^o = \int_{\Omega_t} (R - \text{div} \underline{q}) d\Omega_t$$

On déduit donc de l'énoncé du premier principe de la thermodynamique (61) l'égalité suivante :

$$(72) \quad \int_{\Omega_t} \left[(\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho_a^s (\underline{F}^s - \underline{\gamma}^s) + \rho_a^f (\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f)) \cdot \underline{u}^s + (\underline{\text{div}} \underline{\sigma}^f + \rho_a^f (\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f)) \cdot \underline{u}^r \right] d\Omega_t \\ + \int_{\Omega_t} \left[\underline{\sigma} : \underline{d} + \underline{\sigma}^f : \underline{\text{grad}} \underline{u}^r - \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e \underline{u}^s) + \text{div} (e_m^f \underline{w}) \right] + R - \text{div} \underline{q} \right] d\Omega_t = 0$$

où \underline{d} désigne le taux de déformation eulérien du squelette, c'est-à-dire la partie symétrique du gradient des vitesses du squelette : $\underline{d} = 1/2 (\underline{\text{grad}} \underline{u}^s + (\underline{\text{grad}} \underline{u}^s)^T)$. En vertu des expressions (51)

et (59), on obtient finalement sous forme locale l'expression du premier principe de la thermodynamique :

$$(73) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{u}}^r + \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}}^r - \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (e_m^f \underline{\underline{w}}) \right] + R - \text{div} \underline{\underline{q}} = 0$$

Cette expression fait intervenir le mouvement relatif du fluide par rapport au squelette, la force d'interaction entre les deux milieux continus et les contraintes partielles dans le milieu continu fluide.

III 1. 2. Second principe de la thermodynamique.

Le second principe définit une grandeur intensive positive appelée température absolue et notée T , et postule l'existence d'une fonction thermodynamique extensive S appelée entropie, telle que la dérivée matérielle de l'entropie d'un sous-système quelconque Ω' du système matériel considéré est supérieure ou égale au taux d'entropie fourni par l'extérieur à Ω' :

$$(74) \quad \frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega'_t} \frac{R}{T} d\Omega'_t + \int_{\partial\Omega'_t} -\frac{\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{n}}}{T} dS_t$$

l'égalité ayant lieu lorsque les évolutions du milieu sont réversibles.

On supposera désormais que la température en un point donné est la même dans les deux milieux continus représentant le milieu poreux. On note s_m^s et s_m^f les densités massiques d'entropie du squelette et du fluide respectivement, et $s = \rho_a^s s_m^s + \rho_a^f s_m^f$ la densité volumique d'entropie du milieu poreux. La dérivée matérielle de la quantité S d'entropie contenue dans le domaine géométrique Ω_t se calcule comme celle de l'énergie interne E (cf.(66)) :

$$(75) \quad \frac{dS}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} (s \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (s_m^f \underline{\underline{w}}) \right] d\Omega_t$$

Utilisant le théorème de la divergence, on montre que le second principe s'exprime finalement de la façon suivante :

$$(76) \quad \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} (s \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (s_m^f \underline{\underline{w}}) - \frac{R}{T} + \text{div} \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \right] d\Omega_t \geq 0$$

ou encore, sous forme locale :

$$(77) \quad T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} (s \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (s_m^f \underline{\underline{w}}) \right] - R + \text{div} \underline{\underline{q}} - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0$$

III 2. INEGALITE DE CLAUSIUS-DUHEM.

III 2. 1. Formulation eulérienne de l'inégalité fondamentale.

Combinant (73) et (77), on obtient l'inégalité suivante :

$$(78) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{u}}^r + \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}}^r \\ + T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} (s \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (s_m^f \underline{\underline{w}}) \right] - \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e \underline{\underline{u}}^s) + \text{div} (e_m^f \underline{\underline{w}}) \right] - \frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0$$

Il est habituel d'introduire l'énergie libre volumique ψ du milieu poreux, définie par :

$$(79) \quad \psi = e - T s$$

On montre alors en calculant $\frac{d^s \psi}{dt}$ que l'on a :

$$(80) \quad T \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(s \underline{\underline{u}}^s) - \frac{\partial e}{\partial t} - T \text{div}(e \underline{\underline{u}}^s) = -s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div} \underline{\underline{u}}^s$$

et l'inégalité (78) devient :

$$(81) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div} \underline{\underline{u}}^s + \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{u}}^r + \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}}^r \\ + T \text{div}(s_m^f \underline{\underline{w}}) - \text{div}(e_m^f \underline{\underline{w}}) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0$$

L'étape suivante consiste à adopter pour le tenseur des contraintes partielles dans le fluide l'expression suivante :

$$(82) \quad \underline{\underline{\sigma}}^f = -p \phi \underline{\underline{1}}$$

où ϕ désigne la porosité du milieu et p la "pression" du milieu continu fluide, qui "représente" à l'échelle macroscopique la pression qui règne dans le fluide saturant à l'échelle microscopique. On désigne par g_m^f l'enthalpie libre spécifique du fluide définie par :

$$(83) \quad g_m^f = e_m^f + \frac{p}{\rho^f} - T s_m^f$$

et l'on admet que l'on a les relations suivantes :

$$(84) \quad \frac{\partial g_m^f}{\partial p} = \frac{1}{\rho^f}$$

$$(85) \quad \frac{\partial g_m^f}{\partial T} = -s_m^f$$

qui sont formellement analogues à celles du fluide qui à l'échelle microscopique sature le réseau poreux, et que le milieu continu fluide représente à l'échelle macroscopique. Autrement dit, on admet que l'enthalpie libre du fluide à l'échelle macroscopique g_m^f ne dépend que de la température et d'une grandeur notée p et appelée pression, qui apparaît à la fois comme une

grandeur mécanique dans (82) et comme une variable thermodynamique du milieu continu fluide dans (84).

Le lecteur trouvera une discussion du double statut de la pression dans Coussy (1991) et une interprétation reliant les contraintes partielles dans le fluide $\underline{\underline{\sigma}}^f$ à la valeur moyenne de la pression du fluide saturant à l'échelle microscopique dans Dormieux et Coussy (1994). Une justification complète du lien entre la pression p et la pression du fluide saturant à l'échelle microscopique et des relations (84) et (85) nécessiterait de procéder à un changement d'échelle entre les niveaux microscopique (où les phases solides et fluides sont géométriquement distinctes) et macroscopique (où l'espace géométrique est occupé par deux milieux continus superposés) en utilisant des techniques d'homogénéisation (cf. par exemple Gilbert (1987a,1987b)).

On déduit de (59) et (82) l'expression de la force d'interaction entre les milieux continus :

$$(86) \quad \underline{\underline{a}} = - \underline{\underline{\text{grad}}}(p \phi) + \rho_a^f (\underline{\underline{F}}^f - \gamma^f)$$

Portant (82) et (86) dans (81), on obtient :

$$(87) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div } \underline{\underline{u}}^s - p \text{div } (\underline{\underline{w}}/\rho^f) - \frac{\underline{\underline{w}}}{\rho^f} \cdot (\underline{\underline{\text{grad}}} p - \rho^f (\underline{\underline{F}}^f - \gamma^f)) \\ + T \text{div } (s_m^f \underline{\underline{w}}) - \text{div } (e_m^f \underline{\underline{w}}) - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0$$

On montre ensuite à l'aide de (84) et (85) l'identité suivante :

$$(88) \quad - p \text{div } (\underline{\underline{w}}/\rho^f) + T \text{div } (s_m^f \underline{\underline{w}}) - \text{div } (e_m^f \underline{\underline{w}}) = - g_m^f \text{div } \underline{\underline{w}}$$

L'inégalité (87) prend finalement la forme suivante :

$$(89) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - g_m^f \text{div } \underline{\underline{w}} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div } \underline{\underline{u}}^s - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T - \frac{\underline{\underline{w}}}{\rho^f} \cdot (\underline{\underline{\text{grad}}} p - \rho^f (\underline{\underline{F}}^f - \gamma^f)) \geq 0$$

Cette expression constitue l'inégalité de Clausius-Duhem généralisée aux milieux poreux.

III.2.2. Identification des dissipations.

Le membre de gauche de l'inégalité (89), que l'on désigne dans la suite par ϕ , représente la dissipation par unité de volume à l'instant t . Il est habituel de le décomposer en trois termes :

$$(90) \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \geq 0$$

avec :

$$(91) \quad \phi_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - g_m^f \text{div } \underline{\underline{w}} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div } \underline{\underline{u}}^s$$

$$(92) \quad \varphi_2 = -\frac{q}{T} \cdot \underline{\text{grad}} T$$

$$(93) \quad \varphi_3 = \frac{w}{\rho^f} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f (\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f))$$

La dissipation φ_1 porte le nom de dissipation intrinsèque volumique. Les dissipations φ_2 et φ_3 sont respectivement la dissipation thermique associée au transport de chaleur et la dissipation due au transport de la masse fluide à travers le milieu poreux.

III.2.2.a. Non-négativité de la dissipation intrinsèque. Ecriture lagrangienne.

Un raisonnement fondé sur le postulat de l'état local (reproduit en annexe) permet de montrer que la valeur de $\varphi_1 d\Omega_t$ ne dépend pas des systèmes élémentaires voisins du volume élémentaire $d\Omega_t$ et que la dissipation intrinsèque est nécessairement non-négative (cf. Coussy (1991)) :

$$(94) \quad \varphi_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - g_m^f \text{div } \underline{w} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div } \underline{u}^s \geq 0$$

Dans la suite, on s'intéresse au système ouvert constitué par l'ensemble d'une particule de squelette donnée que l'on suit dans son mouvement et de la particule de fluide qui occupe le même volume qu'elle à l'instant t . On cherche donc à remplacer les grandeurs eulériennes $\underline{\underline{d}}$, \underline{w} et $\text{div } \underline{u}^s$ par les dérivées particulières en suivant le squelette de grandeurs bien choisies. C'est à ce stade que l'introduction de la description lagrangienne du mouvement du squelette révèle son intérêt.

On définit tout d'abord la densité volumique lagrangienne de dissipation intrinsèque \mathcal{D} dans le milieu poreux par l'égalité $\mathcal{D} d\Omega_o = \varphi_1 d\Omega_t$:

$$(95) \quad \mathcal{D} = J \left[\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - g_m^f \text{div } \underline{w} - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \text{div } \underline{u}^s \right] \geq 0$$

On rappelle que $\psi d\Omega_t$ désigne la quantité d'énergie libre contenue dans toute la matière se trouvant dans le domaine géométrique $d\Omega_t$. On rapporte cette énergie au volume $d\Omega_o$ occupé dans la configuration de référence par la particule de squelette située à l'instant t dans $d\Omega_t$, en introduisant la densité volumique lagrangienne d'énergie libre du milieu poreux Ψ :

$$(96) \quad \Psi d\Omega_o = \psi d\Omega_t$$

On montre aisément que :

$$(97) \quad \frac{d^s \Psi}{dt} = J \left(\frac{d^s \psi}{dt} + \psi \text{div } \underline{u}^s \right)$$

D'autre part, on introduit le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui est le représentant lagrangien du tenseur des contraintes de Cauchy défini par :

$$(98) \quad \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\Phi(\underline{X}, t), t) \cdot (\underline{\underline{F}}^T)^{-1}(\underline{X}, t)$$

Il résulte immédiatement de cette définition que le tenseur $\underline{\underline{\pi}}$ est un tenseur symétrique. On montre alors sans peine au moyen de (11) et de la définition de $\underline{\underline{d}}$ l'identité suivante :

$$(99) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{\pi}} : \frac{d^s \underline{\underline{\Delta}}}{dt}$$

où $\frac{d^s \underline{\underline{\Delta}}}{dt}$ désigne la dérivée particulière du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}$ défini par la formule habituelle :

$$(100) \quad \underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}})$$

On déduit finalement de (95), (97), (99) et (40) l'expression lagrangienne de la non-négativité de la dissipation intrinsèque :

$$(101) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\pi}} : \frac{d^s \underline{\underline{\Delta}}}{dt} + g_m^f \frac{d^s m}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - S \frac{d^s T}{dt} \geq 0$$

où S désigne la densité volumique lagrangienne d'entropie dans le milieu poreux définie par $S d\Omega_0 = s d\Omega_t$. L'inégalité (101) constitue le point de départ de l'approche macroscopique du comportement du milieu poreux développée dans la suite. L'expression de la densité volumique lagrangienne de dissipation intrinsèque dans un milieu poreux se caractérise par la présence du terme $g_m^f \frac{d^s m}{dt}$, absent dans le cas d'un milieu monophasique, qui représente la puissance apportée au système (ouvert) considéré du fait du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette.

III. 2. 2. b. Lois de conduction de la chaleur et de la masse fluide.

Contrairement à φ_1 , il n'y a pas d'argument théorique général permettant de conclure que chacune des dissipations φ_2 et φ_3 , considérée isolément, est positive. On fera néanmoins ici l'hypothèse de découplage des dissipations suivante :

$$(102) \quad \varphi_3 \geq 0 \text{ et } \varphi_2 \geq 0$$

Le lecteur pourra se reporter à (Coussy, 1991) pour une discussion plus précise de la signification physique des dissipations φ_2 et φ_3 et de l'hypothèse de découplage que nous adoptons ici.

En pratique, on assure la non-négativité de la dissipation thermique en adoptant la loi de conduction linéaire suivante (loi de Fourier) :

$$(103) \quad \underline{\underline{q}} = -\underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T$$

où le tenseur $\underline{\kappa}$, appelé tenseur de conductivité thermique du milieu (dans la configuration actuelle), est un tenseur symétrique défini positif. Dans toute la suite de ce mémoire, nous nous limitons aux évolutions du milieu poreux dans lesquelles la température est homogène et constante dans le milieu poreux : il ne sera donc plus question de conduction de la chaleur.

De manière analogue, on assure la non-négativité de la dissipation liée à la conduction de la masse fluide en adoptant la loi de conduction linéaire suivante (loi de Darcy) :

$$(104) \quad \frac{\underline{w}}{\rho^f} = \underline{\kappa} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f (\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f))$$

où $\underline{\kappa}$ est un tenseur symétrique défini positif, qui représente la perméabilité du milieu dans la configuration actuelle. Dans le cas, fréquent en pratique, où l'on se place dans le cadre de l'approximation quasistatique (c'est-à-dire que l'on néglige l'accélération du fluide), où les forces de volumes agissant sur le fluide se limitent à la pesanteur $-g \underline{e}_z$ et où les variations de la masse volumique du fluide ρ^f peuvent être négligées, l'expression précédente devient :

$$(105) \quad \frac{\underline{w}}{\rho^f} = -\underline{\kappa} \cdot \underline{\text{grad}} h$$

où h est la charge hydraulique définie par :

$$(106) \quad h = p + \rho^f g z$$

On a en général recours à une approche phénoménologique (voir chapitre 3, §I.1.4) pour préciser les variables dont le tenseur de perméabilité dépend et la forme de cette dépendance. Il dépend évidemment de la géométrie du réseau poreux à l'échelle microscopique.

Une partie importante des développements ultérieurs est consacrée à la recherche de relations de comportement qui respectent l'inégalité de non-négativité de la dissipation intrinsèque : on s'intéressera particulièrement aux cas de la poroélasticité (chapitre 2) et de la poroélastoplasticité (chapitre 4). On présente maintenant la formulation générale d'un problème de mécanique des milieux poreux. Il s'agit essentiellement d'adjoindre aux équations de champ déjà introduites une représentation convenable des conditions aux limites.

IV. STRUCTURE D'UN PROBLEME DE MECANIQUE DES MILIEUX POREUX.

On présente maintenant la structure générale d'un problème de mécanique des milieux poreux : elle est constituée des équations de champ présentées dans ce qui précède, des conditions aux limites et de la condition initiale prescrites.

IV. 1. EQUATIONS DE CHAMP.

Il s'agit d'une part des équations de conservation :

- l'équation de conservation de la masse de fluide, écrite sous la forme lagrangienne par rapport au squelette (41) ou sous la forme eulérienne (33)-(34);

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement (51) ;

et d'autre part des relations constitutives du milieu considéré, c'est-à-dire :

- la loi de conduction de la masse fluide (on adoptera la loi de Darcy (104) ; il s'agit comme (51) d'une équation mettant en jeu un gradient eulérien) ;

- la loi de comportement, dont la forme reste à préciser.

On rappelle pour mémoire que $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{M}}$ sont les représentants lagrangiens respectivement du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et du vecteur courant relatif de masse fluide $\underline{\underline{w}}$ définis à partir de ces derniers et de la transformation du squelette par les formules de transport (98) et (15).

IV. 2. CONDITIONS AUX LIMITES.

IV. 2. 1. Conditions aux limites mécaniques.

Comme pour un problème de mécanique des milieux continus classiques, on introduit trois partitions de la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine géométrique Ω_t occupé par le squelette à l'instant t :

$$(107) \quad \partial\Omega_t = S^{T_i} \cup S^{\xi_i} \quad (\text{avec } S^{T_i} \cap S^{\xi_i} = \emptyset) \quad i=1,2,3$$

S^{T_i} désigne la partie de $\partial\Omega_t$ où la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte est imposée :

$$(108) \quad (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{e}}_i = T_i^d$$

S^{ξ} désigne la partie de $\partial\Omega_t$ où la $i^{\text{ème}}$ composante du déplacement du squelette par rapport à la configuration de référence est imposée :

$$(109) \quad \xi \cdot \underline{e}_i = \xi_i^d$$

IV.2.2. Conditions aux limites hydrauliques.

On introduit une partition supplémentaire de $\partial\Omega_t$:

$$(110) \quad \partial\Omega_t = S^W \cup S^P \quad (\text{avec } S^W \cap S^P = \emptyset)$$

S^W désigne la partie de $\partial\Omega_t$ où le flux de masse fluide est imposé :

$$(111) \quad \underline{w} \cdot \underline{n} = w^d$$

S^P désigne la partie de $\partial\Omega_t$ où la pression du fluide est imposée :

$$(112) \quad p = p^d$$

Dans la plupart des cas pratiques, les surfaces S^{T_i} , S^{ξ} , S^W et S^P sont des surfaces matérielles attachées au squelette¹. Toutefois, les valeurs de w^d , p^d , T_i^d , ξ_i^d au point homologue d'un point donné dans la transformation géométrique du squelette peuvent éventuellement dépendre du temps. Notons que les positions à l'instant t des surfaces S^{T_i} , S^{ξ} , S^W et S^P , qui suivent le mouvement du squelette, sont a priori des inconnues du problème.

IV.3. SITUATION INITIALE.

On rappelle pour mémoire que la position du problème n'est achevée que si la géométrie et la valeur de tous les champs utiles sont précisées à l'instant initial, ce que l'on supposera dans la suite.

¹ Il arrive cependant que ce ne soit pas le cas, notamment lorsque le squelette du milieu poreux étudié n'est pas un système matériel indépendant du temps, comme dans le problème de la compaction des sédiments (que nous aborderons dans les chapitres 3 et 4).

V. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES COURANTES.

La présentation de la structure d'un problème de mécanique des milieux poreux fait apparaître un nombre important de champs inconnus, et une structure mathématique relativement complexe. Il est donc naturel de chercher à simplifier la formulation du problème. Comme pour les milieux monophasiques, il est habituel de définir un ensemble d'hypothèses dites "hypothèses de petites perturbations", qui permet dans certains contextes (par exemple en poroélasticité linéaire) d'obtenir la solution analytique complète de certains problèmes. Nous définissons avec soin les hypothèses qui constituent ce cadre, et le rôle qu'elles jouent dans la simplification de la formulation d'un problème de mécanique des milieux poreux (§V.1). D'autre part, en mécanique des milieux poreux, on introduit souvent (que l'on se trouve ou non dans le cadre des petites perturbations) des hypothèses concernant la compressibilité des constituants du milieu poreux à l'échelle microscopique pour procéder à certaines simplifications (§V.2).

V.1. LES HYPOTHESES DE PETITES PERTURBATIONS.

Les hypothèses de petites perturbations sont des hypothèses mathématiques auxquelles on associe certaines approximations. Elles constituent un cadre commode pour simplifier la formulation du problème.

V.1.1. Transformation du squelette infinitésimale.

On dit que la transformation géométrique du squelette est infinitésimale si :

$$(113) \quad |\underline{\underline{\text{Grad } \underline{\xi}}}| \ll 1$$

ou encore :

$$(114) \quad |\underline{\underline{\underline{F}}} - \underline{\underline{\underline{1}}}| \ll 1$$

Cette hypothèse est vérifiée lorsque la rotation et la déformation pure de la décomposition polaire de $\underline{\underline{\underline{F}}}$ sont simultanément proches du tenseur unité $\underline{\underline{\underline{1}}}$. En pratique, lorsque la transformation du squelette est infinitésimale, deux sortes de simplifications sont possibles :

- d'une part on peut linéariser les grandeurs intervenant dans la description de la cinématique du squelette : ainsi, on peut linéariser le tenseur des déformations de Green-Lagrange défini par (100) :

$$(115) \quad \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cong \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\text{Grad } \underline{\xi}}} + (\underline{\underline{\underline{\text{Grad } \underline{\xi}}})^T)$$

et au même ordre en $|\underline{\underline{\text{Grad } \xi}}|$:

$$(116) \quad J = \det \underline{\underline{F}} \cong 1 + \text{tr } \underline{\underline{\xi}}$$

Le même niveau d'approximation permet de simplifier les formules de transport et d'écrire au lieu de (15) et (98) les formules approchées suivantes :

$$(117) \quad \underline{\underline{w}} \cong \underline{\underline{M}} + (-\text{tr}(\underline{\underline{\text{Grad } \xi}}) \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{Grad } \xi}}) \cdot \underline{\underline{M}}$$

$$(118) \quad \underline{\underline{\sigma}} \cong \underline{\underline{\pi}} - \text{tr}(\underline{\underline{\text{Grad } \xi}}) \underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{\text{Grad } \xi}} \cdot \underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{\pi}} \cdot (\underline{\underline{\text{Grad } \xi}})^T$$

Ces approximations sont justifiées par le caractère infinitésimal de la transformation géométrique du squelette indépendamment de toute autre considération. On les désignera dans la suite par le terme générique de "linéarisations géométriques".

- d'autre part, lorsque la transformation du squelette est infinitésimale, il peut être légitime d'adopter un développement limité de certaines grandeurs physiques dépendant de $\underline{\underline{\text{Grad } \xi}}$ autour de $\underline{\underline{\text{Grad } \xi}} = \underline{\underline{0}}$. Considérons par exemple une fonction scalaire G (qu'on supposera aussi régulière que nécessaire) du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}$. L'hypothèse de transformation infinitésimale assure que la déformation est infinitésimale, c'est-à-dire que l'on a :

$$(119) \quad \underline{\underline{\Delta}} \ll \underline{\underline{1}}$$

Il est alors tentant de remplacer l'expression de $G(\underline{\underline{\Delta}})$ par un développement limité au voisinage de $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{0}}$:

$$(120) \quad G(\underline{\underline{\Delta}}) \cong G(\underline{\underline{0}}) + \underline{\underline{G'}}(\underline{\underline{0}}) : \underline{\underline{\Delta}}$$

où $\underline{\underline{G'}}$ désigne la différentielle de G , c'est-à-dire l'application linéaire associée au tenseur $\frac{\partial G}{\partial e_{ij}} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$. Les résultats généraux de l'analyse donnent la majoration suivante de la différence entre $G(\underline{\underline{\Delta}})$ et le développement au premier ordre figurant dans (120) :

$$(121) \quad |G(\underline{\underline{\Delta}}) - G(\underline{\underline{0}}) - \underline{\underline{G'}}(\underline{\underline{0}}) : \underline{\underline{\Delta}}| \leq \text{Sup} |\underline{\underline{G''}}| |\underline{\underline{\Delta}}|^2/2$$

où la notation $\text{Sup} |\underline{\underline{G''}}|$ désigne un majorant de la norme de la différentielle d'ordre 2 de G , notée $\underline{\underline{G''}}$, sur le domaine de variation considéré pour $\underline{\underline{\Delta}}$. Il est donc légitime de faire l'approximation (120) si les termes d'ordre supérieur sont négligeables devant le terme linéaire du développement de G , c'est-à-dire si l'on a :

$$(122) \quad \frac{1}{2} |\underline{\underline{\Delta}}| \text{Sup} |\underline{\underline{G''}}| \ll |\underline{\underline{G'}}(\underline{\underline{0}})|$$

Autrement dit, la validité de l'approximation (120) dépend non seulement du domaine de variation envisagé pour la variable $\underline{\underline{\Delta}}$, mais aussi de la fonction G considérée. Il s'agit donc d'une linéarisation d'une nature différente de celle des linéarisations géométriques présentées ci-dessus.

En pratique, les fonctions G concernées par ce genre de linéarisation sont en général les dérivées partielles de l'énergie libre, et les linéarisations correspondantes permettent de simplifier la formulation de la loi de comportement. On qualifiera ce type de linéarisations de "linéarisations physiques", dans la mesure où leur validité n'est pas assurée par une condition purement géométrique comme (113) ou (119), mais par une condition du type (122). En général, on ne dispose pas d'une expression analytique de G et de ses dérivées, et l'on invoque l'hypothèse de transformation géométrique infinitésimale sous la forme (113) pour justifier des linéarisations physiques du type (120). Il est alors nécessaire de s'assurer de la validité de ces approximations a posteriori.

La situation où les linéarisations géométriques sont acceptables sans que les linéarisations physiques associées à l'hypothèse de transformation infinitésimale le soient est courante : c'est le cas par exemple en élasticité infinitésimale non linéaire.

V.1.2. Petits déplacements du squelette.

L'hypothèse des petits déplacements du squelette a pour but d'assurer que l'on peut confondre, dans la position du problème, la géométrie actuelle du squelette avec sa géométrie initiale. On écrira donc toutes les équations (équations de champ et conditions aux limites) sur une configuration fixe, et l'on confondra les coordonnées \underline{X} et \underline{x} . Pour que cette approximation soit valide, il est nécessaire que les déplacements des particules de squelette demeurent négligeables devant les dimensions du domaine étudié, ce qui s'écrit :

$$(123) \quad |\underline{\xi}| \ll L_0$$

où L_0 est une longueur caractéristique du système étudié. Du point de vue strictement mathématique, les hypothèses de petits déplacements du squelette et de transformation infinitésimale sont indépendantes : l'une fait référence à la taille de la structure étudiée tandis que l'autre est une hypothèse locale, et aucune des deux n'entraîne l'autre. En pratique, elles sont cependant généralement faites simultanément.

V.1.3. Apport de masse fluide infinitésimal.

L'hypothèse des apports de masse fluide infinitésimaux s'écrit :

$$(124) \quad \frac{m}{\rho_0^f} \ll 1$$

où ρ_0^f désigne la masse volumique vraie du fluide dans la configuration de référence. Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on peut linéariser les fonctions de la variable m , de la même façon que l'on linéarise les fonctions de $\underline{\Delta}$ dans le cadre de l'hypothèse de la transformation

infinitésimale. La même remarque qu'en § V.1.1 demeure valable : la validité de la linéarisation dépend des variations de la fonction de m que l'on considère, et n'est donc pas strictement assurée par la seule condition (124).

La même hypothèse est aussi utilisée pour négliger m devant la masse volumique moyenne du milieu poreux dans la configuration de référence.

V.1.4. Variations infinitésimales de la pression du fluide.

On rappelle que l'enthalpie libre spécifique du fluide g_m^f et sa masse volumique vraie ρ^f (cf. (84)) sont des fonctions de sa pression p . On définit le module de compression du fluide $K_f(p)$ par :

$$(125) \quad K_f(p) = - \frac{dg_m^f/dp}{d^2g_m^f/dp^2}$$

On déduit alors de (84) la relation suivante entre les variations de la masse volumique vraie du fluide et la pression p :

$$(126) \quad \frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{K_f(p)}$$

L'hypothèse de variation infinitésimale de la pression du fluide est employée pour linéariser l'équation d'état (84). Si la pression demeure voisine d'une valeur de référence notée p_o , on fait l'approximation :

$$(127) \quad g_m^f \cong g_m^f(p_o) + (p-p_o)/\rho_o^f$$

Un raisonnement de même nature que celui présenté en V.2.1 fournit une condition suffisante pour que cette approximation soit acceptable :

$$(128) \quad |(p-p_o)/2 \frac{d^2g_m^f}{dp^2}| \ll \frac{1}{\rho_o^f}$$

Il est donc légitime de linéariser la relation entre g_m^f et p si la variation de pression demeure faible comparée au module de compression. Si l'on fait l'hypothèse que le fluide est incompressible, la valeur de ρ^f est constante, et le module de compressibilité K_f est infini. L'expression (127) est alors valable quelle que soit la valeur de l'écart de pression $p-p_o$.

On associe aussi à l'hypothèse des petites variations de la pression du fluide l'approximation consistant à remplacer l'expression (126) par l'expression approchée suivante :

$$(129) \quad \rho^f \cong \rho_o^f + (p-p_o)/K_f(p_o)$$

On ne précisera pas l'expression mathématique de la condition de validité de cette approximation (elle ferait intervenir les variations de K_f vis-à-vis de p , donc la dérivée troisième de $g_m^f(p)$).

V.2. INCOMPRESSIBILITE DES CONSTITUANTS.

On présente ici deux hypothèses physiques qui ne constituent pas un cadre de travail comparable au cadre des petites perturbations, mais permettent de simplifier la formulation des problèmes : il s'agit des hypothèses d'incompressibilité du solide constituant le réseau poreux et du fluide saturant.

Dans les domaines d'application envisagés dans ce travail (comme la géotechnique ou la géophysique), elles constituent en général des approximations raisonnables. Des mesures dues à Hedberg (1936) par exemple, montrent que la masse volumique du solide constituant le squelette est quasiment indépendante du point considéré dans une couche de sédiments de plusieurs kilomètres d'épaisseur, bien que la contrainte verticale subie par le milieu poreux atteigne des valeurs très élevées. On pourra négliger aussi les variations de masse volumique de l'eau : dans un massif poreux d'épaisseur $H=10\text{km}$ où la pression est hydrostatique, la valeur maximum de la pression du fluide est donnée par $\rho^f g H = 100 \text{ MPa}$. Le module de compression de l'eau étant de l'ordre de 2GPa , l'écart relatif entre les valeurs de la masse volumique de l'eau entre les surfaces supérieure et inférieure du massif est donc de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2}$, ce qui peut demeurer acceptable selon le problème à résoudre et les incertitudes sur les paramètres du modèle. Les hypothèses d'incompressibilité des constituants peuvent cependant être prises en défaut dans d'autres domaines d'application, lorsque le fluide saturant est un gaz ou en biomécanique par exemple.

V.2.1. Incompressibilité du fluide.

On rappelle que l'on a défini la masse volumique vraie du fluide ρ^f , comme le rapport de la masse de fluide contenue dans un domaine géométrique $d\Omega_t$ au volume $\phi |d\Omega_t|$ effectivement occupé par le fluide à l'échelle microscopique, les masses volumiques vraie et apparente étant reliées par (1).

L'hypothèse d'incompressibilité du fluide concerne le fluide saturant le réseau poreux à l'échelle microscopique, et consiste à écrire que la masse volumique vraie du fluide ρ^f prend la même valeur en tout point \underline{x} à tout instant. La masse volumique apparente du fluide ρ_a^f est en revanche variable comme la porosité ϕ .

V. 2. 2. Incompressibilité du solide.

La masse volumique "vraie" du solide ρ^s est définie comme le rapport de la masse de solide (ou de squelette) contenue dans un domaine géométrique $d\Omega_t$ au volume $(1-\phi) |d\Omega_t|$ effectivement occupé par le solide à l'échelle microscopique, les masses volumiques vraie et apparente étant reliées par la relation (2). L'hypothèse d'incompressibilité du solide consiste à considérer que la dérivée particulaire en suivant le squelette de la masse volumique vraie ρ^s est nulle.

Si le solide constituant le squelette est incompressible, la conservation de la masse du solide contenue dans un volume élémentaire $d\Omega$ que l'on suit dans le mouvement du squelette se traduit par la conservation du volume effectivement occupé par le solide à l'échelle microscopique :

$$(130) \quad J(1 - \phi) = (1 - \phi_0)$$

Pour un solide incompressible, toute variation du volume occupé globalement par le milieu poreux est donc liée à une variation de la porosité. Il est clair que l'incompressibilité du solide exprimée par la condition (130) est à distinguer de l'éventuelle incompressibilité du milieu continu squelette, qui se traduirait par la condition $J=1$.

V. 2. 3. Expression de m lorsque les deux constituants sont incompressibles.

Lorsque le fluide est incompressible, l'expression (39) de l'apport de masse fluide devient :

$$(131) \quad m = \rho^f (J\phi - \phi_0)$$

Si de plus le solide est incompressible, on obtient en combinant (130) et (131) :

$$(132) \quad m = \rho^f (J - 1)$$

Lorsque les deux constituants sont incompressibles, les variables J et m ne peuvent donc pas être considérées comme indépendantes. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

CONCLUSION

Ce chapitre présente une synthèse des principaux éléments de la modélisation mécanique des milieux poreux : cette présentation est largement orientée par les problématiques abordées dans les chapitres suivants.

On s'intéresse dans la suite au cas où la transformation géométrique et les déplacements du squelette ne sont pas infinitésimaux. Dans cette perspective, on a porté une attention particulière à la définition d'une terminologie et de notations qui permettent de surmonter les difficultés techniques spécifiques à ce type de problème. D'autre part, après avoir présenté la structure générale d'un problème aux limites en mécanique des milieux poreux, on a rappelé les approximations auxquelles on procède dans le cadre des hypothèses de petites perturbations, et qu'il faudra abandonner en transformation finie.

Il reste pour obtenir une modélisation complète à préciser les relations de comportement. On choisit dans la suite d'aborder cette question à l'échelle macroscopique à partir de la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque. Cette condition n'est évidemment pas suffisante pour déterminer la loi de comportement : il faudra pour l'exploiter faire des hypothèses supplémentaires sur les phénomènes de déformation du milieu, comme on le fait pour les milieux monophasiques. Le chapitre suivant est consacré à la formulation du comportement dans le cas le plus simple : celui du milieu poreux élastique.

CHAPITRE 2

ETUDE DU COMPORTEMENT POROELASTIQUE

INTRODUCTION

Nous abordons maintenant la question de la formulation de la loi de comportement, laissée en suspens au chapitre précédent. Comme pour les milieux monophasiques, plusieurs approches sont possibles : on peut par exemple revenir à la structure géométrique du réseau poreux à l'échelle microscopique, et chercher à déduire le comportement macroscopique du milieu des propriétés de ses constituants. Une autre démarche possible consiste à exploiter la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque tirée de l'étude de la thermodynamique du milieu à l'échelle macroscopique. C'est cette approche que nous choisissons de mettre en œuvre ici.

Ce chapitre est consacré au cas particulier du comportement poroélastique, c'est-à-dire à la situation dans laquelle la dissipation intrinsèque est nulle dans toute évolution : aucune dissipation d'énergie n'est associée à la déformation d'une particule de squelette ou à un apport de fluide dans le volume qu'elle occupe. Toute éventuelle dissipation d'énergie est alors liée aux phénomènes de conduction.

I. EQUATIONS D'ETAT DU MILIEU POREUX EN TRANSFORMATION FINIE.

On rappelle que l'on ne considère que les évolutions isothermes du milieu poreux. La non-négativité de la dissipation intrinsèque $(101)_1$ peut donc s'écrire :

$$(1) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}} + g_m \dot{m} - \dot{\Psi} \geq 0$$

où l'on a adopté les conventions suivantes pour alléger les notations :

- d'une part, la dérivée particulière en suivant le squelette d'une grandeur lagrangienne b ($\underline{\underline{\Delta}}$, m ou Ψ par exemple) est notée désormais avec un point :

$$(2) \quad \dot{b} \equiv \frac{d^s b}{dt}$$

- d'autre part, on désigne désormais par g_m l'enthalpie libre spécifique du fluide, notée jusqu'ici g_m^f .

I.1. DEFINITION DU COMPORTEMENT POROELASTIQUE.

I.1.1. Nullité de la dissipation intrinsèque. Variables d'état de l'énergie libre.

On dit qu'un matériau poreux est élastique (ou que son comportement est poroélastique) si la dissipation intrinsèque \mathcal{D} est identiquement nulle au cours de toute évolution du milieu :

$$(3) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}} + g_m \dot{m} - \dot{\Psi} = 0$$

Autrement dit, il n'y a pas de processus irréversibles attachés à la variation locale de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m . Il résulte de (3) que l'énergie libre Ψ ne varie pas si les taux de variation $\dot{\underline{\underline{\Delta}}}$ et \dot{m} de la déformation du squelette et de l'apport de masse fluide sont nuls. L'ensemble des variables $(\underline{\underline{\Delta}}, m)$ constitue donc un paramétrage de l'état thermodynamique du système matériel (ouvert) formé par l'ensemble de la particule de squelette et la particule de fluide contenues dans un volume géométrique élémentaire que l'on suit dans le mouvement du squelette :

$$(4) \quad \Psi = \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, m)$$

L1.2. Equations d'état du milieu poreux.

D'après (3) et (4), dans toute évolution du milieu poreux, on a :

$$(5) \quad \left[\underline{\pi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}} \right] : \dot{\underline{\Delta}} + \left[\underline{g}_m - \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right] \dot{m} = 0$$

On suppose de plus que le couple $(\underline{\Delta}, m)$ constitue un paramétrage normal de Ψ , c'est-à-dire que, dans les évolutions réelles du système, on peut toujours considérer des variations arbitraires de l'une des variables indépendamment des variations de l'autre. L'hypothèse de paramétrage normal permet de considérer des évolutions dans lesquelles \dot{m} est nul tandis que $\dot{\underline{\Delta}}$ peut prendre des valeurs arbitraires. L'égalité (5) devant être vérifiée pour toutes ces évolutions, on conclut facilement que :

$$(6) \quad \underline{\pi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}}(\underline{\Delta}, m)$$

Un raisonnement analogue permet de conclure que l'on a d'autre part :

$$(7) \quad \underline{g}_m = \frac{\partial \Psi}{\partial m}(\underline{\Delta}, m)$$

Il peut arriver que l'hypothèse de paramétrage normal soit prise en défaut : en effet, on a vu (chapitre 1, § V.2.3) que lorsque les deux constituants du milieu poreux sont incompressibles, l'apport de masse fluide est une fonction affine de la dilatation volumique J du squelette (cf. (132)₁), elle-même fonction de $\underline{\Delta}$. Les variations de m et $\underline{\Delta}$ ne sont donc pas indépendantes, et le raisonnement conduisant aux équations d'état doit donc en principe être modifié pour tenir compte de cette liaison interne. Pour ne pas alourdir la présentation, on considère ici que l'hypothèse d'incompressibilité des deux constituants ne constitue qu'une approximation théorique, un cas-limite dans lequel la compressibilité réelle des constituants est tenue pour négligeable : on admet donc que les résultats valables pour des constituants arbitrairement peu compressibles s'étendent par passage à la limite aux milieux dont les constituants sont strictement incompressibles (en supposant qu'il en existe).

Les relations (6) et (7), qui mettent en relation les variables d'état du milieu $\underline{\Delta}$ et m avec $\underline{\pi}$ et \underline{g}_m , sont appelées "équations d'état" du milieu poreux. Elles suffisent à décrire complètement son comportement, à condition qu'il soit possible d'identifier la dépendance de Ψ par rapport avec $\underline{\Delta}$ et m . Nous ferons l'hypothèse que l'énergie libre Ψ est une fonction convexe de ses arguments, ce que l'on peut justifier par des considérations de stabilité thermodynamique (voir par exemple (Coussy, 1991)).

L 1.3. Module et coefficient de Biot.

Tenseurs des modules d'élasticité "drainés" et "non drainés".

Un cas particulier important est le cas où l'énergie libre est une fonction quadratique de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m :

$$(8) \quad \Psi = \Psi^o + \underline{\underline{\pi}}^o : \underline{\underline{\Delta}} + g_m^o m + 1/2 (\underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Delta}} + M (\frac{m}{\rho_o^f})^2 - 2 M \frac{m}{\rho_o^f} \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\Delta}})$$

Les équations d'état prennent alors la forme suivante :

$$(9) \quad \underline{\underline{\pi}} - \underline{\underline{\pi}}^o = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Delta}} - M (m/\rho_o^f) \underline{\underline{B}}$$

$$(10) \quad g_m - g_m^o = M/\rho_o^f (- \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\Delta}} + m/\rho_o^f)$$

Lorsque l'on adopte pour Ψ un développement quadratique, il est habituel de faire aussi l'hypothèse que l'enthalpie libre du fluide g_m est une fonction linéaire de sa pression. La loi d'état du fluide (84)₁ s'écrit alors :

$$(11) \quad g_m = g_m^o + \frac{p - p^o}{\rho_o^f}$$

Eliminant $g_m - g_m^o$ entre (10) et (11), on obtient une relation linéaire entre $p - p^o$, $\underline{\underline{\Delta}}$ et m/ρ_o^f :

$$(12) \quad p - p^o = M (- \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\Delta}} + m/\rho_o^f)$$

Eliminant alors m/ρ_o^f entre (9) et (12), on obtient l'équation suivante :

$$(13) \quad \underline{\underline{\pi}} - \underline{\underline{\pi}}^o = \underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{\Delta}} - (p - p^o) \underline{\underline{B}}$$

où l'on a posé :

$$(14) \quad \underline{\underline{C}}_o = \underline{\underline{C}} - M \underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}}$$

Les équations (9) et (12) (ou de manière équivalente (13) et (12)) constituent les équations du comportement poroélastique linéaire. Le choix d'un potentiel Ψ quadratique et d'une dépendance linéaire de l'enthalpie libre du fluide par rapport à sa pression peuvent s'interpréter comme des linéarisations physiques : la démarche revient à considérer que les dérivées partielles premières de l'énergie libre Ψ par rapport à $\underline{\underline{\Delta}}$ et m peuvent être représentées par des approximations linéaires (cf. chapitre 1 §V.1.1 et V.1.3), et que les variations de masse volumique du fluide sont assez faibles pour que l'on puisse linéariser son équation d'état (chapitre 1 §V.1.4).

On rappelle que le scalaire M a la dimension d'une contrainte et porte le nom de "module de Biot". Le tenseur sans dimension $\underline{\underline{B}}$ est appelé "coefficient de Biot". Les évolutions dans lesquelles l'apport de masse fluide est nul ($m = 0$) sont dites "non drainées" : d'après (9), le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est alors une fonction linéaire du tenseur des déformations de Green-Lagrange, et on donne au tenseur $\underline{\underline{C}}$, qui possède les symétries habituelles d'un tenseur

d'élasticité, le nom de "tenseur des modules d'élasticité dans une évolution non drainée", ou "tenseur des modules d'élasticité non drainés". De manière analogue, on appelle "évolution drainée" du milieu toute évolution dans laquelle la pression du fluide conserve une valeur constante ($p - p^0 = 0$). Dans une telle évolution, le tenseur des contraintes est relié linéairement au tenseur des déformations de Green-Lagrange par le tenseur $\underline{\underline{C}}_0$, qui porte le nom de "tenseur des modules d'élasticité dans une évolution drainée", ou encore "tenseur des modules d'élasticité drainés". On notera que la terminologie d' "évolution drainée" ou d' "évolution non drainée" se rapporte au volume élémentaire de milieu poreux de l'étude thermodynamique, et non pas à l'ensemble de la structure étudiée.

Lorsque l'on ne fait pas les linéarisations physiques qui permettent d'obtenir les équations du comportement poroélastique linéaire, M , $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ ne sont plus des constantes, mais sont définis par :

$$(15) \quad \underline{\underline{C}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}} \partial \underline{\underline{\Delta}}}$$

$$(16) \quad M = (\rho^f)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial m}$$

$$(17) \quad \underline{\underline{B}} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}} \partial m} / \left(\rho^f \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial m} \right)$$

On obtient alors en différentiant les équations (6) et (7) les expressions suivantes :

$$(18) \quad d\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}} : d\underline{\underline{\Delta}} - M \underline{\underline{B}} \frac{dm}{\rho^f}$$

$$(19) \quad dg_m = \frac{M}{\rho^f} \left(- \underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{\Delta}} + \frac{dm}{\rho^f} \right)$$

Compte tenu de l'équation d'état du fluide (cf. (84)₁) :

$$(20) \quad dg_m = \frac{dp}{\rho^f}$$

on peut réécrire (19) sous la forme :

$$(21) \quad dp = M \left(- \underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{\Delta}} + \frac{dm}{\rho^f} \right)$$

Eliminant dm entre (18) et (21), on établit l'équation suivante, qui généralise (13) en poroélasticité non linéaire :

$$(22) \quad d\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}}_0 : d\underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{B}} dp$$

où l'on a posé :

$$(23) \quad \underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{C}} - M \underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}}$$

En pratique, le comportement poroélastique non-linéaire est donc caractérisé par les expressions (18) et (21) ou (22) et (21).

I.2. FORMULATION ALTERNATIVE DU COMPORTEMENT POROELASTIQUE.

Il est possible, et s'avère fructueux, d'adopter une formulation alternative du comportement poroélastique, dans laquelle le rôle joué par la pression du fluide est mis en relief. D'après l'équation d'état (7), l'enthalpie libre du fluide g_m peut être considérée comme une fonction de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m . Il en va de même de sa pression p , puisque la loi d'état du fluide (20) établit une relation biunivoque entre g_m et p :

$$(24) \quad p = p(\underline{\underline{\Delta}}, m)$$

Considérons une évolution où la valeur de $\underline{\underline{\Delta}}$ n'évolue pas. Il est raisonnable de supposer que p est une fonction strictement croissante de m :

$$(25) \quad \frac{\partial p}{\partial m}(\underline{\underline{\Delta}}, m) > 0$$

Cette inégalité traduit l'idée intuitive suivante : on ne peut injecter du fluide dans un système élémentaire dont la déformation globale $\underline{\underline{\Delta}}$ est maintenue fixe qu'en augmentant la pression du fluide. Avec (25), il est possible d'inverser la relation (24) pour une valeur fixée de la déformation du squelette et d'exprimer m en fonction de $\underline{\underline{\Delta}}$ et p :

$$(26) \quad m = m(\underline{\underline{\Delta}}, p)$$

Toute fonction de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m peut désormais être considérée comme une fonction de $\underline{\underline{\Delta}}$ et p : c'est en particulier le cas du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$. Il résulte de (22) que les tenseurs $\underline{\underline{C}}_o$ et $\underline{\underline{B}}$ peuvent être interprétés comme les dérivées partielles de la fonction $\underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p)$ par rapport à $\underline{\underline{\Delta}}$ et p respectivement :

$$(27) \quad \underline{\underline{C}}_o = \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} \quad ; \quad \underline{\underline{B}} = - \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}}{\partial p}$$

Si la fonction $\underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p)$ est suffisamment régulière, ce que nous supposons dans la suite, les relations de Maxwell, qui expriment l'égalité des dérivées secondes croisées, fournissent l'identité suivante :

$$(28) \quad \frac{\partial \underline{\underline{C}}_o}{\partial p} = \frac{\partial(-\underline{\underline{B}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}}$$

Finalement, nous obtenons deux formulations équivalentes du comportement du milieu poreux, constituées respectivement par les expressions (18) et (21), et (22) et (21). Comme pour les milieux monophasiques, ces formulations ne sont évidemment pas directement utilisables : si l'on considère par exemple la formulation du comportement constituée par (22) et (21), il reste à

identifier les valeurs des tenseurs $\underline{\underline{C}}_0$ et $\underline{\underline{B}}$ et du scalaire M , ainsi que leurs variations avec $\underline{\underline{\Delta}}$ et p : cette identification ne peut se faire que par voie expérimentale.

IL. POROELASTICITE EN TRANSFORMATION INFINITESIMALE.

Le terme de poroélasticité en transformation infinitésimale recouvre l'ensemble des problèmes dans lesquels le squelette d'un milieu poreux élastique subit une transformation géométrique infinitésimale. Comme on l'a dit au chapitre précédent (§V.1.1), les linéarisations géométriques constituent alors des approximations acceptables ; on obtient cependant différentes formulations des relations de comportement selon les linéarisations physiques auxquelles on peut procéder. On examine d'abord le cas de la poroélasticité linéaire.

IL.1. COMPORTEMENT POROELASTIQUE LINEAIRE EN TRANSFORMATION INFINITESIMALE.

On a déjà étudié en §I.1.3 la formulation du comportement poroélastique linéaire, c'est-à-dire la formulation obtenue lorsque l'on fait l'hypothèse que les dérivées premières de Ψ peuvent être considérées comme des fonctions linéaires de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m , et \underline{g}_m comme une fonction linéaire de p : ces linéarisations sont en général appelées " linéarisations physiques".

On procède maintenant aux linéarisations "géométriques" (chapitre 1, §V.1.1) liées au caractère infinitésimal de la transformation géométrique du squelette : elles consistent à ne conserver que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 en $|\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}}|$. Ainsi, on remplace systématiquement le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}$ par le tenseur linéarisé $\underline{\underline{\xi}}$. De plus, on déduit de la formule de transport linéarisée (118)₁ et de (9) l'expression suivante du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$(29) \quad \underline{\underline{\sigma}} \cong \underline{\underline{\pi}}^0 - \text{tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{\xi}})^T + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\xi}} - M (m/\rho_0^f) \underline{\underline{B}}$$

où l'on a supposé que $M \underline{\underline{B}} m/\rho_0^f$ est du même ordre que $\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\xi}}$. Il est habituel de faire l'hypothèse que les contraintes dans la configuration de référence $\underline{\underline{\pi}}^0$ sont petites devant les modules d'élasticité non drainés $\underline{\underline{C}}$, ce qui permet de faire l'approximation suivante :

$$(30) \quad \underline{\underline{\sigma}} \cong \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\xi}} - M (m/\rho_0^f) \underline{\underline{B}}$$

où la contrainte de référence $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est égale à $\underline{\underline{\pi}}^0$. D'autre part, l'équation (12) s'écrit désormais :

$$(31) \quad p - p^0 = M (-\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\xi}} + m/\rho_0^f)$$

et, combinant (30) et (31), on obtient finalement :

$$(32) \quad \underline{\underline{\sigma}} \equiv \underline{\underline{\sigma}}^o + \underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{\varepsilon}} - (p - p^o) \underline{\underline{B}}$$

où le tenseur $\underline{\underline{C}}_o$ est encore défini par (14). Le comportement linéaire en transformation infinitésimale est donc caractérisé par les relations (30) et (31) ou alternativement par (31) et (32).

Il reste à identifier expérimentalement les constantes matérielles $\underline{\underline{C}}$ (ou $\underline{\underline{C}}_o$), M et $\underline{\underline{B}}$, ce qui constitue un problème beaucoup plus simple que l'identification d'autant de fonctions de plusieurs variables.

II. 2. COMPORTEMENT POROELASTIQUE NON-LINEAIRE EN TRANSFORMATION INFINITESIMALE.

II. 2. 1. Cas général.

En pratique, le modèle de comportement poroélastique linéaire est souvent pris en défaut : il n'est pas toujours possible de déterminer des valeurs de $\underline{\underline{C}}_o$ et $\underline{\underline{B}}$ pour lesquelles les formules (31) et (32) présentent un accord satisfaisant entre les données expérimentales. Il est alors nécessaire de renoncer aux linéarisations physiques. En revanche, lorsque la transformation du squelette est infinitésimale, il reste légitime de procéder aux linéarisations géométriques. On remplace donc dans (18), (21) et (22) le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ par le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}$ par le tenseur linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$(33) \quad d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - M \underline{\underline{B}} \frac{dm}{\rho^I}$$

$$(34) \quad dp = M \left(- \underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{dm}{\rho^I} \right)$$

$$(35) \quad d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}_o : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{B}} dp$$

On utilise ces relations en considérant que la non-linéarité du comportement se traduit par le fait que $\underline{\underline{C}}_o$, M et $\underline{\underline{B}}$ ne sont pas des constantes mais des fonctions de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et p , qui demeurent à identifier expérimentalement. Comme en poroélasticité linéaire, l'approximation consistant à remplacer $\underline{\underline{\pi}}$ par $\underline{\underline{\sigma}}$ suppose que les contraintes restent petites devant les modules.

II.2.2. Exemple : prise en compte de la compressibilité du fluide.

On cherche dans ce paragraphe une formulation du comportement poroélastique en transformation infinitésimale qui permette de considérer des problèmes dans lesquels le fluide subit de fortes variations de masse volumique. Notons que, si cette situation est *a priori* à peu près exclue si le fluide saturant est un liquide comme l'eau, elle ne l'est pas dans le cas où le fluide est un gaz.

En pratique, nous nous intéressons à la situation dans lesquelles les variations de la masse volumique du fluide sont telles que d'une part il n'est pas possible de linéariser l'équation d'état du fluide, et d'autre part, l'apport de masse fluide n'est pas infinitésimal (c'est-à-dire que la condition $m/\rho_0^f \ll 1$ n'est pas vérifiée). On ne peut alors plus faire l'hypothèse que l'énergie libre Ψ est une fonction quadratique de $\underline{\underline{\Delta}}$ et m , qui permettait d'obtenir la formulation explicite simple du comportement (31)-(32). On se propose dans ce qui suit d'effectuer un changement de variables de manière à remplacer l'énergie libre Ψ par une autre fonction $\bar{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}, p)$ que l'on pourra approcher par un développement quadratique. L'idée de remplacer m par une autre variable plus commode a déjà été proposée par Dangla et Coussy (1996), et exploitée dans le cadre d'une approche micro-macro du comportement poroélastique en transformation finie par de Buhan, Chateau et Dormieux (1997).

Rappelons d'abord que du point de vue physique, $\Psi d\Omega_0$ représente l'énergie libre des deux particules matérielles de squelette et de fluide contenues dans le volume $d\Omega_t$ de la configuration actuelle, transporté convectif dans le mouvement du squelette du volume élémentaire $d\Omega_0$ de la configuration initiale. On adopte donc la décomposition additive suivante de $\Psi d\Omega_0$:

$$(36) \quad \Psi d\Omega_0 = \Psi_f d\Omega_0 + \Psi_s d\Omega_0$$

où $\Psi_f d\Omega_0$ et $\Psi_s d\Omega_0$ représentent respectivement l'énergie libre de la particule de fluide et de la particule de squelette contenues dans $d\Omega_t$.

Il est facile d'exprimer l'énergie libre de la particule de fluide en fonction de sa masse et de l'énergie libre massique du fluide φ_m :

$$(37) \quad \Psi_f d\Omega_0 = \varphi_m (m + \rho_0^f \phi_0) d\Omega_0$$

On rappelle que l'énergie libre spécifique φ_m d'un fluide est liée à son enthalpie libre g_m par la relation :

$$(38) \quad g_m = \varphi_m + \frac{p}{\rho_f}$$

La particule de squelette contenue dans $d\Omega_t$ représente à l'échelle macroscopique la partie du réseau solide contenue dans le volume géométrique élémentaire correspondant. Sans procéder à une démarche d'homogénéisation complète, il est naturel de considérer qu'à l'échelle microscopique (échelle à laquelle les phases solide et fluide sont géométriquement distinctes), la pression du fluide apparaît comme un paramètre du chargement mécanique imposé sur une partie de la frontière du domaine occupé par le solide, tandis que sur la partie de sa frontière commune avec celle de l'élément de volume, le chargement imposé est caractérisé par la déformation observée à l'échelle macroscopique $\underline{\underline{\Delta}}$:

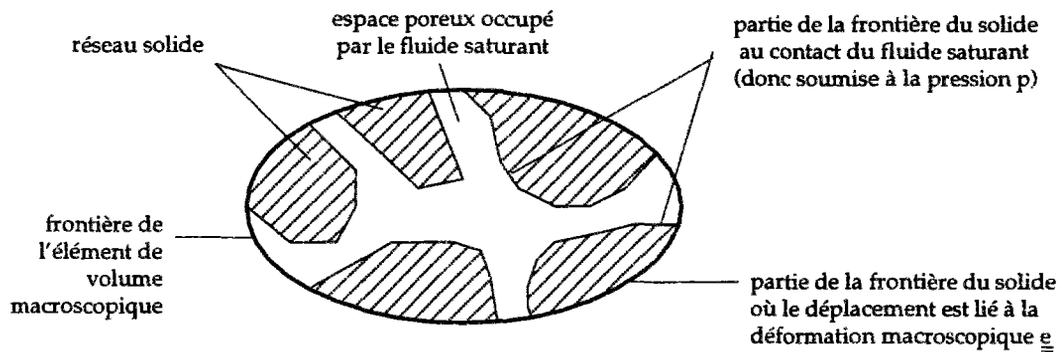


Figure 1 - chargement mécanique appliqué au solide contenu dans $d\Omega_t$

L'idée la plus simple consiste à supposer que le réseau solide est constitué d'un matériau élastique linéaire, ce qui permet de procéder aux linéarisations physiques suivantes : d'une part, on linéarise les dérivées premières de Ψ_s par rapport à $\underline{\underline{\Delta}}$ et $(p-p^0)$, ce qui revient à adopter pour Ψ_s un développement quadratique en $\underline{\underline{\Delta}}$ et $(p-p^0)$:

$$(39) \quad \Psi_s = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\Delta}} + G (p-p^0) + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Delta}} (p-p^0) + \frac{F}{2} (p-p^0)^2$$

D'autre part, on linéarise la variation de volume du solide par rapport à $\underline{\underline{\Delta}}$ et $(p-p^0)$. Le volume occupé par le solide contenu dans $d\Omega_t$ étant égal à $J(1-\phi) d\Omega_0$, on écrit donc :

$$(40) \quad J(1-\phi) d\Omega_0 = [(1-\phi_0) + (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{b}}) : \underline{\underline{\Delta}} - a (p-p^0)] d\Omega_0$$

Remarquons au passage que a est de signe positif : si l'on augmente la pression du fluide en bloquant la déformation globale du squelette ($\underline{\underline{\Delta}}=0$), le volume du solide diminue. On a d'autre part, en vertu de l'hypothèse de transformation infinitésimale :

$$(41) \quad J = (1 + \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} (\underline{\underline{\Delta}}=0) : \underline{\underline{\Delta}}) = (1 + \text{tr} \underline{\underline{\Delta}})$$

(on rappelle qu'un calcul classique donne $\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} = (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\Delta}})^{-1}$).

On déduit alors de (40) et (41) que l'on peut écrire :

$$(42) \quad J\phi = J - J(1-\phi) = [\phi_0 + \underline{b} : \underline{\Delta} + a (p-p^0)]$$

et la définition (39)₁ de m donne alors la relation suivante :

$$(43) \quad (m + \rho_0^f \phi_0) = \rho^f J\phi = \rho^f [\phi_0 + \underline{b} : \underline{\Delta} + a (p-p^0)]$$

où ρ^f est une fonction de p , tandis que a et \underline{b} sont des constantes. La relation (43) définit une fonction $m(\underline{\Delta}, p)$ donnant l'apport de masse fluide en fonction de la déformation de la particule de squelette $\underline{\Delta}$ et de la pression du fluide p . Il est facile de voir que, pour une valeur fixée de $\underline{\Delta}$, (43) définit une relation biunivoque entre m et p , puisque l'on a :

$$(44) \quad \left. \frac{\partial m}{\partial p} \right|_{\underline{\Delta}} = \frac{\partial \rho^f}{\partial p} J\phi + \rho^f \frac{\partial (J\phi)}{\partial p} = \frac{\partial \rho^f}{\partial p} J\phi + \rho^f a > 0$$

>0 >0 >0 >0

La relation entre m et p à $\underline{\Delta}$ fixé peut donc être inversée, et la pression p apparaît alors comme une fonction de m et de $\underline{\Delta}$. Il résulte alors de (36), (39), (37) et (38) que Ψ peut être considérée comme une fonction des deux seules variables $\underline{\Delta}$ et m , ce qui est conforme à la définition que nous avons adoptée pour le comportement poroélastique (cf. (4)), et l'on obtient en principe les équations d'état par (6) et (7).

En pratique, p n'est défini que de manière implicite comme une fonction de $\underline{\Delta}$ et m : on ne dispose donc pas d'une expression explicite des équations d'état. Pour surmonter cette difficulté, on procède à un changement de variable en posant :

$$(45) \quad \bar{\Psi} = \Psi - m g_m$$

La condition de nullité de la dissipation intrinsèque (3) peut alors s'écrire :

$$(46) \quad \underline{\pi} : \underline{\dot{\Delta}} - \frac{m}{\rho^f} \dot{p} - \dot{\bar{\Psi}} = 0$$

$\bar{\Psi}$ apparaît donc comme une fonction de $\underline{\Delta}$ et p , dont les dérivées premières sont égales à $\underline{\pi}$ et $-m/\rho^f$:

$$(47) \quad \underline{\pi} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{\Delta}}$$

$$(48) \quad -\frac{m}{\rho^f} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial p}$$

Combinant (36), (39), (37), (38) et (43), on obtient une expression explicite de $\bar{\Psi}(\underline{\Delta}, p)$:

$$(49) \quad \begin{aligned} \bar{\Psi} &= \Psi_s + \Psi_f - m \varepsilon_m = \Psi_s + (m + \rho_o^f \phi_o) (\phi_m - \varepsilon_m) + \rho_o^f \phi_o \varepsilon_m \\ &= \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\Delta}} + G(p-p^o) + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Delta}} (p-p^o) + \frac{F}{2} (p-p^o)^2 \\ &\quad - p [\phi_o + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{\Delta}} + a (p-p^o)] + \rho_o^f \phi_o \varepsilon_m(p) \end{aligned}$$

L'équation (47) donne alors :

$$(50) \quad \underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{D}} (p-p^o) - p \underline{\underline{b}}$$

D'autre part, on déduit de (43) et (48) la relation suivante :

$$(51) \quad -a p + F (p-p^o) + G + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Delta}} = 0$$

Dans la configuration de référence, on a $\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^o$; $p = p^o$; $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{0}}$. On en déduit la valeur de $\underline{\underline{H}}$ et G :

$$(52) \quad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\pi}}^o + \underline{\underline{b}} p^o \quad ; \quad G = a p^o$$

L'expression (51) devient alors :

$$(53) \quad (-a + F) (p-p^o) + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Delta}} = 0$$

Cette dernière égalité étant valable pour toutes valeurs de $\underline{\underline{\Delta}}$ et p , on obtient :

$$(54) \quad -a + F = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{D}} = 0$$

et le comportement macroscopique du milieu poreux est finalement caractérisé par :

$$(55) \quad \underline{\underline{\pi}} - \underline{\underline{\pi}}^o = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{b}} (p-p^o)$$

$$(56) \quad \frac{m + \rho_o^f \phi_o}{\rho^f} - \phi_o = \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{\Delta}} + a (p-p^o)$$

On procède enfin aux linéarisations géométriques autorisées par l'hypothèse de transformation infinitésimale, en faisant à nouveau l'hypothèse que les contraintes de Piola-Kirchhoff initiales sont négligeables devant les modules d'élasticité drainés $\underline{\underline{A}}$:

$$(57) \quad \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^o = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{b}} (p-p^o)$$

$$(58) \quad \frac{m + \rho_o^f \phi_o}{\rho^f} - \phi_o = \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + a (p-p^o)$$

où l'on a posé évidemment $\underline{\underline{\sigma}}^o = \underline{\underline{\pi}}^o$.

On obtient finalement une formulation très proche de celle du comportement linéaire. En particulier l'équation (57) est formellement analogue à (32) : $\underline{\underline{A}}$ s'interprète comme le tenseur des modules d'élasticité drainés, et $\underline{\underline{b}}$ comme le coefficient de Biot.

L'équation (58) redonne (31) si les variations de masse volumique du fluide sont négligeables. Dans le cas contraire, l'équation (58) ne relie pas linéairement l'apport de masse fluide à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $(p-p^0)$, en raison de la dépendance de ρ^f avec la pression p . Dans l'équation (58), le coefficient a traduit la compressibilité du solide lorsque l'on augmente la pression du fluide en bloquant la déformation du squelette (cf. (40)). Il dépend donc des caractéristiques mécaniques du solide constituant le réseau poreux et de la géométrie de ce réseau, mais est indépendant de l'équation d'état du fluide. Différenciant l'expression de m fournie par (58), on obtient :

$$(59) \quad \frac{dm}{\rho^f} = \underline{\underline{b}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \left[a + \frac{d\rho^f/dp}{\rho^f} (\phi_0 + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + a(p-p^0)) \right] dp$$

ou encore, en introduisant le module de compressibilité du fluide (défini par $K_f(p) = \left(\frac{d\rho^f/dp}{\rho^f}\right)^{-1}$, cf. (126)₁) et la porosité dans la configuration actuelle (cf. (42)) :

$$(60) \quad \frac{dm}{\rho^f} = \underline{\underline{b}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \left[a + \frac{J\phi}{K_f(p)} \right] dp$$

Dans le contexte du comportement poroélastique linéaire, où l'on peut faire les approximations $J \cong 1$, $\phi \cong \phi_0$ et $K_f(p) \cong K_f(p^0)$, la comparaison de (34) et (60) permet de relier le coefficient a au module de Biot M :

$$(61) \quad \frac{1}{M} = a + \frac{\phi_0}{K_f(p^0)}$$

Ce résultat est analogue à un résultat connu en poroélasticité linéaire, pour un milieu poreux isotrope dont le constituant solide à l'échelle microscopique est homogène, élastique linéaire et isotrope (cf. Coussy (1991)) :

$$(62) \quad \frac{1}{M} = \frac{b-\phi_0}{K_s} + \frac{\phi_0}{K_f}$$

où K_s et K_f désignent les modules de compressibilité du solide et du fluide respectivement.

Bien qu'elle soit souvent utilisée pour des matériaux dont les deux constituants sont incompressibles ou peu compressibles, la modélisation mécanique des milieux poreux présentée au chapitre 1 permet en principe d'étudier tous les types de milieux poreux, sans restriction sur la compressibilité de leurs constituants. A titre d'exemple, nous avons proposé une formulation du comportement poroélastique en transformation infinitésimale adaptée aux problèmes dans lesquels la masse volumique du fluide varie fortement. La démarche suivie consiste à procéder à un changement de variable et à linéariser la variation de volume du solide et les dérivées partielles de l'énergie libre stockée dans le solide Ψ_s . La validation des expressions (57) et (58) passe évidemment (comme dans toute autre situation) par la recherche de valeurs des coefficients $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{b}}$ et a qui réalisent une concordance satisfaisante entre le modèle et les résultats expérimentaux.

III. POROÉLASTICITÉ FINIE ET CONTRAINTES EFFECTIVES.

En mécanique des sols, il est habituel de formuler le comportement "en contraintes effectives", c'est-à-dire de faire a priori l'hypothèse que la déformation du squelette est reliée au tenseur des "contraintes effectives" $\underline{\underline{\sigma}}'$, initialement introduit par Terzaghi et défini par $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$. On peut d'autre part établir par des techniques de changement d'échelle d'espace que, lorsque le milieu est constitué à l'échelle inférieure par un réseau solide poreux dont le comportement est élastique linéaire (et homogène), la déformation du squelette est contrôlée par un groupement de type "contrainte effective" généralisé, de la forme $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}}$ (Auriault et Sanchez-Palencia, 1997).

On rappelle ici comment la notion de contraintes effectives s'introduit dans le cadre de la poroélasticité linéaire. On discute ensuite l'intérêt de ce concept pour la formulation du comportement poroélastique en transformation finie (Bourgeois et Dormieux, 1996).

III.1. CONTRAINTES EFFECTIVES EN POROELASTICITE INFINITESIMALE.

Dans le cadre de la poroélasticité linéaire, les tenseurs $\underline{\underline{C}}_o$ et $\underline{\underline{B}}$ sont des constantes, ce qui permet d'établir la relation (32), que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(63) \quad (\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}} p) - (\underline{\underline{\sigma}}^o + \underline{\underline{B}} p^o) = \underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}} p$, couramment employé en géomécanique, est appelé "tenseur des contraintes effectives". Le résultat important en pratique est que ce tenseur est donné par une fonction de la seule déformation du squelette $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et non par une fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et p . Ce résultat apparaît ici comme une conséquence des linéarisations (en particulier des linéarisations physiques) que nous avons faites, et non comme un "principe" général : dans le cas d'un comportement poroélastique non linéaire, l'enthalpie libre et les contraintes de Piola-Kirchhoff sont données par deux fonctions de la déformation du squelette *et de l'apport de masse fluide*, et il n'y a pas de raison de restreindre a priori la formulation du comportement en adoptant une relation donnant le tenseur des contraintes effectives en fonction de la seule déformation du squelette.

Par ailleurs, dans le cas particulier où le solide qui constitue le squelette est incompressible, un raisonnement simple permet d'établir en poroélasticité linéaire que le tenseur $\underline{\underline{B}}$ est égal à $\underline{\underline{1}}$ (Coussy, 1991). Le tenseur des contraintes effectives se réduit alors au tenseur des contraintes effectives $\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$, initialement introduit par Terzaghi (1943).

Dans le cas d'un comportement non linéaire en transformation infinitésimale, si $\underline{\underline{B}}$ est constant et $\underline{\underline{C}}_0$ une fonction de $\underline{\underline{\epsilon}}$ seulement, on obtient à partir de (35) la relation suivante :

$$(64) \quad d(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}} p) = \underline{\underline{C}}_0(\underline{\underline{\epsilon}}) : d\underline{\underline{\epsilon}}$$

qui montre que le tenseur des contraintes effectives est à nouveau une fonction de $\underline{\underline{\epsilon}}$ seulement. Ce type de formulation, fréquemment employé pour l'étude de la compaction, rend compte de la non-linéarité du comportement à travers l'emploi de modules d'élasticité tangents variables, mais sa validité est théoriquement restreinte aux cas où les déformations du squelette demeurent infinitésimales.

III.2. CONTRAINTES EFFECTIVES EN POROELASTICITE FINIE.

Considérons maintenant le cas où le squelette subit de grandes transformations, dans le cas particulier où le solide constituant le squelette est incompressible. Cette propriété se traduit par la condition (cf. (130)₁) :

$$(65) \quad J(1 - \phi) = (1 - \phi_0)$$

D'autre part, en introduisant le module de compressibilité du fluide $K_f(p)$, l'équation d'état (20) peut s'écrire (cf. (126)₁) :

$$(66) \quad \frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{K_f(p)} \quad (\text{où } K_f(p) = -\frac{dg_m/dp}{d^2g_m/dp^2})$$

On rappelle que l'apport de masse fluide est défini par (39)₁ :

$$(67) \quad m = \rho^f J \phi - \rho_0^f \phi_0$$

Différentiant (67), on obtient :

$$(68) \quad dm = \rho^f d(J\phi) + J\phi d\rho^f$$

Portant alors (65) et (66) dans (68) on montre que l'on a :

$$(69) \quad dm = \rho^f \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} : d\underline{\underline{\Delta}} + (J - (1 - \phi_0)) \frac{dp}{K_f} \right)$$

Cette expression résulte seulement d'informations disponibles sur les constituants à l'échelle microscopique, indépendamment de toute hypothèse sur les propriétés thermodynamiques du milieu poreux. La compatibilité de (69) avec l'expression (21) obtenue dans le cadre de l'étude du comportement poroélastique, permet d'identifier les coefficients $\underline{\underline{B}}$ et M :

$$(70) \quad M = \frac{K_f(p)}{J(\underline{\underline{\Delta}}) - (1 - \phi_0)}$$

$$(71) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\Delta}}}(\underline{\underline{\Delta}}) = J \left(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\Delta}} \right)^{-1} = J \left({}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right)^{-1}$$

La relation (71) exprime que $\underline{\underline{B}}$ n'est fonction que de la déformation du squelette, et ne dépend pas de la pression du fluide. On voit alors par (28) que le tenseur $\underline{\underline{C}}_0$ dépend de manière affine de la pression p , ce qui s'écrit :

$$(72) \quad \underline{\underline{C}}_0(\underline{\underline{\Delta}}, p) = -p \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} + \underline{\underline{C}}_0^*(\underline{\underline{\Delta}})$$

(72) avec $p = 0$ montre que :

$$(73) \quad \underline{\underline{C}}_0^*(\underline{\underline{\Delta}}) = \underline{\underline{C}}_0(\underline{\underline{\Delta}}, p = 0) = \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}}{\partial \underline{\underline{\Delta}}}(\underline{\underline{\Delta}}, p = 0)$$

$\underline{\underline{C}}_0^*$ s'interprète donc comme le tenseur des modules d'élasticité drainés mesurés dans une évolution à pression nulle $p = 0$.

On établit alors en portant (72) dans (22) que l'on a :

$$(74) \quad d(\underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{B}} p) = \underline{\underline{C}}_0^*(\underline{\underline{\Delta}}) : d\underline{\underline{\Delta}}$$

qui fait apparaître le fait que le tenseur des contraintes effectives de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{B}} p$ n'est fonction que de la déformation du squelette et ne dépend pas de la pression du fluide :

$$(75) \quad \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p) + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\Delta}}) p = \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p = 0)$$

La compatibilité entre la formulation du comportement poroélastique obtenue à partir de l'étude à l'échelle macroscopique de la thermodynamique du milieu poreux et l'incompressibilité du solide constituant le squelette à l'échelle microscopique, permet donc de conclure que le tenseur de contraintes effectives $\underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{B}} p$ est une fonction de la seule déformation macroscopique $\underline{\underline{\Delta}}$.

On montre de plus en portant dans (75) la relation (71) et la formule de transport (98)₁ entre $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ que le résultat subsiste en termes de contraintes de Cauchy, si bien que le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi apparaît comme une fonction de la seule transformation géométrique du squelette (c'est-à-dire du tenseur $\underline{\underline{F}}$) :

$$(76) \quad \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p = 0) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$$

III.3. ANALYSE CRITIQUE DU CONCEPT DE "TENSEUR DES CONTRAINTES EFFECTIVES".

Le raisonnement précédent donne une justification à l'emploi du tenseur des contraintes effectives de Terzaghi pour un comportement poroélastique non-linéaire en transformation finie,

à condition que le solide soit incompressible. Considérons maintenant le cas où le solide ne peut pas être considéré comme incompressible. Si (65) n'est pas vérifiée, (69) devient :

$$(77) \quad d\mathbf{m} = \rho^f \left(\frac{\partial(J\phi)}{\partial\Delta} : d\Delta + \left(\frac{J\phi}{K_f} + \frac{\partial(J\phi)}{\partial p} \right) dp \right)$$

et la comparaison avec (21) conduit à la conclusion que l'expression générale de $\underline{\underline{B}}$ est donnée par :

$$(78) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{\partial(J\phi)}{\partial\Delta}(\underline{\underline{\Delta}}, p)$$

Il est clair que si la condition suivante est vérifiée :

$$(79) \quad \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial p} = 0$$

$\underline{\underline{C}}_0$ conserve la forme (72), et les expressions (74) et (75) sont vérifiées. En termes de contraintes de Cauchy, on obtient alors au lieu de (76) :

$$(80) \quad \underline{\underline{\sigma}} + p \left(\frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{\Delta}}, p = 0) \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

Notons que la condition (79) donne :

$$(81) \quad \frac{\partial^2(J\phi)}{\partial p \partial \Delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J\phi = u(\underline{\underline{\Delta}}) + v(p)$$

Dans le cas général où le solide est compressible, il n'y a pas de raison pour que la variation de volume du fluide s'exprime comme la somme de deux fonctions $u(\underline{\underline{\Delta}})$ et $v(p)$: la condition (81) n'est donc pas nécessairement satisfaite. Il n'est donc pas certain que l'emploi d'une formulation du comportement en contraintes effectives soit justifié.

CONCLUSION

Ce chapitre présente une première mise en œuvre de la démarche que l'on a choisi de suivre pour rechercher la forme mathématique des relations de comportement du milieu poreux. Dans le cas général, l'identification du comportement poroélastique nécessite de déterminer à partir d'expériences la dépendance des dérivées premières de la fonction $\Psi(\underline{\Delta}, m)$ par rapport à ses arguments, ce qui constitue a priori un problème extrêmement difficile.

Lorsque certaines hypothèses sont vérifiées, la formulation du comportement se simplifie, et l'information à déterminer expérimentalement se trouve sensiblement diminuée. Nous avons étudié d'abord les conséquences de l'hypothèse des transformations géométriques infinitésimales du squelette. A titre d'exemple, nous avons montré comment la détermination du comportement d'un milieu poreux saturé par un fluide dont on ne peut pas négliger la compressibilité peut se ramener, comme dans le cas classique du comportement poroélastique linéaire, à la détermination expérimentale de constantes matérielles scalaires.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la formulation du comportement d'un milieu poreux élastique dont le squelette est constitué par un solide incompressible. Cette hypothèse, qui ne fait pas partie de l'ensemble des hypothèses de petites perturbations, permet de considérer des transformations géométriques finies du squelette. On peut montrer que le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi $\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$ ne dépend que de la transformation géométrique du squelette $\underline{\underline{F}}$. Le concept de contraintes effectives, souvent présenté comme un principe, apparaît ici comme une conséquence des hypothèses formulées sur la thermodynamique du milieu (nullité de la dissipation intrinsèque et régularité de la fonction $\pi(\underline{\underline{\Delta}}, p)$) et sur la compressibilité du constituant solide. Il faut noter que l'incompressibilité du solide joue un rôle essentiel dans le raisonnement : il n'est pas certain que l'emploi d'une formulation en contraintes effectives soit encore justifié lorsque le solide constituant le squelette n'est pas incompressible.

Le chapitre suivant est consacré à la résolution de deux problèmes de poroélasticité en transformation finie unidimensionnels.

CHAPITRE 3

ETUDE DE LA CONSOLIDATION ET DE LA SEDIMENTATION EN POROELASTICITE FINIE

INTRODUCTION

Nous avons choisi de tirer parti de la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque pour préciser la forme mathématique des relations de comportement d'un milieu poreux. Dans le chapitre précédent, nous avons discuté le cas particulier du comportement poroélastique, dans lequel la dissipation intrinsèque est en fait identiquement nulle dans le milieu. Nous avons obtenu une formulation particulièrement simple lorsque le solide qui constitue le squelette est incompressible.

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre de cette formulation pour étudier deux problèmes pratiques dans lesquels la transformation géométrique du squelette sort du cadre de l'hypothèse de la transformation infinitésimale : le problème de la consolidation, qui consiste à estimer l'évolution de l'épaisseur d'une couche de sol soumise instantanément à une surcharge et drainée sur sa face supérieure, et le problème de la compaction des bassins sédimentaires. Pour chaque problème, on reprend la formulation de l'ensemble des équations, on discute ensuite l'identification des caractéristiques matérielles à partir de données expérimentales, et on propose enfin une résolution numérique. Ces exemples simples permettent de discuter les différences entre une formulation où l'on fait les linéarisations géométriques associées à l'hypothèse de transformation infinitésimale du squelette et la formulation obtenue lorsque l'on ne fait aucune linéarisation.

I. CONSOLIDATION D'UNE COUCHE POROÉLASTIQUE.

La consolidation d'une couche poreuse soumise à une surcharge verticale constitue un problème classique de géotechnique. On considère une couche de sol horizontale saturée que l'on soumet "instantanément" à une surcharge verticale, par exemple en déposant au-dessus d'elle un remblai. La surcharge entraîne une augmentation de la contrainte verticale totale dans la couche, et à court terme (c'est-à-dire avant que les phénomènes de conduction du fluide à travers le milieu poreux n'aient eu le temps de se produire) une diminution instantanée de son épaisseur (appelée tassement instantané) et une augmentation de la pression du fluide dans le milieu poreux. Si le remblai est drainant, la pression du fluide est maintenue à la pression atmosphérique à l'interface entre la couche poreuse et le remblai. La loi de Darcy indique que le fluide circule à travers le milieu poreux des zones où la charge hydraulique est élevée vers les zones où sa valeur est plus faible, c'est-à-dire dans le cas étudié ici vers la face supérieure de la couche. L'épaisseur de la couche diminue progressivement à mesure le fluide en est expulsé : on donne à cette diminution le nom de tassement différé. L'ensemble du phénomène porte le nom de "consolidation".

L'intérêt pratique du problème est clair : il est en effet crucial de savoir lors de la mise en place d'un remblai quels tassements la charge induit dans les terrains sous-jacents, et au bout de combien de temps le tassement maximum est atteint. Ce problème a été abordé par Terzaghi (1925), puis par Biot (1941), et l'on dispose d'une solution analytique dans le cadre de la poroélasticité linéaire.

Dans le cas d'un milieu poreux très compressible, le niveau de déformation peut devenir incompatible avec les hypothèses de linéarité du comportement, de transformation infinitésimale et de petits déplacements. En pratique, la non-linéarité du comportement est prise en compte dans la détermination de la valeur asymptotique du tassement de la couche, mais le processus de consolidation lui-même est le plus souvent décrit dans le cadre d'une théorie linéaire. Plusieurs auteurs ont cependant proposé une résolution en transformation infinitésimale pour un comportement non-linéaire en supposant d'emblée que la loi de comportement s'écrit en contraintes effectives de Terzaghi (Gibson *et al* (1967), Yong et Warkentin (1975)). Nous présentons une résolution qui prend en compte à la fois les non-linéarités de comportement et les non-linéarités géométriques.

L1. POSITION DU PROBLEME.

On considère une couche poroélastique horizontale d'extension infinie reposant sur un substratum plan, rigide et imperméable. On supposera que les forces de volume agissant sur le milieu poreux sont négligeables, ainsi que les accélérations du squelette et du fluide. On adoptera donc pour la loi de Darcy et l'équilibre les expressions suivantes :

$$(1) \quad \underline{w}/\rho^f = -\underline{k} \cdot \underline{\text{grad}} p$$

$$(2) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} = 0$$

L1.1. configuration initiale.

On désigne par \underline{e}_z désigne le vecteur unitaire de la verticale ascendante. Initialement ($t < 0$), la couche est limitée par les plans horizontaux $Z = 0$ et $Z = H$ et soumise à une charge verticale $-q_0 \underline{e}_z$ uniforme appliquée sur sa face supérieure $Z = H$ (figure 1). De plus, le squelette et le fluide sont au repos. On adopte comme configuration de référence pour le squelette la configuration correspondant à cette situation initiale.

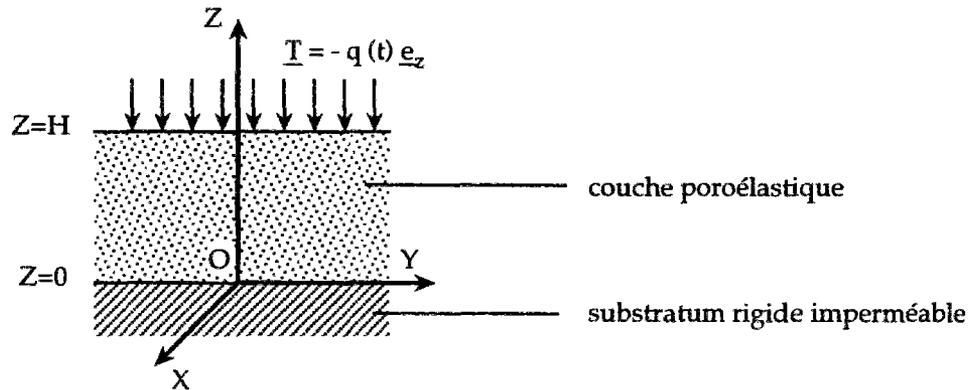


Figure 1 - Géométrie du problème et du chargement mécanique

La couche est drainée sur le plan $Z = H$, ce qui se traduit par la condition :

$$(3) \quad \forall t < 0 \quad p(Z=H, t) = 0$$

Le fluide et le squelette étant au repos, on déduit de la loi de Darcy (1) que dans la situation initiale, la pression du fluide est nulle dans toute la couche.

On note d'autre part $\underline{\sigma}^0(Z) = \underline{\sigma}(Z, t < 0)$ le tenseur des contraintes dans la configuration initiale. La couche étant soumise sur sa face supérieure à une charge verticale, on a :

$$(4) \quad \underline{\sigma}^0(Z=H) \cdot \underline{e}_z = -q_0 \underline{e}_z$$

Compte tenu des symétries géométriques et matérielles, on suppose que la verticale est une direction principale de $\underline{\underline{\sigma}}^o$. On montre alors sans peine à partir de l'équation d'équilibre que la contrainte verticale prend la même valeur dans toute la couche :

$$(5) \quad \forall Z \quad \underline{\underline{\sigma}}^o(Z) \cdot \underline{e}_z = -q_o \underline{e}_z$$

I.1.2. Forme de la solution. Notations.

A $t = 0$, on impose instantanément une surcharge verticale sur la face supérieure de la couche. La surcharge est ensuite maintenue indéfiniment, et la pression du fluide est maintenue à zéro sur la face supérieure de la couche. On note $\underline{T} = -q(t) \underline{e}_z$ le vecteur contrainte appliqué sur la face supérieure de la couche, c'est-à-dire sur la surface image du plan $Z = H$ par la transformation géométrique du squelette. La figure suivante représente l'évolution de la contrainte verticale appliquée : la fonction $q(t)$ est discontinue à $t = 0$ lors de l'application de la surcharge (figure 2).

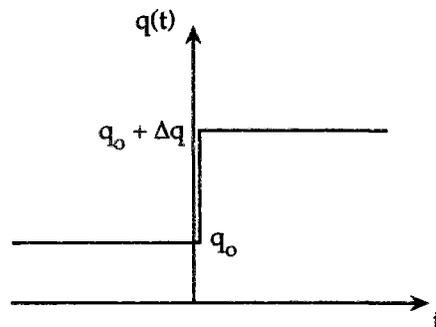


Figure 2 - Evolution de la contrainte verticale appliquée sur la surface supérieure de la couche (on applique instantanément une surcharge à $t=0$).

On étudie la dissipation des surpressions induites par la surcharge et l'évolution de la déformation du squelette. On considère ici le cas d'une couche homogène et transversalement isotrope autour de l'axe vertical OZ . En particulier, la direction verticale est une direction principale du tenseur de perméabilité, et l'on note k la valeur de la perméabilité dans cette direction.

Comme au chapitre 1, on note $\underline{X}(X,Y,Z)$ les coordonnées du point géométrique où se situe une particule de squelette donnée dans la configuration de référence, et $\underline{x}(x,y,z)$ les coordonnées du point où elle se trouve dans la configuration actuelle (à l'instant t).

Compte tenu des symétries que présentent la géométrie, les conditions initiales, et les propriétés matérielles, on cherche une solution dans laquelle les champs de contrainte, de

pression et de déplacement du squelette ne dépendent pas des variables X et Y . En particulier, on cherche le champ de déplacement du squelette sous la forme $\underline{\xi} = \xi(Z,t) \underline{e}_z$. On a alors :

$$(6) \quad \underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X \\ y = Y \\ z = Z + \xi(Z,t) \end{cases}$$

Le gradient de la transformation géométrique du squelette est donné par :

$$(7) \quad \underline{\underline{F}}(Z,t) = \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \xi}{\partial Z}(Z,t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Il est commode d'introduire la dilatation dans la direction verticale λ :

$$(8) \quad \lambda(Z,t) = \frac{\partial z}{\partial Z} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial Z}(Z,t)$$

L'interprétation géométrique de λ est simple : une 'tranche' horizontale d'épaisseur infinitésimale dZ dans la configuration de référence est transformée en une tranche horizontale d'épaisseur λdZ dans la configuration actuelle.

La couche étant supposée encore homogène et isotrope transverse dans la configuration actuelle, les symétries de la géométrie et des conditions aux limites assurent que les directions principales du tenseur des contraintes de Cauchy sont \underline{e}_x , \underline{e}_y et \underline{e}_z :

$$(9) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} = \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

où les fonctions σ_{xx} et σ_{zz} dépendent de la coordonnée verticale z et du temps, mais pas des coordonnées horizontales.

Enfin, on cherche le vecteur courant de masse fluide et le champ de pression sous la forme :

$$(10) \quad \underline{w}(\underline{x},t) = w(z,t) \underline{e}_z$$

$$(11) \quad p(\underline{x},t) = p(z,t)$$

Dans la suite, il est commode d'adopter la convention suivante pour alléger les notations : la valeur prise par une grandeur b à l'instant t sur le plan d'altitude z de la configuration actuelle sera représentée indifféremment par un champ eulérien $b(z,t)$ ou par un champ lagrangien désigné par la même lettre $b(Z,t)$, où Z et z sont reliés par la transformation du squelette (6). Dans la suite par exemple, on désignera par $p(Z=H,t)$ la valeur prise à l'instant t par la pression du fluide sur le plan horizontal image du plan $Z = H$ par la transformation géométrique du squelette entre la configuration initiale et la configuration à l'instant t .

I 1. 3. Equations de champ et conditions aux limites.

Les équations de champ du problème sont la loi de Darcy (1), l'équation d'équilibre (2) et la conservation de la masse fluide :

$$(12) \quad \dot{m} + J \operatorname{div} \underline{w} = 0$$

Compte tenu de (7), (8), (9), (10) et (11), la projection de la loi de Darcy et de l'équilibre sur la verticale et la conservation de la masse fluide donnent :

$$(13) \quad w / \rho^f = -k \frac{\partial p}{\partial z} = -k \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial Z}$$

$$(14) \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

$$(15) \quad \dot{m} = -\lambda \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial Z}$$

On rappelle que l'on impose instantanément à l'instant $t = 0$ une surcharge verticale Δq sur la face supérieure de la couche. La surcharge est ensuite maintenue indéfiniment (figure 2) :

$$(16) \quad \forall t > 0 \quad \sigma_{zz}(Z=H,t) = -(q_0 + \Delta q)$$

Il résulte alors de (14) que la contrainte verticale σ_{zz} est homogène dans la couche :

$$(17) \quad \forall z \quad \forall t > 0 \quad \sigma_{zz}(z,t) = -(q_0 + \Delta q)$$

On suppose qu'il n'y a pas de mouvement relatif de la couche par rapport au substratum, ce qui s'écrit :

$$(18) \quad \xi(Z=0,t) = 0$$

D'autre part, la surface supérieure de la couche est drainée. La pression du fluide demeure donc nulle sur le plan horizontal transporté du plan $Z = H$ dans le mouvement du squelette :

$$(19) \quad p(Z=H,t) = 0$$

Enfin, le substratum sur lequel repose la couche est supposé imperméable. Le fluide ne peut pas traverser l'interface entre la couche poreuse et le substratum :

$$(20) \quad w(Z=0,t) = 0$$

ce qui, compte tenu de (13), implique que le gradient de la pression dans la direction verticale à la base de la couche est nul :

$$(21) \quad \frac{\partial p}{\partial Z}(Z=0,t) = 0$$

Il est utile de remarquer que, d'après (7), (9) et la formule de transport (98)₁, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est aussi un tenseur diagonal dans les axes (x,y,z), et que l'on a en particulier :

$$(22) \quad \pi_{zz} = \sigma_{zz} / \lambda$$

Dans la suite, on s'intéressera aux différences entre les résultats obtenus selon que l'on fait ou non l'hypothèse que la transformation géométrique du squelette est infinitésimale. Dans le contexte du problème étudié ici, cette hypothèse s'écrit :

$$(23) \quad |\lambda - 1| \ll 1$$

Sous cette hypothèse, on fait l'approximation $\lambda \equiv 1$ dans la formule de transport (22) dans la loi de Darcy (13) et dans la conservation de la masse (15) :

$$(24) \quad \pi_{zz} \equiv \sigma_{zz}$$

$$(25) \quad w / \rho^f = -k \frac{\partial p}{\partial z} \equiv -k \frac{\partial p}{\partial Z}$$

$$(26) \quad \dot{m} = -\frac{\partial w}{\partial Z} \equiv -\frac{\partial w}{\partial z}$$

I.1.4. Caractéristiques matérielles.

Il reste à préciser les caractéristiques du matériau étudié, c'est-à-dire sa perméabilité et les fonctions intervenant dans les relations de comportement.

I.1.4.a. Perméabilité.

Dans le chapitre 1, la perméabilité est introduite dans un contexte thermodynamique. Pour assurer la non-négativité de la dissipation associée au mouvement du fluide à travers le milieu poreux $\phi_3 = \frac{w}{\rho^f} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f(\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f))$, on adopte une loi de conduction linéaire (cf. (104)₁) :

$$(27) \quad \frac{w}{\rho^f} = \underline{k} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f(\underline{F}^f - \underline{\gamma}^f))$$

où le tenseur \underline{k} est un tenseur défini positif. L'existence d'une relation linéaire entre w et $\underline{\text{grad}} p$ en l'absence de forces de volume et dans le cadre de l'approximation quasistatique peut être établie de manière théorique par une procédure d'homogénéisation à partir de l'étude de l'écoulement d'un fluide visqueux à travers un réseau périodique (Ene et Sanchez-Palencia (1975)). Cette approche montre aussi que le tenseur \underline{k} est symétrique, positif et inversement proportionnel à la viscosité du fluide.

Néanmoins, l'origine de la loi de Darcy est clairement phénoménologique. L'expérience de référence, imaginée par Darcy, est schématisée sur la figure 3. Elle consiste à placer un échantillon poreux de section S et de hauteur L dans l'enceinte d'un perméamètre et à maintenir une différence de charge hydraulique constante entre les faces supérieure et inférieure de l'échantillon. Il s'établit un courant de fluide à travers l'échantillon.

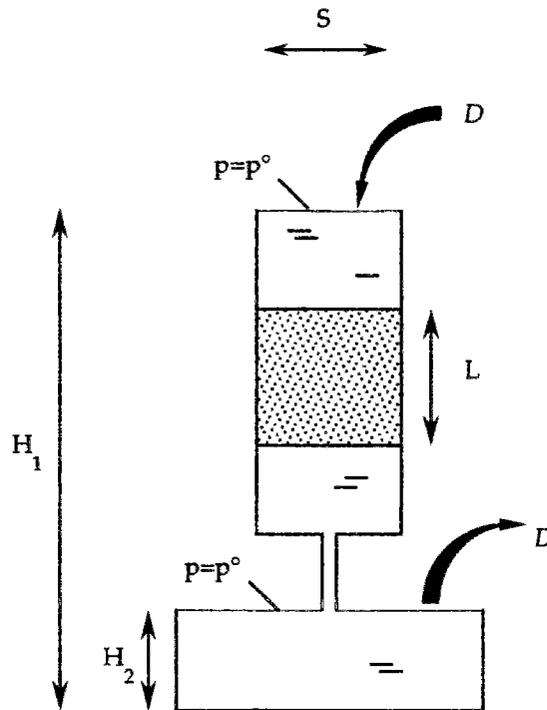


Figure 3 - Principe du perméamètre

Darcy observa que le débit volumique D est approximativement proportionnel à la différence de charge $\Delta h = \rho^f g (H_1 - H_2)$:

$$(28) \quad D / S = k \Delta h / L$$

où le coefficient de proportionnalité k porte le nom de perméabilité.

Supposant alors que l'écoulement est unidirectionnel et uniforme dans l'éprouvette (c'est-à-dire que le vecteur courant de masse fluide est de la forme $\underline{w} = w \underline{e}_z$, où w prend la même valeur en tout point de l'éprouvette), on peut identifier $\underline{w} \cdot S \underline{e}_z$ à $-\rho^f D$, et proposer, compte tenu de (28), une écriture vectorielle de la loi de conduction :

$$(29) \quad \underline{w} / \rho^f = -k \underline{\text{grad}} h$$

La formule (27) constitue une extension de cette écriture. La loi de conduction linéaire de Darcy décrit en général de manière satisfaisante l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux. Sa validité n'est évidemment pas universelle : d'autres modèles sont utilisés par exemple pour les

très forts débits de fluide (voir par exemple Guéguen et Palciauskas (1994), Dullien (1992) ou Basak (1978)).

L'expérience de Darcy permet en principe d'estimer en laboratoire la perméabilité d'un échantillon de milieu poreux, bien que cette détermination devienne délicate pour des milieux extrêmement peu perméables (pour ce type d'essai, le perméamètre est utilisé avec une charge variable plutôt qu'avec une charge constante). Il reste à décider si les mesures réalisées en laboratoire sur un échantillon de taille réduite représentent valablement la perméabilité in situ d'un milieu très étendu, éventuellement inhomogène et traversé de fissures ou de failles susceptibles de faciliter ou de faire obstacle à la circulation du fluide, et dont la répartition spatiale est mal connue. D'autre part, la mesure de la perméabilité in situ constitue un problème très difficile (abordé par exemple par Cosenza (1996)).

Du point de vue de la modélisation, différentes formules ont été proposées pour représenter les variations de la perméabilité (cf. Dullien, 1992). On emploie le plus souvent la formule de Koseny-Carman qui relie la perméabilité à la porosité :

$$(30) \quad k = k_0 \phi^3 / (1-\phi)^2$$

La validité de cette formule, déduite de calculs d'écoulement de fluide dans une conduite, est souvent contestée. En particulier, elle représente la perméabilité par une fonction de la seule porosité, et ne permet donc pas de rendre compte de l'anisotropie induite par le chargement lorsque le squelette subit de grandes transformations géométriques.

Il convient pour finir de signaler que l'on rencontre parfois d'autres définitions de la perméabilité. Avec la définition que nous avons adoptée, la perméabilité s'exprime en $\text{Pa}^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (cf. (29), où \underline{w}/ρ^f s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\underline{\text{grad}} h$ en Pa/m). Dans la pratique de l'ingénieur et en mécanique des sols notamment, il est commode de rapporter la charge hydraulique au gradient de la pression hydrostatique. On écrit alors :

$$(31) \quad \underline{w}/\rho^f = -\underline{k}' \cdot \underline{\text{grad}} (h/\rho^f g)$$

Il est facile de voir que \underline{k}' a la dimension d'une vitesse et s'exprime donc en m/s . On a vu par ailleurs que la perméabilité (telle que nous l'avons définie) est inversement proportionnelle à la viscosité du fluide. Certains auteurs définissent donc la perméabilité intrinsèque du milieu \underline{k}'' en écrivant la loi de conduction de la masse fluide sous la forme :

$$(32) \quad \underline{w}/\rho^f = -\underline{k}''/\mu \cdot \underline{\text{grad}} h$$

où μ est la viscosité cinématique du fluide, qui s'exprime en poises ou multiples de poises. (Rappel : le poiseuille vaut $1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} = 1 \text{ Pa.s}$; $1 \text{ poise} = 0,1 \text{ poiseuille} = 1 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1} = 10^{-1} \text{ Pa.s}$. Une valeur typique de la viscosité de l'eau est de $1.14 \cdot 10^{-2}$ poise). Une perméabilité de 1 Darcy (D) correspond à $\underline{w}/\rho^f = 1 \text{ cm/s}$ pour un gradient de 1 atm/cm et une viscosité de 10^{-2} poise. En unités réglementaires $1 \text{ D} = 0.97 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$.

Le tableau suivant donne les ordres de grandeur des perméabilités selon le type de sol, lorsque le fluide saturant est l'eau.

type de sols	argile	silt	sable fin	sable grossier	gravier
$k' \text{ (m/s)}$	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-2}	1
$k \text{ (Pa}^{-1}.\text{m}^2.\text{s}^{-1}\text{)}$	10^{-13}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-4}
$k'' \text{ (D)}$	10^{-4}	10^{-2}	1	10^3	10^5

Figure 4 - Ordre de grandeur de la perméabilité selon le milieu considéré et correspondance approximative pour les différentes définitions de la perméabilité (les valeurs de k' sont tirées de Cordary (1994))

I.1.4.b. Identification des paramètres de la loi de comportement.

La formulation générale du comportement poroélastique relie les six composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et la pression du fluide p aux six composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}$ et à l'apport de masse fluide m . Dans le problème de la consolidation, la transformation géométrique du squelette est caractérisée par une seule variable scalaire (la dilatation dans la direction verticale λ), et seule la composante σ_{zz} du tenseur des contraintes apparaît dans le problème tel qu'il est posé en §I.1.3. Pour le problème étudié, il n'est donc pas nécessaire d'identifier toutes les composantes de $\underline{\underline{C}}_0$ et leur dépendance générale vis-à-vis de la déformation du squelette. La démarche d'identification expérimentale de la loi de comportement dépend donc du problème étudié : c'est la raison pour laquelle nous ne l'abordons qu'à ce stade.

- Le test œdométrique.

Le test œdométrique est un moyen d'identification du comportement couramment employé en géotechnique et qui présente une grande similarité avec le problème de la consolidation. On place un échantillon de milieu poreux dans une enceinte cylindrique rigide, de

section S et on le soumet sur sa face supérieure à une charge verticale $\underline{F} = -F \underline{e}_z$ au moyen d'un piston rigide (figure 5). L'enceinte dans laquelle on place l'échantillon étant rigide, la section S de l'échantillon est constante. Le fluide contenu dans l'échantillon est mis en contact au moyen d'un circuit de drainage avec un réservoir contenant le même fluide soumis à une pression p . Le dispositif expérimental permet de faire varier la force verticale appliquée $\underline{F} = -F \underline{e}_z$ et la pression p , et de mesurer la variation de l'épaisseur de l'échantillon et la masse de fluide qui entre ou sort de l'échantillon. Il permet également d'imposer le déplacement vertical du piston et la valeur de p , et de mesurer les variations de la force \underline{F} exercée par l'échantillon sur le piston et la masse de fluide qui entre ou sort de l'échantillon.

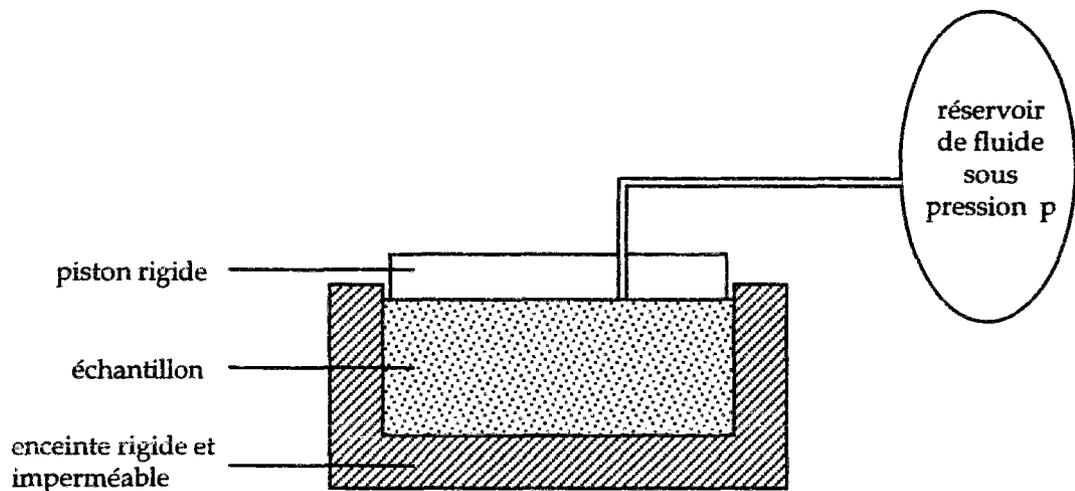


Figure 5 - Test œdométrique (schématisation du dispositif expérimental)

On place donc un échantillon du milieu poreux dont on souhaite caractériser le comportement dans l'enceinte de l'œdomètre, sous une pression de fluide égale à la valeur p^0 de la pression dans la configuration de référence du problème de la consolidation (ici $p^0=0$, cf. §1.1.1) et sous une force verticale $\underline{F} = -q_0 S \underline{e}_z$. L'épaisseur de l'échantillon dans cet état pris comme état de référence est notée H . La masse de fluide échangée par l'échantillon avec l'extérieur est mesurée par rapport à cet état de référence : on note M la masse de fluide entrant dans l'échantillon. On mesure également le déplacement vertical $-\delta H \underline{e}_z$ du piston par rapport à cet état de référence.

Si l'essai est homogène, ce qui suppose que l'on fait varier les paramètres de contrôle (F et p ou δH et p) suffisamment lentement pour que la pression à l'intérieur de l'échantillon ait à chaque instant et en tout point la valeur imposée par le réservoir, on établit une correspondance simple entre les grandeurs introduites dans la modélisation et les paramètres de l'essai par :

$$(33) \quad \sigma_{zz} = -F/S$$

$$(34) \quad \lambda = 1 - \delta H/H$$

$$(35) \quad m = M / (SH)$$

(On rappelle que m est une densité volumique par rapport au volume occupé par le squelette dans la configuration de référence). La pression du fluide dans le milieu poreux s'identifie à la pression du fluide dans le réservoir.

Au moins d'un point de vue théorique, on peut considérer des expériences dans lesquelles on commence par imposer progressivement au piston un déplacement vertical vers le bas jusqu'à ce que l'épaisseur de l'échantillon atteigne la valeur h , en maintenant la pression à la valeur de référence p^0 . On fait ensuite varier la pression du fluide jusqu'à la valeur p en maintenant le piston immobile. Dans tout l'échantillon, la pression du fluide est alors égale à p et la dilatation λ est égale à $\lambda = h/H$. On envisage ensuite deux types d'expériences :

- d'une part des essais "drainés", dans lesquels la pression est maintenue constante. On déplace le piston et l'on mesure F et M . On obtient deux fonctions donnant σ_{zz} et m en fonction de λ et de la pression p , considérée comme un paramètre :

$$(36) \quad \sigma_{zz} = F_{\sigma p}(\lambda, p)$$

$$(37) \quad m = F_{mp}(\lambda, p)$$

- d'autre part des essais dans lesquels on bloque le déplacement du piston et l'on fait varier la pression du fluide. La mesure de m en fonction de p dans un essai de ce type définit une troisième fonction :

$$(38) \quad m = F_{m\lambda}(\lambda, p)$$

(Le premier indice des fonctions $F_{\alpha\beta}$ indique la grandeur mesurée et le deuxième la grandeur maintenue constante au cours de l'expérience). On cherche dans la suite à identifier la loi de comportement à partir de la connaissance des fonctions $F_{\sigma p}$, F_{mp} et $F_{m\lambda}$.

Nous présentons maintenant la démarche à suivre en pratique pour identifier le comportement, qui dépend du type de formulation employée. Nous ferons en pratique pour l'étude de la consolidation l'hypothèse que le solide constituant le squelette est incompressible. Il est cependant intéressant d'examiner d'abord la démarche permettant d'identifier le comportement dans le cas où l'on ne fait pas cette hypothèse : il apparaît alors clairement que le nombre d'expériences à réaliser lorsque le solide est incompressible est nettement plus faible que lorsqu'il ne l'est pas.

- comportement poroélastique en transformation finie.

Nous avons obtenu pour le comportement poroélastique non-linéaire en transformation finie les relations (21)₂-(22)₂, dans lesquelles $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}_0$ peuvent être considérés comme des fonctions de $\underline{\underline{\Delta}}$ et p . Dans le contexte de l'essai œdométrique, compte tenu de (7) et (8), le tenseur $\underline{\underline{\Delta}}$ est égal à :

$$(39) \quad \underline{\underline{\Delta}} = 1/2 (\lambda^2 - 1) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

dont on déduit en particulier que :

$$(40) \quad d\Delta_{zz} = \lambda d\lambda$$

Les déformations de Green-Lagrange sont donc caractérisées par la seule variable scalaire λ , et le problème de l'identification du comportement se ramène à déterminer $C_0(\lambda, p)$, $M(\lambda, p)$ et $b(\lambda, p)$ tels que dans une évolution quelconque, on ait :

$$(41) \quad dm = \rho^f (b(\lambda, p) \lambda d\lambda + \frac{dp}{M(\lambda, p)})$$

$$(42) \quad d(\pi_{zz}) = d(\sigma_{zz}/\lambda) = C_0(\lambda, p) \lambda d\lambda - b(\lambda, p) dp$$

où b désigne la composante de $\underline{\underline{B}}$ suivant $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, et C_0 le coefficient $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z : \underline{\underline{C}}_0 : \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. On considère un essai du type de celui employé pour définir les fonctions $F_{\sigma p}$ et F_{mp} . Différentiant (36) et (37) et confrontant le résultat aux expressions (41) et (42) avec $dp = 0$, nous obtenons :

$$(43) \quad C_0^{\text{fin}}(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{F_{\sigma p}(\lambda, p)}{\lambda} \right)$$

$$(44) \quad b^{\text{fin}}(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda \rho^f(p)} \frac{\partial F_{mp}(\lambda, p)}{\partial \lambda}$$

où l'exposant ^{fin} rappelle que ces formules permettent d'identifier les coefficients C_0 et b intervenant dans une modélisation poroélastique en transformation finie.

Considérant maintenant un essai du type de celui employé pour définir la fonction $F_{m\lambda}$, et différentiant (38) et comparant le résultat avec (41) (avec $d\lambda=0$), nous obtenons :

$$(45) \quad M^{\text{fin}}(\lambda, p) = \frac{\rho^f(p)}{\frac{\partial F_{m\lambda}(\lambda, p)}{\partial p}}$$

L'identification à laquelle on a procédé assure que le modèle reproduit les résultats expérimentaux des expériences utilisées pour définir $F_{\sigma p}$, F_{mp} et $F_{m\lambda}$. Evidemment, la formulation ainsi obtenue ne fournit pas nécessairement un accord parfait avec toutes les expériences possibles. Si l'on constate qu'elle ne permet pas de rendre compte des résultats d'expériences plus complexes, il faut remettre en cause certaines des hypothèses sur lesquelles repose la construction de la loi de comportement (par exemple l'hypothèse que le milieu est poroélastique).

On notera que C_0 dépend a priori de p , et il est donc nécessaire de réaliser des essais drainés pour différentes valeurs de la pression pour identifier complètement le comportement.

- comportement non-linéaire en transformation infinitésimale.

Nous avons caractérisé le comportement poroélastique non-linéaire en transformation infinitésimale par les formules (34)₂ et (35)₂. Dans le contexte de l'essai œdométrique, l'hypothèse de transformation infinitésimale s'écrit $(\lambda - 1) \ll 1$. Posons $\varepsilon = (\lambda - 1)$: le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est donné par $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$. La formulation du comportement se ramène alors à :

$$(46) \quad dm = \rho^f (b(\varepsilon, p) d\varepsilon + \frac{dp}{M(\varepsilon, p)})$$

$$(47) \quad d\sigma_{zz} = C_o(\varepsilon, p) d\varepsilon - b(\varepsilon, p) dp$$

Reproduisant le raisonnement fait en (a), nous obtenons pour le module drainé dans la direction verticale :

$$(48) \quad C_o^{inf}(\varepsilon, p) = \frac{\partial F_{\sigma p}}{\partial \lambda}(1 + \varepsilon, p)$$

et pour les coefficient et module de Biot :

$$(49) \quad b^{inf}(\varepsilon, p) = \frac{1}{\rho^f(p)} \frac{\partial F_{mp}}{\partial \lambda}(1 + \varepsilon, p)$$

$$(50) \quad M^{inf}(\varepsilon, p) = \rho^f / \frac{\partial F_{m\lambda}}{\partial p}(1 + \varepsilon, p)$$

L'exposant ^{inf} rappelle que les formules (49) et (50) permettent l'identification des coefficients M , b et C_o introduits dans une modélisation poroélastique non-linéaire en transformation infinitésimale. La formule (46) montre que la détermination du module de Biot n'est pas affectée par l'hypothèse de transformation infinitésimale, c'est-à-dire que l'on a :

$$(51) \quad M^{inf}(\varepsilon, p) = M^{fn}(1 + \varepsilon, p)$$

Le résultat est un peu différent en ce qui concerne b^{inf} et C_o^{inf} : les différences entre (48)-(49) et (43)-(44) proviennent de la linéarisation de la formule de transport entre π et σ , et de l'approximation consistant à remplacer $\lambda d\lambda$ par $d\varepsilon$.

D'un point de vue pratique, il faut souligner que la masse de données expérimentales à réunir pour identifier les fonctions caractérisant dans le modèle le comportement du matériau n'est pas réduite par rapport au cadre général des transformations finies.

- comportement linéaire en transformation infinitésimale.

Dans le contexte de l'essai œdométrique, les équations (31)₂ et (32)₂ définissant le comportement poroélastique linéaire deviennent :

$$(52) \quad p = M (-b \varepsilon + m/\rho_0^f)$$

$$(53) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^o + C_o \varepsilon - b p$$

où b désigne la composante de $\underline{\underline{B}}$ selon $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. Dans ce modèle, les coefficients C_o , b et M sont des constantes matérielles. Il est d'usage, faute de connaître à l'avance le domaine des valeurs que peuvent prendre ε et p , d'adopter les valeurs calculées en $\varepsilon = 0$ et $p = p^o$:

$$(54) \quad C_o^{\text{lin}} = \frac{\partial F_{\sigma p}}{\partial \lambda} (\lambda=1, p=0)$$

$$(55) \quad b^{\text{lin}} = \frac{1}{\rho_0^f} \frac{\partial F_{m p}}{\partial \lambda} (\lambda=1, p=0)$$

$$(56) \quad M^{\text{lin}} = \rho_0^f / \frac{\partial F_{m \lambda}}{\partial p} (\lambda=1, p=0)$$

On remplace donc une fonction par une constante : le résultat peut être très mauvais, particulièrement pour des matériaux nettement non-linéaires, ce qui est généralement le cas des matériaux de la géotechnique.

- le cas particulier où le solide est incompressible.

Dans le cas particulier où le solide est incompressible, on a établi au chapitre 2 (§III.2) que $\underline{\underline{B}}$ est une fonction connue de la déformation de Green-Lagrange et que C_o est une fonction affine de la pression du fluide. Dans le contexte de la consolidation, les formules (71)₂, (72)₂ et (73)₂ donnent, compte tenu de (7), (8) et (40) :

$$(57) \quad B_{zz} = \frac{1}{\lambda}$$

$$(58) \quad C_o(\lambda, p) = C_o^*(\lambda) - p \frac{\partial B_{zz}}{\partial e_{zz}} = C_o^*(\lambda) + \frac{p}{\lambda^3}$$

où $C_o^*(\lambda) = C_o(\lambda, p=0)$ désigne la valeur du module d'élasticité drainé mesuré dans une expérience à pression nulle. Contrairement au cas général, la détermination de C_o ne nécessite donc qu'un seul test œdométrique fournissant $C_o^*(\lambda)$, la dépendance de $C_o(\lambda, p)$ étant obtenue par voie théorique.

En pratique, lorsque le solide constituant le réseau poreux est incompressible, on a vu que la loi de comportement se met sous la forme d'une relation entre le tenseur des contraintes

effectives de Cauchy habituel et le gradient de la transformation du squelette \underline{F} . Dans le contexte de la consolidation, on a donc :

$$(59) \quad \sigma_{zz} + p = Q(\lambda)$$

où la fonction Q reste à identifier expérimentalement. On prend évidemment :

$$(60) \quad Q(\lambda) \equiv F_{\sigma p}(\lambda, p = 0)$$

On notera que $Q(1) = -q_0$. La connaissance d'une seule fonction d'une seule variable $Q(\lambda)$ suffit à identifier le comportement lorsque le solide est incompressible (au lieu des trois fonctions de deux variables $F_{\sigma p}(\lambda, p)$, $F_{m p}(\lambda, p)$ et $F_{m \lambda}(\lambda, p)$), puisque l'on dispose des expressions (70)₂ et (71)₂ du coefficient et du module de Biot en fonction du module de compressibilité du fluide et de la déformation du squelette dans lesquelles il ne reste aucun paramètre à identifier.

Sous l'hypothèse de transformation infinitésimale et en tenant compte des non-linéarités du comportement, on représentera le comportement par la relation :

$$(61) \quad \sigma_{zz} + p = Q(1 + \epsilon)$$

Dans le contexte de la poroélasticité linéaire, d'après (54) et (60), le module drainé dans la direction verticale C_0^{lin} est donné par :

$$(62) \quad C_0^{\text{lin}} = \left[\frac{dQ}{d\lambda} (\lambda = 1) \right]$$

et la loi de comportement s'écrit :

$$(63) \quad \sigma_{zz} + p = -q_0 + C_0^{\text{lin}} \epsilon$$

Dans le contexte de la consolidation d'une couche de sol, nous choisissons de représenter la donnée expérimentale $Q(\lambda)$ par une expression du type :

$$(64) \quad Q(\lambda) = -q_0 \exp((1-\lambda)/\delta)$$

où δ est un paramètre matériel positif sans dimension, dont la valeur est d'autant plus grande que le matériau considéré est plus compressible.

En mécanique des sols, il est habituel de représenter le résultat d'un essai de compression œdométrique drainé (à $p = 0$) par la formule suivante :

$$(65) \quad e = e_0 - C_c \log_{10} |Q/q_0|$$

qui relie l'indice des vides e à la contrainte verticale imposée $-Q$. Le coefficient C_c est appelé indice de compression C_c . On rappelle que l'indice des vides est une grandeur familière en mécanique des sols, égale au rapport $\frac{\phi}{1-\phi}$. En mécanique des sols, on considère en général que le

solide est incompressible : la porosité est donc reliée à la dilatation volumique (ici égale à la dilatation verticale λ) par la relation (130)₁. On peut donc exprimer l'indice des vides e en fonction de la dilatation λ :

$$(66) \quad e = \frac{\lambda}{1 - \phi_0} - 1 = \lambda (1 + e_0) - 1$$

Rapprochant les expressions (64) et (65), il est facile d'identifier le lien entre le paramètre δ et l'indice de compression C_c :

$$(67) \quad \delta = \frac{1}{2.3} \frac{C_c}{1 + e_0}$$

1.2. RESOLUTION.

On fait pour la résolution l'hypothèse que le fluide est incompressible. Cette hypothèse permet de simplifier l'écriture de la loi de Darcy et la discussion de la condition initiale (§1.2.1) : elle est en général légitime en géotechnique, compte tenu de l'épaisseur des structures que l'on considère.

Dans le contexte de la consolidation, l'expression (132)₁ de l'apport de masse fluide pour deux constituants incompressibles s'écrit :

$$(68) \quad m = \rho^f (\lambda - 1)$$

L'expression correspondante en transformation infinitésimale est simplement :

$$(69) \quad m = \rho^f \varepsilon$$

1.2.1. Condition initiale.

A l'instant $t=0$, la contrainte verticale dans la couche passe instantanément de la valeur $-q_0$ à la valeur $-q_0 - \Delta q$. On détermine la valeur de la pression du fluide et de la dilatation verticale immédiatement après l'application de la surcharge ($t=0^+$) en exploitant le fait que la conduction du fluide n'est pas un phénomène instantané : le fluide initialement présent dans un élément de milieu poreux quelconque s'y trouve encore à l'instant $t=0^+$. Autrement dit, l'apport de masse fluide est une fonction continue du temps (Coussy, 1991) :

$$(70) \quad m(t = 0^+) = 0$$

(68) montre alors qu'il n'y a pas non plus de variation instantanée de λ à $t=0^+$ (donc pas de tassement instantané de la couche) :

$$(71) \quad \lambda(Z, t = 0^+) = 1$$

D'après (17), (22) et (59), on peut conclure de (71) qu'à l'instant $t=0^+$, π_{zz} et p sont donnés par :

$$(72) \quad \pi_{zz}(Z, t=0^+) = \sigma_{zz}(Z, t=0^+) = -(q_0 + \Delta q) \quad p(Z, t=0^+) = \Delta q$$

Dans le cadre des modèles en transformation infinitésimale (pour un comportement linéaire ou non-linéaire), la condition (71) s'écrit simplement :

$$(73) \quad \varepsilon(Z, t=0^+) = 0$$

et (72) devient évidemment :

$$(74) \quad \sigma_{zz}(Z, t=0^+) = -(q_0 + \Delta q) \quad p(Z, t=0^+) = \Delta q$$

1.2.2. poroélasticité linéaire.

Combinant la loi de conservation de la masse fluide (26), la loi de Darcy (25) (dans laquelle la perméabilité est considérée comme une constante) avec la liaison (69) et la loi de comportement (63), on obtient l'équation de la consolidation classique qui gouverne l'évolution de la pression du fluide pendant la durée de la phase transitoire :

$$(75) \quad \dot{p} = c_m \Delta p$$

où le coefficient de diffusion de la masse fluide c_m est donné par :

$$(76) \quad c_m = k C_o^{\text{lin}}$$

ou encore, compte tenu de (62) et (64) :

$$(77) \quad c_m = k \frac{q_0}{\delta}$$

En pratique, afin de faciliter la comparaison avec les problèmes obtenus en poroélasticité infinitésimale non linéaire et en transformation finie, on préfère ici formuler le problème en termes de déformation plutôt qu'en termes de pression. On déduit d'abord de l'équation (63) avec (5) et (17) qu'en tout point et à chaque instant $t>0$, on a :

$$(78) \quad p = \Delta q + C_o^{\text{lin}} \varepsilon$$

On déduit alors de l'équation aux dérivées partielles en pression (75) et des conditions aux limites en pression (19) et (21) l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites portant sur la déformation ε :

$$(79) \quad \dot{\varepsilon} = c_m \Delta \varepsilon$$

$$(80) \quad \varepsilon(Z=H, t) = -\Delta q / C_o^{\text{lin}}$$

$$(81) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} (Z=0, t) = 0$$

Cherchant à mettre l'équation (79) sous une forme adimensionnelle, on introduit de manière classique un temps caractéristique T_0 associé au processus de consolidation :

$$(82) \quad T_0 = \frac{H^2}{c_m} = \frac{H^2 \delta}{k q_0}$$

On détermine d'abord les solutions à variables séparées de l'équation aux dérivées partielles (79) avec les conditions aux limites (80) et (81). On forme ensuite une série qui vérifie la condition initiale (73). On trouve :

$$(83) \quad \varepsilon(Z, t > 0) = -\Delta q / C_0^{\text{lin}} \left(1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos \left((2k+1) \frac{\pi Z}{2H} \right) \exp \left(- \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{t}{T_0} \right) \right)$$

$$(84) \quad p(Z, t > 0) = \Delta q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos \left((2k+1) \frac{\pi Z}{2H} \right) \exp \left(- \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{t}{T_0} \right)$$

Au bout d'un temps infini, la pression est nulle dans toute la couche, et la dilatation verticale prend une valeur homogène dans la couche donnée par :

$$(85) \quad \varepsilon(Z, t \rightarrow \infty) = -\Delta q / C_0^{\text{lin}} = -\delta \Delta q / q_0$$

I.2.3. poroélasticité non linéaire en transformation infinitésimale.

Combinant la loi de Darcy (25) et la conservation de la masse fluide (26), on obtient :

$$(86) \quad \dot{m} = \rho^f \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial p}{\partial Z} \right)$$

ou encore, compte tenu de la liaison (69) entre m et ε :

$$(87) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial p}{\partial Z} \right)$$

Portant la loi de comportement (61) dans cette expression, on obtient l'équation d'évolution de la déformation ε sous la forme :

$$(88) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{dQ}{d\lambda} (1+\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)$$

Exprimons les conditions aux limites en termes de déformation. Combinant (17) et (61) avec (19) d'abord, puis avec (21), on obtient les conditions suivantes :

$$(89) \quad 1 + \varepsilon (Z = H, t > 0) = Q^{-1}(-q_b - \Delta q)$$

$$(90) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} (Z = 0, t > 0) = 0$$

Le problème aux limites décrivant la phase transitoire est donc défini par les équations (88), (89), (90) et la condition initiale (73). Lorsque la surpression est dissipée, p est nulle dans toute la couche et, d'après (61), la déformation prend dans toute la couche la valeur $\varepsilon^d = Q^{-1}(-q_0 - \Delta q) - 1$.

1.2.4. Poroélasticité finie.

En transformation finie, on obtient en combinant la loi de Darcy (13) avec la loi de conservation de la masse fluide (15) :

$$(91) \quad \dot{m} = -\frac{\partial w}{\partial Z} = \rho^f \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{k}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial Z} \right)$$

Portant (68), (17) et (59) dans (91), on obtient l'équation d'évolution de la dilatation en transformation finie :

$$(92) \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \left(\frac{dQ/d\lambda}{\lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \right)$$

On exprime les conditions aux limites (19) et (21) en termes de dilatation, au moyen de la loi de comportement (59) :

$$(93) \quad \lambda(Z = H, t > 0) = Q^{-1}(-q_0 - \Delta q)$$

$$(94) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial Z}(Z = 0, t > 0) = 0$$

L'évolution de la dilatation au cours de la phase transitoire est donnée par la résolution du problème défini par (92), (93), (94) et la condition initiale (71). Lorsque la surpression est dissipée, p est nulle dans toute la couche et la dilatation prend une valeur uniforme, égale à $\lambda^d = Q^{-1}(-q_0 - \Delta q)$: il n'y a donc pas de différence entre le tassement final de la couche estimé en transformation finie ou en transformation infinitésimale pour un même comportement non-linéaire donné par (59). En revanche, le tassement final estimé dans une théorie linéaire est en général erroné.

Le tableau suivant résume la formulation mathématique du problème à résoudre selon la formulation du comportement adoptée.

	comportement linéaire (transformation infinitésimale)	comportement non-linéaire en transformation infinitésimale	comportement non-linéaire en transformation finie
équation aux dérivées partielles	$\dot{\varepsilon} = c_m \Delta \varepsilon$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{dQ}{d\lambda} (1+\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)$	$\dot{\lambda} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \left(\frac{dQ/d\lambda}{\lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \right)$
conditions aux limites	$\varepsilon(H,t) = -\Delta q / C_o^{\text{lin}}$ $\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z}(0,t) = 0$	$1 + \varepsilon(H,t) = Q^{-1}(-q_o - \Delta q)$ $\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z}(0,t) = 0$	$\lambda(H,t) = Q^{-1}(-q_o - \Delta q)$ $\frac{\partial \lambda}{\partial Z}(0,t) = 0$
condition initiale	$\varepsilon(Z,t=0^+) = 0$	$\varepsilon(Z,t=0^+) = 0$	$\lambda(Z,t=0^+) = 1$

Figure 6 -Tableau récapitulant la structure mathématique du problème de la consolidation selon la formulation du comportement employée

L2.5. Comparaisons des résultats fournis par les formulations "transformation finie" et "transformation infinitésimale".

Cette section présente des résultats numériques concernant la consolidation d'une couche dont le comportement est représenté par la fonction $Q(\lambda)$ de la formule (64) avec $\delta=0.25$. La charge initiale q_o est de 100kPa et la surcharge est égale à $\Delta q= 500$ kPa.

D'après les données relatives à la compressibilité des argiles dues à (Lambe et Whitman, 1979, chapitre 22), la valeur de δ que nous adoptons correspond à un rapport $C_c/(1+e_o)$ égal à 0.575, typique d'une argile fortement compressible, comme une montmorillonite par exemple.

Il est facile de voir que pour les valeurs numériques choisies, le modèle linéaire en transformation infinitésimale donne une valeur inacceptable pour la valeur asymptotique de la déformation : la formule (85) conduit à une valeur de ε strictement inférieure à -1. On ne s'intéressera donc dans la suite qu'aux résultats fournis par les deux autres formulations.

Le problème aux limites formulé en poroélasticité finie, défini par les équations (92), (93), (94) et (71), est résolu par la méthode des différences finies. Les figures 7 et 8 représentent respectivement les profils de pression de fluide et de dilatation verticale dans la couche pour différents instants : $t_1 = 0.004 T_o$; $t_2 = 0.02 T_o$; $t_3 = 0.05 T_o$; $t_4 = 0.10 T_o$; $t_5 = 0.15 T_o$ où T_o est le temps caractéristique de la consolidation prévu par la théorie linéaire.

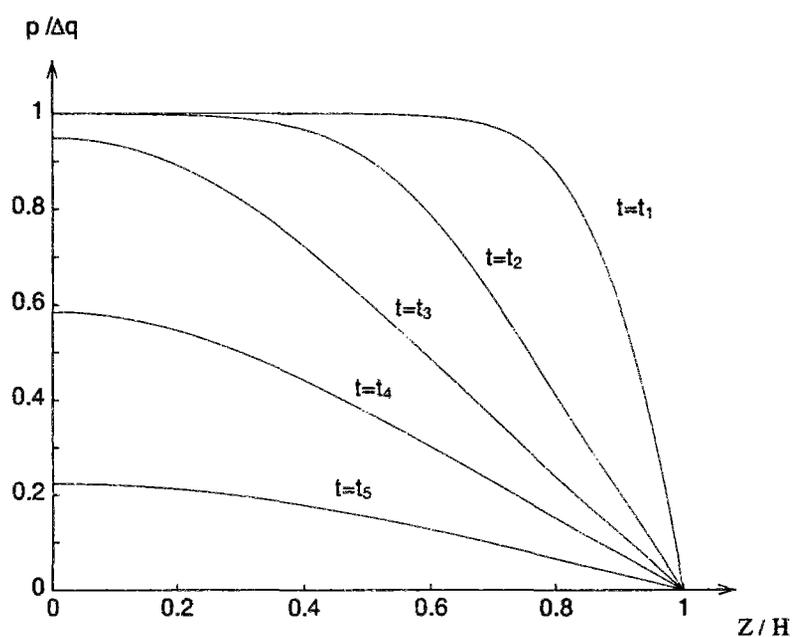


Figure 7- Evolution de la pression du fluide en fonction de la position dans la couche

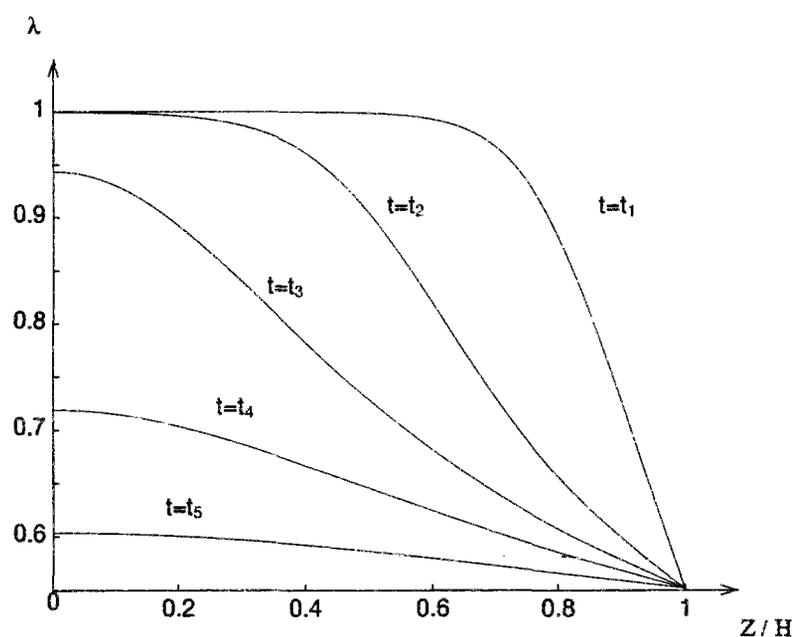


Figure 8- Evolution de la dilatation verticale en fonction de la position dans la couche

La forme du profil de pression est comparable au profil familier donné par la théorie linéarisée mais le profil de dilatation présente un point d'inflexion.

Il est intéressant de noter que la durée du phénomène de consolidation en transformation finie est nettement plus courte que le temps caractéristique T_0 de la théorie linéaire (82). Les

calculs numériques dont on présente les résultats ont été menés en faisant l'hypothèse que la perméabilité dans la direction verticale conserve une valeur constante : l'écart important entre la durée du phénomène et la valeur T_0 fournie par la théorie linéaire résulte donc uniquement du fait que la théorie linéaire ne tient pas compte du raidissement progressif du matériau. Cette théorie ne prend pas non plus en compte les éventuelles variations de perméabilité avec la diminution de porosité ; on peut donc conclure que le temps caractéristique de la théorie linéaire ne constitue qu'une estimation grossière de la durée du processus de consolidation et qu'une modélisation complète du phénomène (y compris de l'évolution de la perméabilité lorsque le squelette se déforme) est nécessaire pour obtenir une estimation fiable de la durée du processus de consolidation.

Les résultats des figures 7 et 8 pour les instants t_1 , t_3 et t_5 sont reproduits en courbes pleines sur les figures 9 et 10, et comparés avec la solution du problème posé en transformation infinitésimale (courbes pointillées), défini par les équations (88), (89), (90) et (73). Dans les deux cas, le comportement est donné par (59) : les différences proviennent des linéarisations géométriques, c'est-à-dire des approximations que l'on a faites dans la formulation des autres équations en raison du caractère infinitésimal de la transformation du squelette. En pratique, le fait de négliger les changements de géométrie conduit à négliger le fait que les distances de drainage diminuent lorsque l'épaisseur de la couche diminue, et donc à surestimer la durée du phénomène de consolidation. La figure 9 montre que l'erreur commise sur l'estimation de la durée de la dissipation de la pression dans le calcul en transformation infinitésimale est assez sensible.

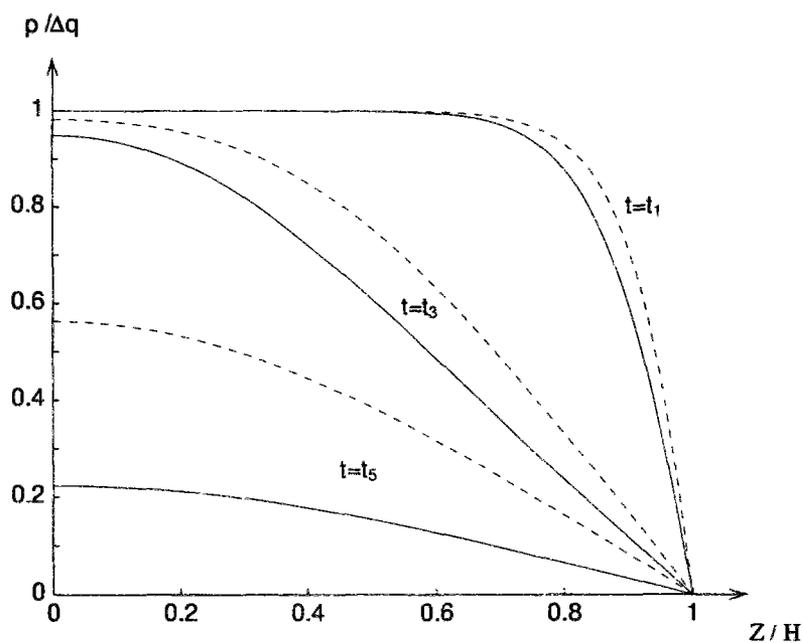


Figure 9- Evolution de la pression du fluide dans la couche : comparaison des résultats transformation finie (traits pleins) / transformation infinitésimale (pointillés)

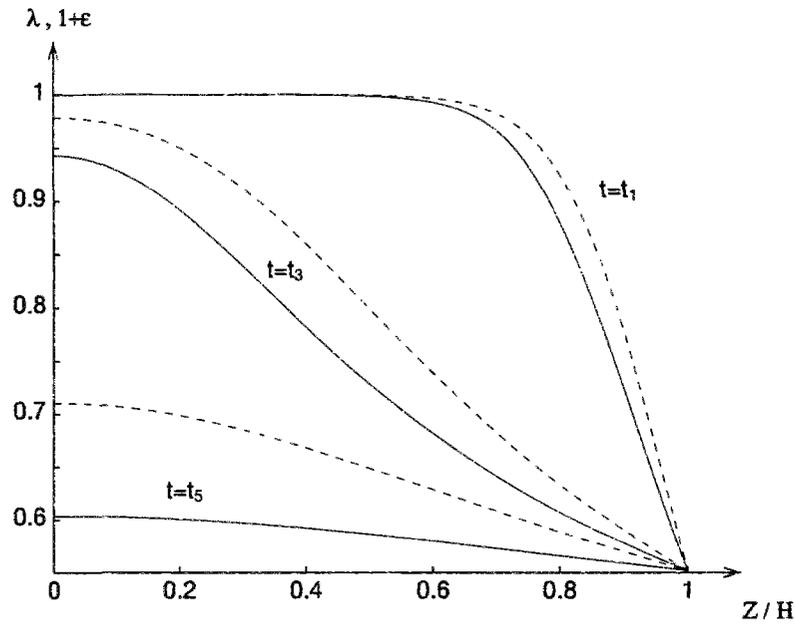


Figure 10- Evolution de la dilatation verticale dans la couche : comparaison des résultats transformation finie (traits pleins) / transformation infinitésimale (pointillés)

La figure 11 compare également l'évolution de la diminution d'épaisseur de la couche au cours du temps. Elle montre que le calcul en transformation infinitésimale surestime le temps au bout duquel on peut considérer que le tassement de la couche a atteint sa valeur asymptotique.

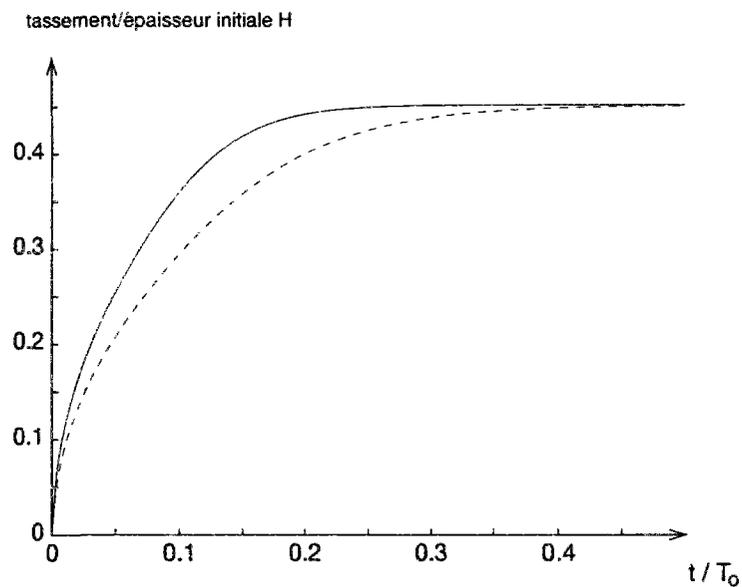


Figure 11- Diminution d'épaisseur de la couche au cours du temps transformation finie (traits pleins) / transformation infinitésimale (pointillés)

I.3. ROLE DE LA DÉPENDANCE DE C_0 PAR RAPPORT A p EN TRANSFORMATION FINIE.

On a vu que dans la formulation du comportement en transformation finie, le module C_0 est une fonction des deux variables λ et p , dont l'identification expérimentale nécessite en principe de réaliser un essai œdométrique drainé pour chaque valeur de p . En pratique, il est tentant de négliger la dépendance de C_0 par rapport à p pour diminuer le volume d'information expérimentale à obtenir. On discute ici les conséquences de cette approximation dans le cas particulier du solide incompressible, pour lequel on a établi par voie théorique que C_0 est en fait une fonction affine de la pression (cf. (58)).

Supposons donc l'on emploie la formulation incrémentale du comportement définie par (41) et (42) en négligeant la dépendance de C_0 par rapport à p , autrement dit, en faisant l'approximation suivante (cf. (58)) :

$$(95) \quad C_0(\lambda, p) \cong C_0^*(\lambda)$$

ou encore, compte tenu de (43) et (60) :

$$(96) \quad C_0(\lambda, p) \cong \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{F_{\sigma p}(\lambda, p=0)}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{Q(\lambda)}{\lambda} \right)$$

Portant (57) et (96) dans (42), on obtient, en tenant compte du fait que σ_{zz} est constant pour $t > 0^+$:

$$(97) \quad \forall t > 0 \quad dp = \left(\lambda \frac{d(Q/\lambda)}{d\lambda} - \frac{q_0 + \Delta q}{\lambda} \right) d\lambda$$

Au début de la phase transitoire, λ est égal à 1 dans toute la couche, et nous avons :

$$(98) \quad t=0^+ \quad \forall Z \quad dp = \left[\frac{d(Q/\lambda)}{d\lambda} (\lambda=1) - (q_0 + \Delta q) \right] d\lambda$$

On en déduit que (98) les signes de $\partial p / \partial t$ et de $\partial \lambda / \partial t$ peuvent être opposés si Δq est assez grand, précisément si :

$$(99) \quad q_0 + \Delta q > \frac{d(Q/\lambda)}{d\lambda} (\lambda=1)$$

Ce résultat surprenant (puisque l'on s'attend à ce que $\partial p / \partial t$ et $\partial \lambda / \partial t$ soient tous deux négatifs, comme dans la solution-linéaire en petites perturbations) est dû au seul fait que la dépendance de C_0 par rapport à p a été négligée.

D'autre part, (97) s'intègre entre $t=0^+$ et t ; compte tenu des conditions initiales (71)-(72), on montre que p et λ sont liés au cours de la consolidation par la relation :

$$(100) \quad \forall Z \in [0, H], \quad p(Z, t) = \Delta q + q_0 + Q(\lambda) - \int_1^\lambda \frac{Q(\lambda) + q_0 + \Delta q}{\lambda} d\lambda$$

Au bout d'un temps suffisamment long, la pression p est nulle dans toute la couche ; la dilatation dans la direction verticale atteint la valeur λ_∞ , solution d'après (100) de l'équation suivante :

$$(101) \quad Q(\lambda_\infty) + q_0 + \Delta q = \int_1^{\lambda_\infty} \frac{Q(\lambda) + q_0 + \Delta q}{\lambda} d\lambda$$

La fonction Q étant évidemment une fonction croissante de λ (cf. (59) avec $p=0$ par exemple), on note d'abord que :

$$(102) \quad \text{si } \lambda > \lambda^d = Q^{-1}(-q_0 - \Delta q) \quad \text{alors} \quad Q(\lambda) + (q_0 + \Delta q) > 0$$

et donc :

$$(103) \quad \text{si } \lambda \in [\lambda^d, 1] \quad \text{alors} \quad \int_\lambda^1 \frac{Q(u) + q_0 + \Delta q}{u} du > 0$$

et finalement :

$$(104) \quad \text{si } \lambda \in [\lambda^d, 1] \quad \text{alors} \quad Q(\lambda) + q_0 + \Delta q > 0 > \int_1^\lambda \frac{Q(u) + q_0 + \Delta q}{u} du$$

On conclut de (101) et (104) que $\lambda_\infty < \lambda^d$. Le fait de négliger la dépendance de C_0 avec la pression du fluide conduit donc à une valeur de la dilatation asymptotique λ_∞ inférieure à la valeur exacte λ^d , c'est-à-dire que l'on surestime le tassement asymptotique. Sur le plan conceptuel, on parvient à la conclusion que le tassement asymptotique est différent de celui que l'on obtient dans le cas drainé, ce qui est incorrect. L'erreur reste cependant relativement faible du point de vue quantitatif : les figures 12 et 13 comparent le tassement asymptotique de la couche rapporté à l'épaisseur initiale $1 - \lambda_\infty$ à la valeur exacte $1 - \lambda^d$ pour $\delta = 0.25$ (On rappelle que cette valeur de δ correspond à une argile très compressible).

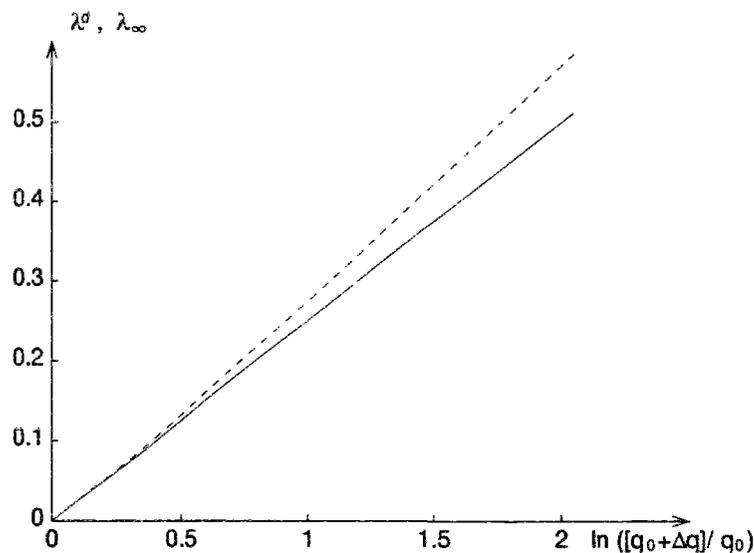


Figure 12- Valeur du tassement asymptotique calculée en négligeant la dépendance de C_0 avec p (trait plein) comparée à la valeur exacte (trait pointillé)

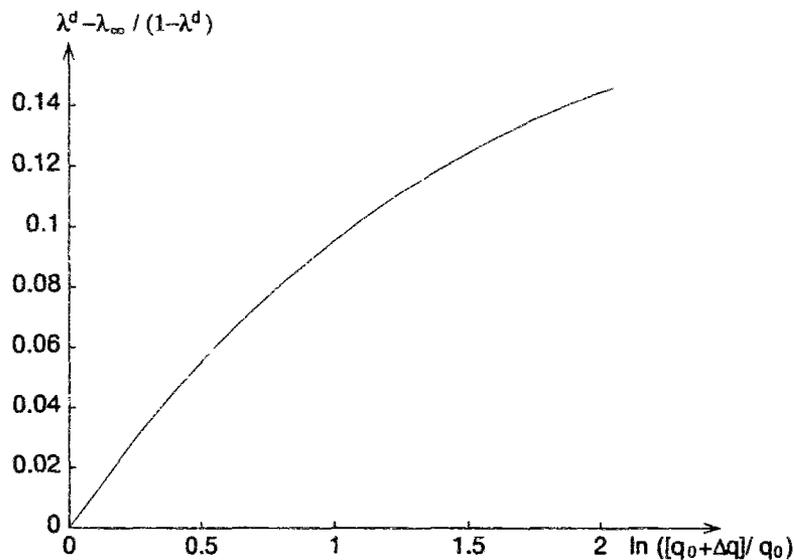


Figure 13- Erreur relative sur le tassement asymptotique lorsque la dépendance de C_o avec p est négligée

1.4. CONCLUSIONS DE L'ETUDE DE LA CONSOLIDATION.

L'étude de la consolidation nous a fourni l'occasion d'aborder le problème de l'identification expérimentale du comportement. Bien que les symétries géométriques et matérielles du problème de la compaction unidimensionnelle permettent de réduire l'information à déterminer expérimentalement, cette identification nécessite de réaliser un grand nombre d'expériences pour tenir compte des variations des paramètres C_o , M et b avec la dilatation λ d'une part et avec la pression du fluide p d'autre part. Pour diminuer l'effort expérimental à fournir, il est tentant de négliger la dépendance vis-à-vis de la pression : on montre dans le cas particulier où le solide est incompressible le type d'erreurs qu'entraîne cette approximation.

La dépendance du module d'élasticité drainé et des module et coefficient de Biot avec la pression ne doit donc pas être négligée. Lorsque le solide est incompressible, on a établi cette dépendance par voie théorique : on a montré que le module d'élasticité drainé est une fonction affine de la pression du fluide, et obtenu une expression analytique complète (au sens où il ne reste aucun paramètre à identifier) de M et \underline{B} : un seul essai œdométrique drainé suffit alors à déterminer le comportement.

D'autre part, cette première mise en œuvre d'un modèle spécifiquement construit pour les milieux poreux en transformation finie suggère une autre conclusion d'ordre plus pratique : elle montre que le fait de formuler le problème en transformation infinitésimale plutôt qu'en

transformation finie ne simplifie pas la structure mathématique de l'équation aux dérivées partielles à résoudre mais conduit en revanche à une erreur sensible sur l'évaluation de la durée du processus de consolidation, qui est assez fortement surestimée lorsque l'on néglige les changements de géométrie.

Pour finir, on rappelle que dans la discussion précédente, axée sur les différences entre les résultats obtenus selon que l'on fait ou non l'hypothèse que la transformation du squelette est infinitésimale, les variations de la perméabilité ont été négligées. Leur prise en compte ne changerait pas la structure mathématique du problème à résoudre ; la difficulté réside plutôt dans la modélisation et l'identification de ces variations.

II. COMPACTION DES BASSINS SEDIMENTAIRES.

Nous abordons ici un problème voisin du précédent du point de vue géométrique, mais qui met en jeu des échelles de temps et d'espace nettement différentes : il s'agit de l'étude de la compaction des bassins sédimentaires. Un bassin sédimentaire peut se former lorsque le fond marin possède une profondeur suffisante, par exemple au voisinage des zones de déflexion de la lithosphère. On s'intéresse à l'évolution des contraintes et de la pression du fluide dans le milieu. En pratique, cette étude se justifie par deux types de considérations :

- d'une part, si l'on cherche à comprendre et à modéliser les phénomènes à l'origine de la formation du pétrole à l'intérieur des roches sédimentaires et la migration des hydrocarbures formés, il est nécessaire de connaître le contexte mécanique dans lequel ces phénomènes se produisent (en particulier les contraintes et la pression du fluide saturant, mais aussi la température du milieu) ;

- d'autre part, du point de vue de l'exploitation d'un gisement pétrolier, il est intéressant de savoir si la pression du fluide s'écarte du régime hydrostatique dans les couches que l'on fore : une pression "anormale" (supérieure à la pression hydrostatique) peut être associée à une porosité élevée (on parle de défaut de consolidation), susceptible d'entraîner une subsidence importante de la surface, gênante si le forage s'effectue en mer. D'autre part une surpression importante peut nuire à la stabilité du puits, endommager les outils de forage et mettre en danger ceux qui les utilisent.

Au cours de la compaction des sédiments, la porosité diminue avec la profondeur à un instant donné, et diminue au cours du temps pour une couche de sédiments que l'on suit dans son mouvement. L'analyse la plus ancienne du problème de la compaction, due à Athy (1930), consiste à décrire le phénomène au moyen d'une relation entre porosité et profondeur. Hubbert et Rubey (1959), Smith (1971) et d'autres ont ensuite proposé de considérer la porosité comme une fonction de la "contrainte effective" définie par Terzaghi (1925) comme la somme (algébrique) de la contrainte totale et de la pression du fluide. Ces modèles sont destinés à rendre compte de la partie strictement mécanique de la déformation des sédiments, due au réarrangement des grains au cours de la compaction et à l'expulsion du fluide interstitiel. Cette déformation mécanique est prépondérante à faible profondeur, lorsque la porosité prend des valeurs élevées, mais on sait que d'autres phénomènes plus complexes interviennent également dans la réduction de la porosité du milieu : lorsque la porosité devient inférieure à 30-35%, la contribution du réarrangement de grains à la diminution de porosité devient secondaire par rapport aux effets de la pression-dissolution (voir par exemple Hedberg (1936) ou Hamilton (1959)). Récemment, plusieurs modèles ont été construits pour tenir compte des déformations associées à la pression-dissolution (par exemple par Schneider *et al* (1994)).

On se propose de mettre en évidence les différences entre les résultats fournis par une formulation du problème construite dans le cadre des petites perturbations et les résultats obtenus en transformation finie (Bourgeois et Dormieux, 1997). On ne cherchera donc pas à proposer une simulation complète du phénomène : on ne prendra pas en compte l'effet de la température et on ne s'intéressera qu'à l'aspect mécanique de la réduction de porosité. Dans la mesure où l'on ne souhaite pas modéliser de phénomènes de décharge (provoquée par l'érosion par exemple), et bien que le phénomène de la compaction soit clairement irréversible, on utilisera ici la formulation du comportement poroélastique établie au chapitre précédent pour un milieu poreux dont le squelette est constitué par un solide incompressible. Cette étude a été menée en collaboration avec l'Institut Français du Pétrole.

II.1. POSITION DU PROBLEME.

On modélise la couche de sédiments en cours de formation comme un massif poroélastique d'extension infinie dans les directions horizontales, reposant sur un plan horizontal rigide et imperméable que l'on prend comme origine pour la coordonnée verticale z . La couche est limitée supérieurement par le plan $z = h(t)$.

Le problème présente deux différences importantes avec celui de la consolidation, qui sont les deux causes du phénomène de la compaction. D'une part, le squelette du système étudié n'est pas un système matériel indépendant du temps : sa masse augmente à mesure que les

sédiments se déposent sur le fond sous-marin. D'autre part, il n'est évidemment pas possible de négliger ici le rôle des forces de pesanteur : les deux milieux continus squelette et fluide sont soumis à l'action du champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$, qui constitue le moteur de la compaction.

On note $M_d(t)$ la masse de sédiments déposés par unité de surface de fond sous-marin, que l'on considère comme une donnée du problème. On note $h(t)$ l'épaisseur totale de la couche et $L(t)$ la hauteur de la colonne d'eau au-dessus du milieu poreux : la surface de la mer est donc située dans le plan $z=h(t)+L(t)$.

On suppose que la couche est isotrope transverse autour de la direction verticale. En outre, on fait l'hypothèse que les deux constituants solide et fluide du milieu poreux sont incompressibles, et l'on désigne par ρ^f et ρ^s les masses volumiques (vraies) du fluide et du solide.

Faisant l'hypothèse que les accélérations des particules matérielles sont négligeables, on écrit la loi de Darcy et l'équilibre sous la forme :

$$(105) \quad \underline{w}/\rho^f = \underline{k} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f \mathbf{g})$$

$$(106) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0$$

où $\rho = (1 - \phi) \rho^s + \phi \rho^f$ désigne la masse volumique moyenne du milieu poreux, qui est un champ hétérogène en raison de l'hétérogénéité de la porosité ϕ .

II.1.1. Conditions aux limites.

II.1.1. a. Conditions aux limites hydrauliques.

La pression du fluide sur le plan $z = h(t)$ est égale à la pression d'une colonne d'eau au repos de hauteur $L(t)$:

$$(107) \quad p(z=h(t),t) = \rho^f g L(t)$$

La condition d'imperméabilité du substratum s'écrit :

$$(108) \quad \underline{w}(z=0,t) \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

Compte tenu de (105), (108) s'écrit aussi :

$$(109) \quad \frac{\partial p}{\partial z}(z=0,t) + \rho^f g = 0$$

II.1.1.b. Conditions aux limites mécaniques.

On suppose qu'il n'y a pas de glissement des sédiments sur le substratum, qui est lui-même rigide. Les points du squelette situés sur le plan $z=0$ sont donc immobiles :

$$(110) \quad \underline{u}^s(z=0,t) = 0$$

La condition mécanique sur le plan $z = h(t)$ traduit l'action d'un fluide sous pression sur le milieu poreux. Elle s'écrit :

$$(111) \quad \underline{\underline{\sigma}}(z=h(t),t) \cdot \underline{e}_z = -\rho^f g L(t) \underline{e}_z$$

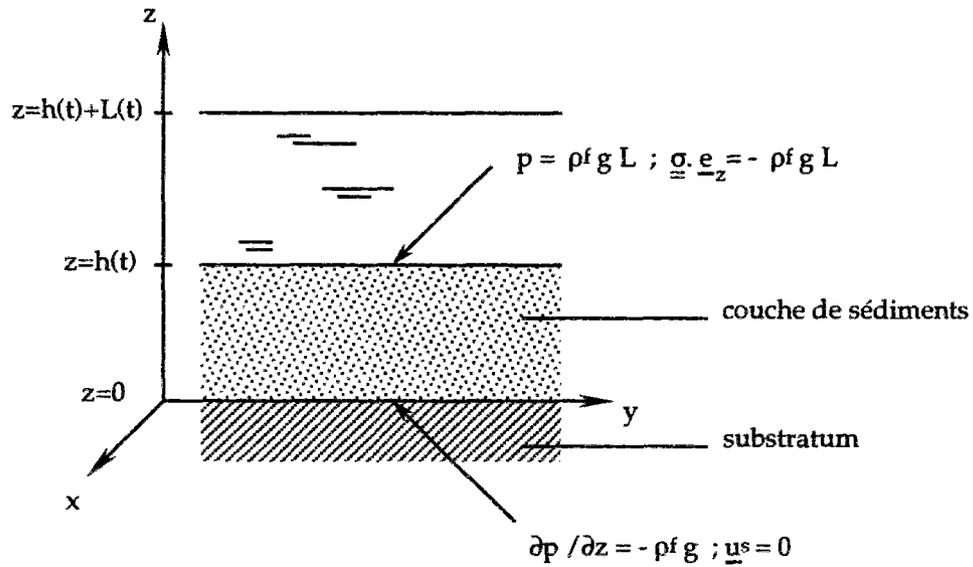


Figure 14- Géométrie du problème et conditions aux limites

II.1.2. Forme de la solution.

On suppose que tous les champs sont indépendants des coordonnées dans le plan horizontal x et y . En raison des symétries géométriques et matérielles, on recherche les champs eulériens des vitesses du squelette \underline{u}^s et du fluide \underline{u}^f et le vecteur courant relatif de masse fluide \underline{w} sous la forme :

$$(112) \quad \underline{u}^s = u^s(z,t) \underline{e}_z$$

$$(113) \quad \underline{u}^f = u^f(z,t) \underline{e}_z$$

$$(114) \quad \underline{w} = w(z,t) \underline{e}_z$$

Le taux de déformation eulérien du squelette $\underline{\underline{d}}$ est alors donné par :

$$(115) \quad \underline{\underline{d}} = \frac{\partial u^s}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

D'autre part, le champ de contraintes de Cauchy dans le milieu poreux est cherché sous la forme :

$$(116) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma(z,t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_h(z,t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y)$$

II.1.3. Caractéristiques matérielles.

II.1.3.a. Loi de comportement.

- Configuration de référence.

Le système matériel constitué par le squelette de la couche en cours de formation est un système dont la masse augmente au cours du temps : de nouvelles particules matérielles s'ajoutent régulièrement au système. Le squelette représente donc des systèmes matériels différents selon l'instant où on le considère. On ne peut alors définir une configuration de référence de la couche dans son ensemble que pour un instant donné.

Dans la construction de la modélisation mécanique des milieux poreux, l'introduction d'une configuration de référence ne s'avère nécessaire que pour la formulation du comportement du milieu poreux : les autres équations du problème peuvent s'écrire de manière eulérienne. Or, le comportement se formule de manière locale : il n'est donc pas nécessaire (bien que cela soit commode pour les problèmes habituels dans lesquels le squelette est un système matériel fermé) d'introduire une configuration de référence définie de manière globale pour toute la couche, qui dans le cas présent serait différente selon l'instant considéré. Pour une particule de squelette donnée, on prendra ici comme configuration géométrique de référence celle dans laquelle elle se trouve lorsqu'elle est déposée à la surface $z=h(t)$: sur cette surface, la contrainte effective verticale $(\underline{\underline{\sigma}}+p\underline{\underline{1}}) \cdot \underline{e}_z$ demeure nulle à tout instant (cf. (107) et (111)) et on supposera que la porosité conserve une valeur constante notée ϕ_0 . La masse volumique apparente du squelette $\rho_a^s = \rho^s (1 - \phi)$ prend donc une valeur constante ρ_0 sur le plan $z=h(t)$.

Compte tenu de la forme (112) du champ de vitesses du squelette, le gradient de la transformation d'une particule de squelette entre l'instant où elle était sur le plan supérieur de la couche et l'instant actuel est de la forme :

$$(117) \quad \underline{\underline{F}} = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \lambda \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

λ vaut 1 en tout point du plan $z=h(t)$ et est lié au champ u^s par la relation (cf (11)₁) :

$$(118) \quad \dot{\lambda} / \lambda = \frac{\partial u^s}{\partial z}$$

Comme dans le problème de la consolidation, λ désigne la dilatation du squelette dans la direction verticale, égale à sa dilatation volumique : elle diminue au cours de l'enfouissement progressif de la matière (figure 15).

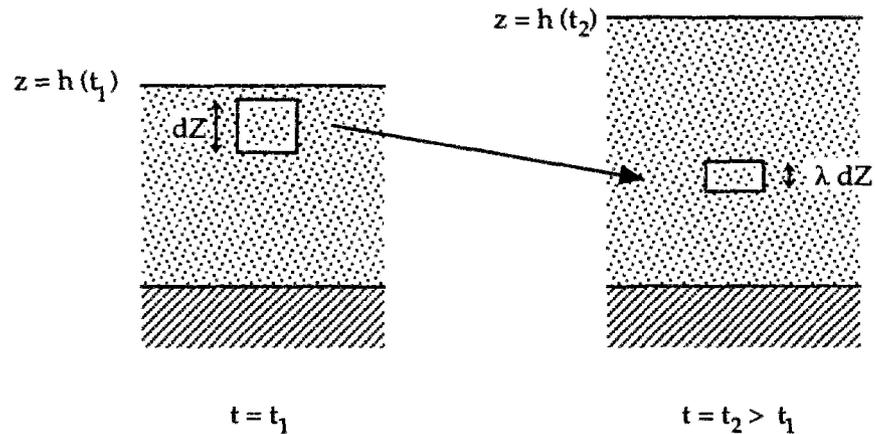


Figure 15- Evolution de la dilatation verticale d'une particule de squelette
à $t = t_1$ $\lambda = 1$ (configuration de référence); à $t = t_2 > t_1$ $\lambda < 1$

La relation (130)₁ qui traduit l'incompressibilité du solide s'écrit ici :

$$(119) \quad \lambda (1 - \phi) = (1 - \phi_0)$$

ou encore, en multipliant par ρ^s :

$$(120) \quad \lambda \rho^s (1 - \phi) = \lambda \rho_a^s = \rho_0$$

La correspondance biunivoque établie par (119) entre la dilatation λ et la porosité ϕ à cause de l'incompressibilité du solide, montre que l'on peut, dans le contexte du problème unidimensionnel étudié ici, représenter la transformation géométrique au moyen de la seule porosité : c'est ce qui est fait dans de nombreuses analyses de la compaction.

- Ecriture de la loi de comportement.

Comme dans le problème de la consolidation, la loi de comportement prend la forme suivante :

$$(121) \quad \sigma + p = Q(\lambda)$$

où la fonction $Q(\lambda)$ est une fonction scalaire qui demeure à déterminer expérimentalement (par exemple en réalisant un essai œdométrique drainé), et qui vérifie :

$$(122) \quad Q(\lambda = 1) = 0$$

comme on peut s'en convaincre en rapprochant les conditions aux limites (107) et (111) de (121).

Les contraintes mises en jeu au cours de la compaction sont très supérieures aux contraintes typiques du problème de la consolidation : on n'emploiera donc pas la relation (64) pour caractériser le comportement. En revanche, on s'appuie sur les données de l'article de Hamilton

(1959) pour définir la fonction $Q(\lambda)$ représentée sur la figure 16. Les valeurs de la masse volumique du solide et de la porosité en surface mesurées par Hamilton sont $\rho^s = 2.31 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\phi_0 = 0.72$. On en déduit la valeur de la masse volumique apparente du squelette sur la surface $z=h(t)$: $\rho_o = \rho^s (1 - \phi_0) = 0.6468 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

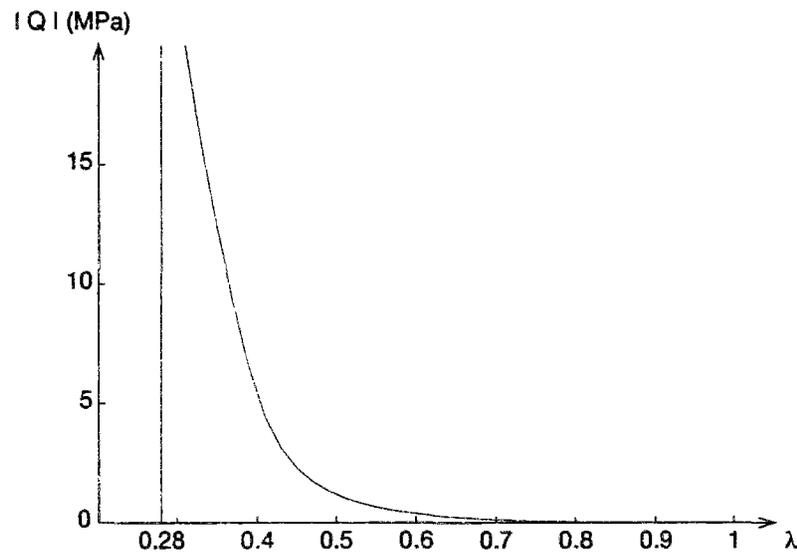


Figure 16
Fonction $Q(\lambda)$ (d'après les données de Hamilton (1959) pour une argile rouge)

La fonction $Q(\lambda)$ correspond à un comportement fortement non-linéaire. Elle rend compte du raidissement progressif du matériau. Notons d'une part que la pente $Q'(\lambda=1)$ est faible mais non nulle, et d'autre part que la fonction $Q(\lambda)$ devient infinie lorsque λ tend vers la valeur $1-\phi_0=0.28$, c'est-à-dire lorsque la porosité ϕ tend vers zéro (cf. (119)). Certains auteurs (par exemple Schneider *et al* (1994)) introduisent un seuil de porosité au-dessous duquel la porosité ne peut pas diminuer sous l'effet d'un chargement strictement mécanique : le phénomène de pression-dissolution est responsable de la décroissance de la porosité en-dessous du seuil en question. La représentation graphique de la fonction $Q(\lambda)$ présente alors une asymptote verticale pour une valeur de λ strictement supérieure à $1-\phi_0$.

II. 1. 3. b. Perméabilité.

On considérera que la perméabilité peut être caractérisée par une relation du type $k = k(\lambda)$. En pratique, on utilisera la formule de Koseny-Carman (30) en tenant compte de la relation (119) entre ϕ et λ .

II.2. RESOLUTION.

Compte tenu de la similarité du problème avec le problème de la consolidation, les expressions de la conservation de la masse fluide (15) et de la liaison d'incompressibilité des deux phases (68) demeurent valables. On obtient en les combinant :

$$(123) \quad \rho^f \dot{\lambda} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Les équations (123) et (118), avec les conditions (108) et (110), conduisent à :

$$(124) \quad \frac{\partial(w + \rho^f u^s)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad \forall t \quad \forall z \quad w + \rho^f u^s = 0$$

Du fait de l'incompressibilité des deux constituants, les vitesses du fluide et du squelette ne sont pas indépendantes, et l'on peut donc éliminer w au profit de u^s .

D'autre part, l'évolution de la géométrie de la couche est liée à l'apport de matériau en surface. L'épaisseur de la couche et la masse de sédiments déposée à l'instant t sont liées par le bilan de masse de squelette :

$$(125) \quad M_d(t) = \int_{z=0}^{z=h} \rho_a^s(z,t) dz$$

L'équation de continuité eulérienne pour le squelette (cf. (32)₁) :

$$(126) \quad \frac{\partial \rho_a^s}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a^s u^s)}{\partial z} = 0$$

conduit alors, après dérivation de (125), à l'équation :

$$(127) \quad \dot{h}(t) = u^s(z=h(t),t) + \dot{M}_d(t) / \rho_o$$

En choisissant σ , p , λ , u^s et h pour inconnues principales, le problème se ramène à résoudre le système constitué par (118), (121), (127) et les expressions unidimensionnelles obtenues en projetant la loi de conduction (105) et l'équation d'équilibre (106) sur la verticale, avec les conditions aux limites (107), (109), (110) et (111). Le tableau suivant récapitule l'ensemble de ces équations.

Equations de champ :	
$\dot{\lambda} / \lambda = \partial u^s / \partial z$	liaison cinématique entre u^s et λ
$\dot{h}(t) = u^s(z=h(t),t) + \dot{M}_d(t) / \rho_o$	conservation masse de squelette
(128) $\partial \sigma / \partial z = (\rho_a^s + \rho^f \phi) g = \rho^f g + 1 / (A \lambda)$ (avec $A = [(1 - \rho^f / \rho^s) \rho_o g]^{-1}$)	conservation de la quantité de mouvement
(129) $u^s / k = - (w / \rho^f) / k = \partial p / \partial z + \rho^f g$	conduction de la masse fluide
$\sigma + p = Q(\lambda)$	loi de comportement
Conditions aux limites :	
$u^s = 0$	condition mécanique en $z=0$
$\partial p / \partial z = - \rho^f g$	condition hydraulique en $z=0$
$\sigma = - \rho^f g L(t)$	condition mécanique en $z=h(t)$
$p = \rho^f g L(t)$	condition hydraulique en $z=h(t)$

Figure 17 -Tableau récapitulant les équations du problème de la compaction

Dérivant la loi de comportement (121) par rapport à z , et portant dans ce résultat la loi de Darcy (129) et l'équation d'équilibre (128), on obtient :

$$(130) \quad Q'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{A \lambda} + \frac{u^s}{k(\lambda)}$$

où $Q'(\lambda)$ désigne la dérivée de la fonction $Q(\lambda)$. En principe, le problème se ramène donc à rechercher λ et u^s solutions de (118) et (130) sur le domaine variable $[0, h(t)]$, dont l'évolution est gouvernée par (127).

II 2. 1. Etude du cas particulier de la perméabilité infinie.

On considère d'abord le cas où la perméabilité du milieu est suffisamment grande pour que la conduction du fluide puisse être considérée comme instantanée.

Pour une perméabilité très grande, la loi de Darcy (129) indique que la pression est hydrostatique dans la couche de sédiments :

$$(131) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = - \rho^f g \quad \Rightarrow \quad p(z,t) = \rho^f g (L(t) + h(t) - z)$$

D'autre part, la relation (130) obtenue en dérivant la loi de comportement par rapport à la coordonnée verticale z donne :

$$(132) \quad Q'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{A\lambda}$$

Intégrant (132), avec la condition $\lambda(z = h(t)) = 1$, on montre que la dilatation est une fonction de la profondeur $\delta = h(t) - z$ à laquelle est située la particule de squelette considérée :

$$(133) \quad \lambda(z,t) = L_{\infty}(\delta)$$

où L_{∞} désigne une fonction indépendante du temps, définie par :

$$(134) \quad \int_{L_{\infty}(\delta)}^1 A \lambda Q'(\lambda) d\lambda = \delta$$

Compte tenu des relations (120) et (121), la masse volumique apparente du squelette $\rho_a^s = \rho^s (1 - \phi)$ et la contrainte effective sont également des fonctions de la seule profondeur δ . La fonction $Q(\lambda)$ étant strictement croissante, il est facile de voir que la fonction $L_{\infty}(\delta)$ est une fonction strictement décroissante.

La masse de sédiments déposée est alors donnée par :

$$(135) \quad M_d(t) = \int_{\delta=0}^{\delta=h(t)} \rho_a^s(\delta) d\delta$$

ou encore, compte tenu de (120) :

$$(136) \quad M_d(t) = \int_{\delta=0}^{\delta=h(t)} \frac{\rho_o}{L_{\infty}(\delta)} d\delta$$

Portant (133) et (134) dans (136), on obtient :

$$(137) \quad M_d(t) = \int_1^{\lambda_{\text{fond}}(t)} \frac{\rho_o}{\lambda} (-A \lambda \frac{dQ}{d\lambda}) d\lambda = -A \rho_o Q(\lambda_{\text{fond}}(t))$$

où $\lambda_{\text{fond}}(t)$ désigne la valeur de λ dans le plan $z=0$ à l'instant t .

Par ailleurs, en utilisant (134) pour $\delta=h(t)$, on établit l'égalité :

$$(138) \quad h(t) = \int_{\lambda_{\text{fond}}(t)}^1 A \lambda Q'(\lambda) d\lambda$$

On déduit alors de (137) et (138) la relation suivante :

$$(139) \quad \dot{h} = -A \lambda_{\text{fond}} Q'(\lambda_{\text{fond}}) \dot{\lambda}_{\text{fond}} = \lambda_{\text{fond}} \frac{\dot{M}_d}{\rho_o}$$

Eliminant $\lambda_{\text{fond}}(t)$ entre (137) et (138), on parvient à déterminer l'épaisseur $h(t)$ correspondant à la valeur actuelle de $M_d(t)$:

$$(140) \quad h(t) = \int_{Q^{-1}(-M_d(t)/A\rho_o)}^1 A \lambda Q'(\lambda) d\lambda$$

Il reste à déterminer la vitesse du squelette. Considérons une sous-couche de sédiments limitée inférieurement par le plan $z=0$ et contenant une masse donnée M_o de squelette. A l'instant t , cette couche est limitée par le plan $z=Z_o(t)$. Il est clair que la vitesse $u^s(z,t)$ des points matériels de squelette situés à l'instant t dans le plan $z=Z_o(t)$ est égale à $\dot{Z}_o(t)$.

Par dérivation par rapport au temps de l'égalité :

$$(141) \quad M_o = \int_{\delta=h(t)-Z_o(t)}^{\delta=h(t)} \rho_a^s(\delta) d\delta$$

on obtient :

$$(142) \quad \rho_a^s(\delta=h) \dot{h} - \rho_a^s(\delta=h-Z_o) (\dot{h}-\dot{Z}_o) = 0$$

dont on déduit, en utilisant (120) et (139) :

$$(143) \quad \dot{Z}_o = \left(1 - \frac{\rho_a^s(\delta=h)}{\rho_a^s(\delta=h-Z_o)}\right) \dot{h} = \dot{h} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\text{fond}}}\right) = \dot{h} - \lambda \frac{\dot{M}_d}{\rho_o}$$

où la valeur de λ est toujours donnée par (133). L'expression de la vitesse du squelette est donc finalement donnée par :

$$(144) \quad u^s(z,t) = (\lambda_{\text{fond}}(t) - L_\infty(h(t) - z)) \frac{\dot{M}_d}{\rho_o}$$

Ceci achève la résolution analytique complète du problème dans le cas où la perméabilité du milieu est infinie.

II.2.2. Résolution numérique pour une perméabilité finie.

Lorsque la perméabilité n'est pas infinie, on se propose de résoudre le problème par voie numérique, par la méthode des différences finies. On a vu que d'un point de vue théorique, on peut se ramener à un problème portant sur λ , u^s et h seulement (défini par (118), (130), (127) et les conditions aux limites correspondantes) : c'est dans ce cadre que l'on s'est placé pour résoudre le problème dans le cas où la perméabilité est infinie. En pratique, il est plus judicieux de conserver les inconnues σ et p . En effet, il est difficile d'obtenir une précision numérique sur les valeurs de λ suffisante pour calculer correctement les valeurs de u^s à partir de (130) en raison de la rapidité des variations de $Q(\lambda)$ et de $Q'(\lambda)$: il est alors difficile de proposer un schéma de résolution stable.

On propose donc le schéma suivant : à un instant donné t , la valeur d'une grandeur quelconque est estimée en un nombre variable de points de discrétisation $z_i(t)$ ($i=0, \dots, N+1$) définis par :

$$(145) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_0 = 0 \\ i=1, N \\ z_{N+1} = h(t) \end{array} \right. \quad \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho_a^s(z, t) dz = \rho_o h_o$$

Les plans $z=z_{i-1}$ et $z=z_i$ (pour $i=1, \dots, N$) délimitent une strate contenant toujours les mêmes particules de squelette, chaque strate correspondant à la même masse $\rho_o h_o$ de squelette (par unité de surface de fond sous-marin). L'intervalle $[z_N, z_{N+1}]$ correspond à une strate supplémentaire, de masse inférieure à celle des précédentes, correspondant à la partie supérieure de la couche en cours de formation. Bien que son épaisseur et sa masse puissent être négligeables par rapport à celles de l'ensemble du système, cette strate joue un rôle particulier, puisqu'elle détermine la condition à la limite hydraulique pour les strates situées au-dessous d'elle. On note dans la suite B_i la valeur prise par une grandeur quelconque B sur le plan $z = z_i(t)$. La valeur de la dérivée $\partial B / \partial z$ est estimée au moyen de la formule suivante :

$$(146) \quad (\partial B / \partial z)_i = \frac{B_i - B_{i-1}}{\lambda_i h_o} \quad (i \geq 1)$$

qui consiste à approximer l'épaisseur actuelle de la strate $[z_{i-1}, z_i]$ par $\lambda_i h_o$.

D'autre part, on discrétise le temps en intervalles de longueur δt , et la valeur de la dérivée temporelle \dot{B} au cours de l'intervalle de temps $[t, t+\delta t]$ est calculée par :

$$(147) \quad \dot{B}_i = \frac{B_i(t+\delta t) - B_i(t)}{\delta t}$$

L'algorithme employé est explicite. A partir de la situation à l'instant t , où l'on suppose connues les répartitions de pression et de dilatation dans la couche, on calcule le gradient de la pression du fluide et on en déduit, par (129), la vitesse u^s :

$$(148) \quad u_i^s(t) = k(\lambda_i(t)) \left[\frac{P_i(t) - P_{i-1}(t)}{\lambda_i(t) h_o} + \rho^f g \right]$$

On obtient alors l'évolution de la valeur de λ au moyen de (118) :

$$(149) \quad \lambda_i(t+\delta t) = \lambda_i(t) + \delta t / h_o (u_i^s(t) - u_{i-1}^s(t))$$

On calcule ensuite les contraintes à l'instant $t+\delta t$ par l'équation d'équilibre (128), puis la pression par la loi de comportement (121) :

$$(150) \quad \sigma_i(t+\delta t) - \sigma_{i-1}(t+\delta t) = h_o (\rho^f g \lambda_i(t+\delta t) + 1/A)$$

$$(151) \quad p_i(t+\delta t) = Q(\lambda_i(t+\delta t)) - \sigma_i(t+\delta t)$$

La condition aux limites en $z = z_N$ nécessaire à l'intégration de (150) est obtenue en écrivant que la pression dans la strate supplémentaire est hydrostatique, ce qui permet de calculer les valeurs de p_N , λ_N et σ_N . La gestion du caractère ouvert du système étudié, c'est-à-dire l'ajout de nouvelles strates au fur et à mesure que la masse déposée augmente, ne pose pas de difficulté particulière.

Dans les applications numériques présentées ci-dessous, l'épaisseur de la couche de sédiments est nulle à l'instant initial, la vitesse d'apport de sédiments est constante et égale à $2.05 \cdot 10^{-9} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui correspondrait à une augmentation d'épaisseur de 100 mètres par million d'années en l'absence de pesanteur (donc de compaction).

La figure 18 représente la pression du fluide dans le milieu poreux en fonction de la profondeur au bout de (a) 15Ma (millions d'années), (b) 30Ma, (c) 45Ma et (d) 60Ma.

Les courbes en trait pointillé correspondent à $k_o = 4 \cdot 10^{-16} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (soit $0.4\mu\text{D}$) ; les courbes en trait plein à $k_o = 4 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (soit $4\mu\text{D}$).

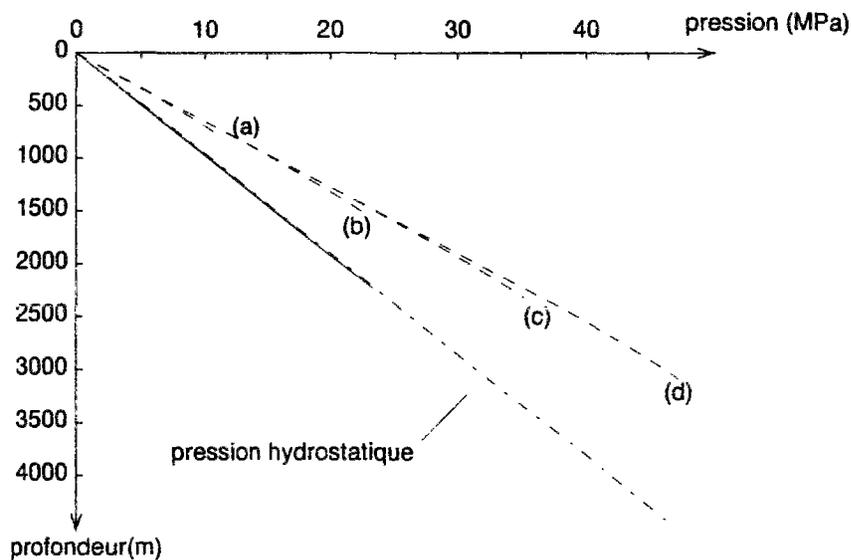


Figure 18
Pression p en fonction de la profondeur

Les courbes pleines, qui correspondent à une forte perméabilité, se confondent avec le profil de pression hydrostatique. En revanche, si k_o prend une valeur suffisamment faible, il apparaît un écart significatif entre la répartition de pression dans la couche et la répartition hydrostatique. Le

modèle permet donc de discuter de manière quantitative la possibilité de l'apparition de pressions "anormales" sous la seule action de la gravité.

Les figures 19 et 20 donnent l'évolution de la dilatation et de la porosité dans la couche après (a) 15Ma, (b) 30Ma, (c) 45Ma et (d) 60Ma, pour $k_o = 4.10^{-16} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (traits pointillés) et $k_o = 4.10^{-15} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (traits pleins).

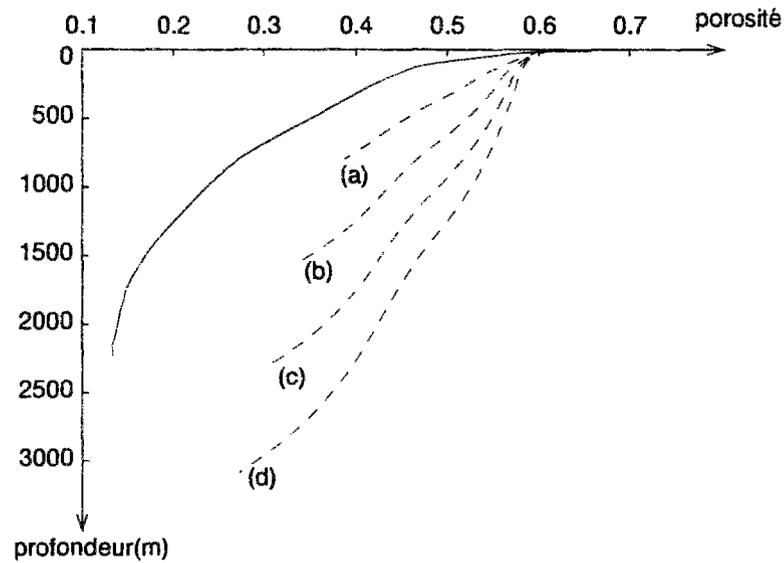


Figure 19
Porosité ϕ en fonction de la profondeur

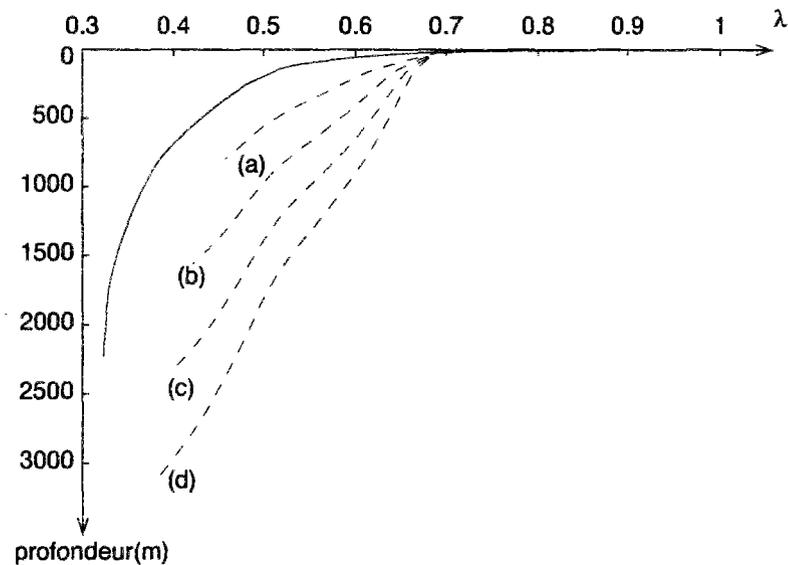


Figure 20
Dilatation λ en fonction de la profondeur

Pour une forte perméabilité, la porosité et la dilatation à une profondeur donnée sont pratiquement indépendantes du temps, conformément à l'analyse menée en §II.2.1. En revanche, si k_0 prend une valeur suffisamment faible, les résultats changent sensiblement.

La figure 21 compare l'évolution de l'épaisseur de la couche en fonction du temps pour les deux valeurs du paramètre k_0 . Comme on pouvait s'y attendre, la compaction est plus importante dans le bassin le plus perméable.

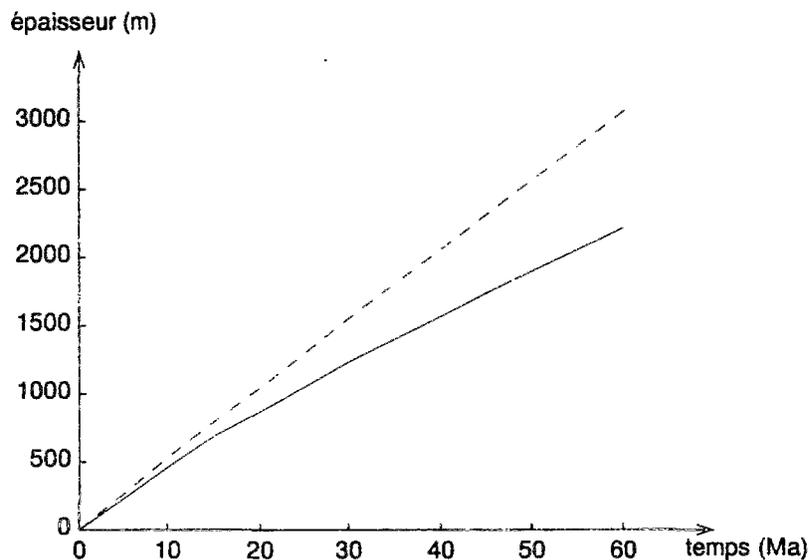


Figure 21
Evolution de l'épaisseur globale de la couche au cours du temps

II.2.3. Influence des non-linéarités géométriques dans le problème de la compaction des sédiments.

La transformation géométrique du squelette est dite infinitésimale si le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est voisin du tenseur unité $\underline{\underline{1}}$. Dans le problème de la compaction unidimensionnelle, d'après (117), cette hypothèse s'exprime de la façon suivante :

$$(152) \quad |\lambda - 1| \ll 1$$

La figure 20 montre clairement que cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le problème de la compaction. On se propose donc, dans le même esprit qu'au §I.2.5, de comparer les résultats de l'analyse du problème de la compaction présentée ci-dessus, qui prend d'emblée en compte le caractère fini de la transformation géométrique du squelette, avec les résultats que donnerait une formulation construite en supposant la transformation du squelette infinitésimale.

Lorsque l'hypothèse de transformation infinitésimale (152) est présumée vérifiée, on définit la déformation linéarisée ε par $\varepsilon = \lambda - 1$, et l'on remplace dans les formules les quantités dépendant de λ par un développement au premier ordre en ε (sauf $Q(\lambda)$ et $k(\lambda)$). Ainsi par exemple, on déduit de l'expression (119) de la conservation de la masse de squelette la relation suivante, qui donne la porosité en fonction de la déformation linéarisée du squelette :

$$(153) \quad (1 - \phi) = (1 - \phi_0)(1 - \varepsilon)$$

En pratique la résolution est peu modifiée. L'ensemble des équations (148) à (150) est remplacé par :

$$(154) \quad u_{i-1}^s(t) = k(1 + \varepsilon_i(t)) \left[\frac{p_i(t) - p_{i-1}(t)}{h_0} (1 - \varepsilon_i(t)) + \rho^f g \right]$$

$$(155) \quad \varepsilon_i(t + \delta t) = \varepsilon_i(t) + \delta t / h_0 (u_{i-1}^s(t) - u_{i-1}^s(t))$$

$$(156) \quad \sigma_i(t + \delta t) - \sigma_{i-1}(t + \delta t) = h_0 (\rho^f g (1 + \varepsilon_i(t + \delta t)) + 1/A)$$

$$(157) \quad p_i(t + \delta t) = Q(1 + \varepsilon_i(t + \delta t)) - \sigma_i(t + \delta t)$$

et le principe de l'algorithme de résolution reste le même.

On présente ci-dessous la comparaison entre les résultats obtenus par les deux formulations, pour les mêmes données que précédemment et dans le cas du bassin le moins perméable. Les courbes en trait pointillé représentent les résultats des calculs menés sans linéarisation (§II.2.2), les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus dans le cadre linéarisé. On observe que les résultats sont peu modifiés en ce qui concerne les calculs de la pression dans la couche (figure 22) et l'évolution de l'épaisseur globale au cours du temps (figure 24). L'écart est un peu plus sensible dans le cas de la dilatation (figure 23).

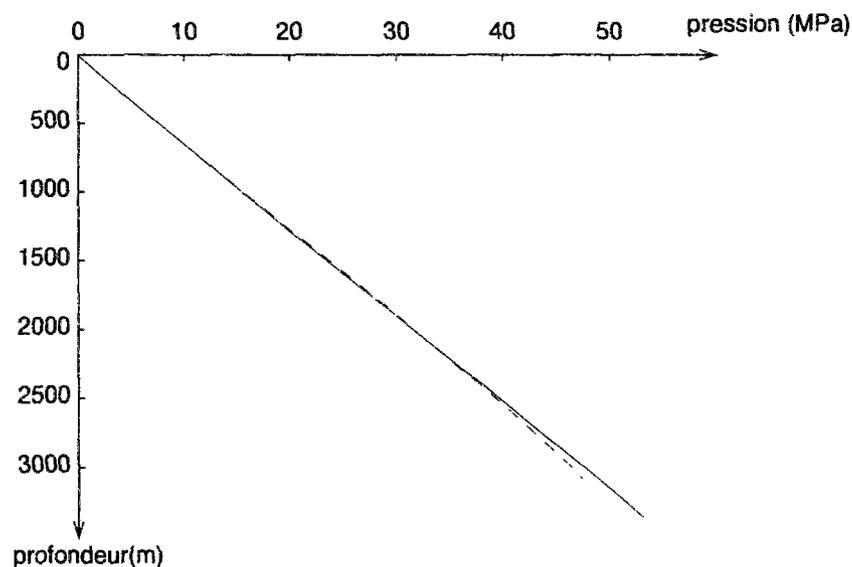


Figure 22
Pression p en fonction de la profondeur (après 60 Ma)

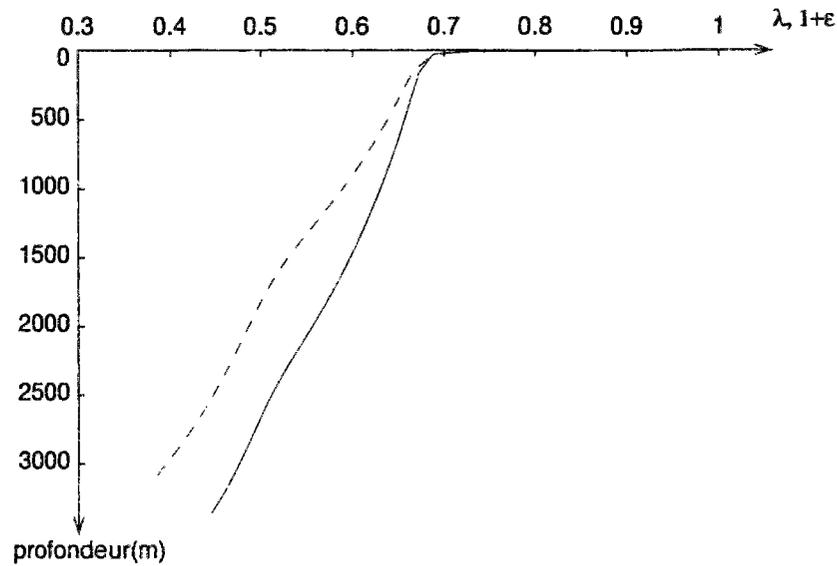


Figure 23
Dilatation en fonction de la profondeur (après 60 Ma)

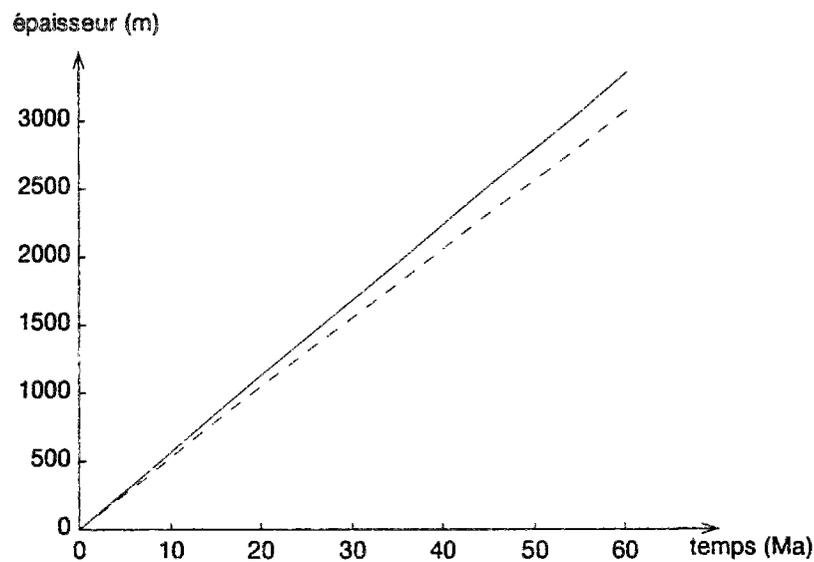


Figure 24
Evolution de l'épaisseur de la couche $h(t)$ au cours du temps

Pour les grandeurs considérées, à part peut-être pour la dilatation, l'écart dû aux non-linéarités géométriques est donc relativement modéré.

En revanche, l'estimation de la porosité obtenue dans un modèle dans lequel on procède aux linéarisations géométriques est très mauvaise. La porosité est en effet donnée par l'équation (153), déduite de (119) en faisant l'approximation $1/\lambda \cong 1 - \epsilon$. Cette approximation devient

rapidement très mauvaise à mesure que la valeur de λ s'écarte de 1. L'erreur commise est illustrée sur la figure 25 (la courbe pointillée donne la valeur exacte).

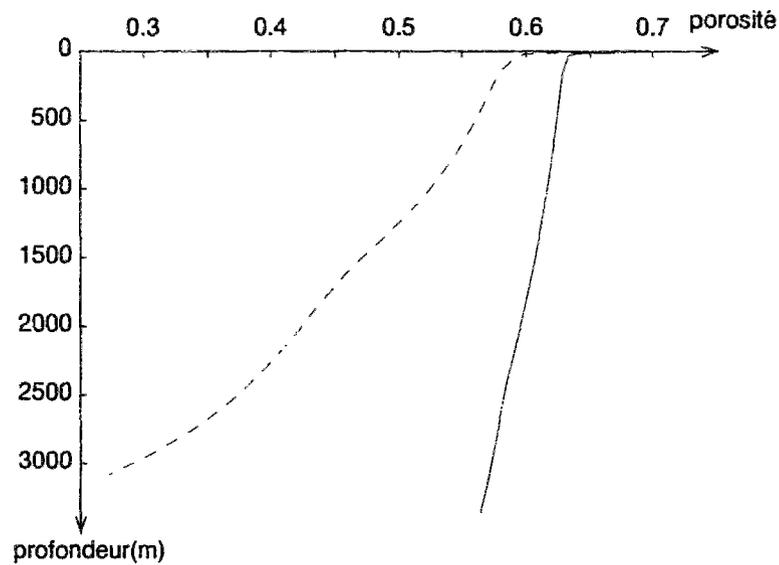


Figure 25
Porosité ϕ en fonction de la profondeur (après 60 Ma)

II.3. CONCLUSIONS DE L'ETUDE DE LA COMPACTION.

L'étude de la compaction nous a permis de résoudre un problème complexe dans lequel interviennent divers types de non-linéarités, liées au fait que la raideur, la perméabilité et la masse volumique moyenne du matériau dépendent de son état de déformation.

Dans les analyses classiques de la compaction, on exploite le caractère unidimensionnel du problème et l'incompressibilité du solide pour représenter le comportement par une relation entre la contrainte verticale effective et la porosité du milieu. Dans ce contexte unidimensionnel, on ne fait en général aucune approximation liée au caractère infinitésimal de la transformation du squelette. Cependant, ce type de formulation ne se prête pas à une généralisation à des géométries moins simples (pour modéliser par exemple le dépôt de sédiments sur un fond qui ne serait pas plan et horizontal). Pour ce genre de problème, il est nécessaire de faire appel au formalisme de la mécanique des milieux poreux, plus adapté aux problèmes bi- ou tridimensionnels, notamment sous réserve que l'on parvienne expérimentalement à identifier complètement le comportement). C'est dans ce contexte que la question des différences entre les résultats obtenus avec une

formulation en transformation infinitésimale et une formulation en transformation finie s'introduit naturellement. Nous avons cherché ici à isoler la contribution des non-linéarités géométriques, et montré sur cet exemple simple la difficulté de linéariser l'une ou l'autre des équations du problème sans risquer de commettre une erreur importante sur au moins une partie du résultat : ici, l'estimation de la porosité est nettement dégradée, alors que le problème n'est pas simplifié de manière significative.

CONCLUSION

En mettant en œuvre le modèle construit aux chapitres précédents pour étudier deux problèmes unidimensionnels, nous avons pu nous familiariser avec la résolution pratique des problèmes de mécanique des milieux poreux en transformation finie.

Nous avons abordé en détail le problème de l'identification des paramètres du modèle à partir de données expérimentales, et souligné le fait que l'identification du comportement formulé en transformation finie ne nécessite pas davantage d'information expérimentale que l'identification du comportement formulé en transformation infinitésimale.

En ce qui concerne la résolution pratique des problèmes, il est encourageant de constater que la structure mathématique et donc la résolution d'un problème formulé en transformation finie ne sont pas plus complexes que celle d'un problème formulé en transformation infinitésimale.

D'autre part, nous avons montré quantitativement qu'il peut y avoir un écart significatif entre la solution exacte d'un problème en transformation finie et la solution obtenue en employant une formulation construite en transformation infinitésimale.

Il importe enfin de signaler que la modélisation employée conduit, dans le cas unidimensionnel, aux mêmes résultats que les analyses classiques de la consolidation (Gibson *et al* (1967)) ou de la compaction, dans lesquelles le changement de géométrie est relié aux variations de l'indice des vides ou de la porosité : dans ces analyses, aucune linéarisation géométrique n'est faite. Mais contrairement au formalisme que nous avons proposé, ce type d'analyses fondées sur des grandeurs scalaires ne sont pas susceptibles d'être étendues à des situations bi- ou tridimensionnelles.

Nous avons abordé ici les problèmes de la consolidation et de la compaction dans le cadre du comportement poroélastique en transformation finie. Néanmoins, les deux phénomènes sont clairement irréversibles : même s'il n'y a dans aucun des cas étudiés ici de décharge qui mette en évidence les irréversibilités, il paraît souhaitable de disposer d'une formulation du comportement mieux adaptée aux milieux que l'on modélise. On ne poussera donc pas plus loin l'étude des problèmes de poroélasticité en transformation finie : en particulier, on ne discutera pas la mise en place de méthodes numériques dans ce contexte. On cherchera plutôt à reprendre la démarche de construction des relations de comportement dans un cadre plus réaliste pour le type de matériau que l'on considère : le chapitre qui suit est donc consacré à l'étude de la formulation du comportement poroélastoplastique en transformation finie.

CHAPITRE 4

ETUDE DU COMPORTEMENT POROELASTOPLASTIQUE

INTRODUCTION

La formulation du comportement poroélastique en transformation finie repose sur la nullité de la dissipation intrinsèque : dans ce type de comportement, il n'y a pas de processus irréversibles attachés à la variation de la déformation du squelette ou de l'apport de masse fluide. Cette propriété n'est évidemment pas vérifiée par la plupart des matériaux de la géotechnique ou de la géophysique, dont le comportement est clairement irréversible. La modélisation de ces matériaux requiert donc une formulation du comportement plus complexe.

Pour les milieux continus monophasiques en transformation finie, Lee (1969) puis Mandel (1971) ont introduit le concept de configuration relâchée pour décomposer le gradient de la transformation géométrique en produit d'une partie élastique $\underline{\underline{E}}$ et d'une partie plastique $\underline{\underline{P}}$. L'évolution de la partie élastique de la transformation est décrite par les équations d'état, qui découlent de la nullité de la dissipation intrinsèque dans les évolutions réversibles. On introduit pour caractériser les évolutions dans lesquelles les déformations irréversibles sont susceptibles d'évoluer une fonction de charge (ou critère de plasticité), et l'évolution des déformations irréversibles proprement dite est décrite par la règle d'écoulement.

Nous reprenons ici les étapes de cette démarche pour l'étude de la formulation du comportement poroélastoplastique en transformation finie (Bourgeois, de Buhan et Dormieux, 1995). Nous commençons par étendre le concept de configuration relâchée aux milieux poreux en distinguant dans la transformation du squelette et dans l'apport de masse fluide une partie réversible et une partie irréversible. L'évolution de ces deux contributions dépend de l'évolution des contraintes et de la pression du fluide : on établit d'abord l'expression des équations d'état, puis celle de la règle d'écoulement après avoir introduit la notion de critère de poroplasticité.

Pour simplifier l'étude de la formulation du comportement, nous supposons que les déformations élastiques demeurent infinitésimales : c'est généralement le cas pour les matériaux auxquels on s'intéresse. Nous supposons de plus que les propriétés élastiques du milieu poreux sont initialement isotropes et le restent au cours de ses évolutions ultérieures : cette hypothèse est évidemment beaucoup plus restrictive que la première. On étudie d'abord la formulation du comportement des milieux poreux parfaitement plastiques dans un cadre général ; la deuxième partie propose un modèle plus spécifiquement adapté à la modélisation du comportement des argiles saturées, qui prend en compte l'écroutissement et constitue une généralisation du modèle de Cam-Clay aux milieux poreux en transformation finie.

I. COMPORTEMENT POROELASTOPLASTIQUE EN TRANSFORMATION FINIE

D'une manière intuitive, on peut caractériser les milieux élastoplastiques par le fait que la déformation provoquée par un chargement ne disparaît pas complètement après décharge : les modèles élastoplastiques monophasiques en transformation infinitésimale reposent sur la décomposition du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\epsilon}}$ en deux contributions, la déformation élastique $\underline{\underline{\epsilon}}_e$ et la déformation plastique $\underline{\underline{\epsilon}}_p$. Pour les milieux monophasiques en transformation finie, Lee (1969), puis Mandel (1971), ont introduit les concepts de "configuration relâchée" et de parties "élastique" et "plastique" de la transformation. On notera que ces concepts sont macroscopiques, au sens où ils sont définis sans référence explicite à la structure du milieu à une échelle inférieure (bien que des travaux antérieurs de Bilby (1957) aient proposé de lier la théorie de la plasticité des métaux à la théorie des dislocations). Nous commençons par étendre ces concepts aux milieux poreux.

I.1. CINEMATIQUE DES MILIEUX POREUX ELASTOPLASTIQUES .

I.1.1. Configuration relâchée. Transformations "élastique" et "plastique".

Considérons un élément de volume de milieu poreux, contenu dans le volume géométrique élémentaire $d\Omega_t$ situé au point \underline{x} de la configuration actuelle. On note respectivement $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et $p(\underline{x})$ les contraintes de Cauchy et la pression du fluide au point \underline{x} . La particule de squelette contenue dans le volume $d\Omega_t$ à l'instant t est repérée par sa position \underline{X} dans la configuration de référence du squelette. On note $\underline{\underline{\sigma}}^o(\underline{X})$ et $p^o(\underline{X})$ les valeurs prises par le tenseur des contraintes de Cauchy et la pression du fluide respectivement dans la configuration de référence. Dans la suite, nous supposons que les contraintes et la pression du fluide sont nulles dans la configuration de référence.

Comme pour un milieu monophasique, on introduit le concept de configuration relâchée en envisageant une décharge de l'élément de volume à partir de la configuration actuelle : on admet qu'il est possible de ramener à zéro de manière réversible les contraintes et la pression du fluide, et on appelle "configuration relâchée" la configuration $d\Omega_t^R$ ainsi définie pour chaque élément de volume par effacement des contraintes et de la pression (figure 1).

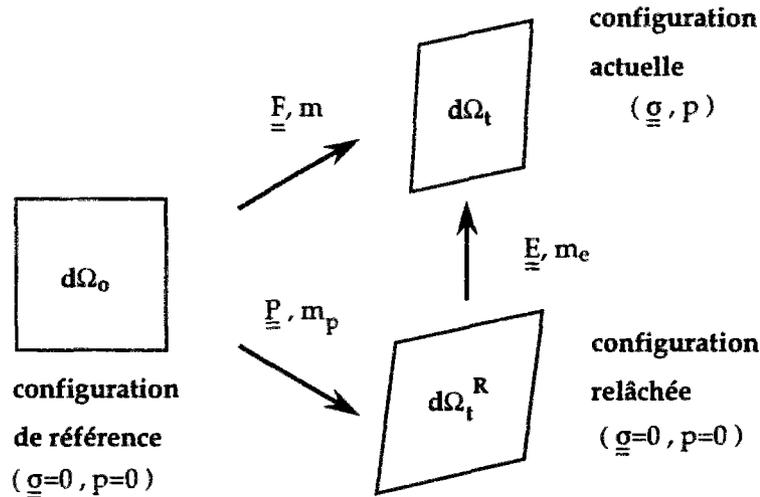


Figure 1

Définition de la configuration relâchée d'un milieu poreux saturé élastoplastique

On note $\underline{\underline{E}}$ la transformation géométrique homogène de la particule de squelette considérée entre $d\Omega_t^R$ et $d\Omega_t$, et $\underline{\underline{P}}$ la transformation géométrique homogène de la même particule de squelette entre $d\Omega_0$ et $d\Omega_t^R$. Le gradient de la transformation géométrique du squelette se décompose alors en deux composantes, la "transformation élastique" $\underline{\underline{E}}$ et la "transformation plastique" $\underline{\underline{P}}$:

$$(1) \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}}$$

Les jacobiens de $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{P}}$, qui représentent la dilatation volumique associée respectivement à la transformation réversible et à la transformation irréversible, sont notés dans la suite J_e et J_p .

D'autre part, on désigne par $m_p |d\Omega_0|$ la différence entre les masses de la particule de fluide contenue dans $d\Omega_t^R$ et de la particule de fluide contenue dans $d\Omega_0$. La pression du fluide étant égale dans la configuration de référence et dans la configuration relâchée, la masse volumique du fluide prend la même valeur ρ_0^f dans ces deux configurations. Introduisant la porosité dans la configuration relâchée ϕ_R , on a :

$$(2) \quad m_p = \rho_0^f J_p \phi_R - \rho_0^f \phi_0$$

Enfin, on désigne par $m_e |d\Omega_t^R|$ la différence entre les masses de la particule de fluide contenue dans $d\Omega_t$ et de la particule de fluide contenue dans $d\Omega_t^R$. Il est facile de voir que l'on a :

$$(3) \quad m_e = \rho^f J_e \phi - \rho_0^f \phi_R$$

L'apport de masse fluide entre la configuration de référence et la configuration actuelle se décompose donc en deux contributions, l'une élastique (réversible) égale à $m_e J_p$, l'autre irréversible et égale à m_p :

$$(4) \quad m = m_e J_p + m_p$$

La transformation globale de l'élément de volume, caractérisée par la transformation géométrique $\underline{\underline{F}}$ de la particule de squelette et par l'apport de masse fluide m , se décompose finalement en deux contributions, l'une réversible, caractérisée par $\underline{\underline{E}}$ et m_e , l'autre irréversible, caractérisée par $\underline{\underline{P}}$ et m_p . Comme dans le cas d'un milieu continu monophasique, il est nécessaire d'insister sur certaines propriétés des formules de décomposition (1) et (4) :

- d'une part, la configuration relâchée $d\Omega_t^R$ est définie par une opération de décharge *locale* de l'élément de volume : elle est donc différente de la configuration du milieu poreux qui résulterait d'une décharge globale de la structure étudiée. Il en résulte notamment que la configuration relâchée ne peut en général pas être déduite de la configuration de référence par une application différentiable : il n'y a pas d'application différentiable sur la configuration de référence dont $\underline{\underline{P}}$ soit le gradient (en élastoplasticité infinitésimale, il est bien connu que les déformations plastiques ne sont en général pas géométriquement compatibles).

- d'autre part, la configuration relâchée, telle qu'elle a été introduite dans ce qui précède, n'est pas définie de manière unique : une rotation de corps rigide superposée à $d\Omega_t^R$ laisse l'élément de volume libre de contraintes et soumis à une pression de fluide nulle. La définition de la configuration relâchée que nous avons donnée définit seulement la déformation pure de la décomposition polaire de $\underline{\underline{E}}$, tandis que la rotation demeure arbitraire. Ainsi, si $d\Omega_t^R$ est une configuration relâchée associée à la décomposition (1) de $\underline{\underline{E}}$, et $\underline{\underline{V}}$ une rotation, nous pouvons définir une autre configuration relâchée associée à la décomposition $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}' \cdot \underline{\underline{P}}'$, avec $\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{V}}$ et $\underline{\underline{P}}' = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{P}}$.

Notons que $\underline{\underline{E}}'$ et $\underline{\underline{P}}'$ ont mêmes jacobiens que $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{P}}$ respectivement : les valeurs de J_e et J_p ne dépendent donc pas de l'orientation de la configuration relâchée. La porosité dans la configuration relâchée ϕ_R , étant une quantité scalaire, ne dépend pas du choix de cette orientation. On déduit donc de (3) et (4) que les valeurs de m_e et m_p sont indépendantes du choix de l'orientation de la configuration relâchée.

I.1.2. Tenseurs de déformation de Green-Lagrange.

La décomposition multiplicative (1) du gradient de la transformation du squelette fait intervenir deux tenseurs $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{P}}$, auxquels on peut associer deux tenseurs de déformation de Green-Lagrange :

$$(5) \quad \underline{\underline{\Delta}}_e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}}); \quad \underline{\underline{\Delta}}_p = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}})$$

Si l'on choisit une autre orientation de la configuration relâchée, associée aux tenseurs $\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{V}}$ et $\underline{\underline{P}}' = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{P}}$, où $\underline{\underline{V}}$ désigne une rotation ($\underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{1}}$ et $\det \underline{\underline{V}} = 1$), on obtient les tenseurs de déformation de Green-Lagrange suivants :

$$(6) \quad \underline{\underline{\Delta}}_e' = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}}'^T \cdot \underline{\underline{E}}' - \underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{\Delta}}_e \cdot \underline{\underline{V}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Delta}}_p' = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}'^T \cdot \underline{\underline{P}}' - \underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{\Delta}}_p$$

Le tenseur de Green-Lagrange associé à la déformation plastique ne dépend donc pas du choix de l'orientation de la configuration relâchée. En revanche, les directions principales des tenseurs de Green-Lagrange associés à $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{E}}'$ sont différentes.

I.1.3. Taux de déformation eulériens.

Compte tenu de la décomposition (1), l'expression (11)₁ du gradient eulérien des vitesses devient :

$$(7) \quad \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}}^s = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} + \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}$$

(on rappelle que $\underline{\underline{u}}^s(\underline{\underline{x}}, t)$ désigne le champ eulérien des vitesses du squelette). On peut donc décomposer de manière additive le taux de déformation eulérien du squelette $\underline{\underline{d}}$:

$$(8) \quad \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{D}}_e + \underline{\underline{D}}_p$$

avec :

$$(9) \quad \underline{\underline{D}}_e = \{ \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \}_s \quad ; \quad \underline{\underline{D}}_p = \{ \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \}_s$$

où $\{ \underline{\underline{a}} \}_s$ et $\{ \underline{\underline{a}} \}_a$ désignent les parties symétrique et antisymétrique du tenseur $\underline{\underline{a}}$. On rappelle que le taux de déformation eulérien $\underline{\underline{D}}_e$ et la dérivée du tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}_e$ sont reliés par :

$$(10) \quad \dot{\underline{\underline{\Delta}}}_e = \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{D}}_e \cdot \underline{\underline{E}}$$

$\underline{\underline{D}}_e$ et $\underline{\underline{D}}_p$ sont appelés "taux de déformation eulérien élastique" et "taux de déformation eulérien plastique". Cette terminologie doit être employée avec précaution, car $\underline{\underline{D}}_p$ n'est pas nul dans une évolution élastique quelconque (cf. §I.2.1.a). D'autre part, comme $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{P}}$ dépendent du choix de la configuration relâchée, $\underline{\underline{D}}_e$ et $\underline{\underline{D}}_p$ en dépendent aussi : si $\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{V}}$ est associé à un autre choix de la configuration relâchée, on a :

$$(11) \quad \dot{\underline{\underline{E}}}' \cdot \underline{\underline{E}}'^{-1} = \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} + \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{V}}} \cdot \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \{ \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \}_s = \underline{\underline{D}}_e \neq \underline{\underline{D}}_e' = \{ \dot{\underline{\underline{E}}}' \cdot \underline{\underline{E}}'^{-1} \}_s$$

I.2. FORMULATION DU COMPORTEMENT.

Nous abordons maintenant la recherche de la formulation de la loi de comportement : il s'agit de décrire l'évolution de l'apport réversible de masse fluide et de la partie élastique de la transformation du squelette d'une part, de l'apport irréversible de masse fluide et de la partie plastique de la transformation d'autre part en fonction des contraintes subies par le milieu poreux et de la pression du fluide. La démarche que l'on suit ici pour obtenir la formulation du comportement consiste à exploiter la nullité de la dissipation intrinsèque dans les évolutions "purement élastiques", et la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque dans les évolutions quelconques du milieu poreux. On rappelle que l'étude de la thermodynamique du milieu poreux considéré comme un milieu continu ouvert permet d'établir que la densité volumique lagrangienne de dissipation intrinsèque \mathcal{D} , qui est nécessairement positive ou nulle, est donnée par (cf. (101)₁ et (99)₁) :

$$(12) \quad \mathcal{D} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + g_m \dot{m} - \dot{\Psi}$$

I.2.1. Evolution de la partie réversible de la transformation du milieu poreux.

Pour tirer parti de la nullité de la dissipation intrinsèque au cours des évolutions réversibles, il est nécessaire de caractériser ces évolutions d'une part, et, compte tenu de l'expression (12) de \mathcal{D} , de préciser les variables dont dépend l'énergie libre Ψ . C'est l'objet des deux paragraphes qui suivent.

I.2.1.a. Évolutions "purement" élastiques

On dit que l'évolution du milieu poreux entre les instants t_0 et t_1 est réversible ou "purement élastique" si la dissipation intrinsèque est nulle pendant cet intervalle de temps, c'est-à-dire si aucun processus irréversible associé à la variation de $\underline{\underline{F}}$ ou de m ne se produit sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$. Les évolutions purement élastiques sont caractérisées par les deux conditions suivantes :

(13) à chaque instant $t \in [t_0, t_1]$, la configuration relâchée se déduit de la configuration relâchée à l'instant t_0 par une rotation

(14) il n'y a pas de variation de l'apport de masse fluide irréversible : $\forall t \in [t_0, t_1] \quad \dot{m}_p = 0$.

La condition (13) traduit le fait qu'il n'y a pas de différence physique entre deux configurations relâchées définies à deux instants différents si elles ne diffèrent que d'une rotation : en effet,

puisque la configuration relâchée n'est définie qu'à une rotation près, deux configurations relâchées qui se déduisent l'une de l'autre par une rotation sont équivalentes. La condition (14) indique qu'il n'y a pas de variation de la partie irréversible de l'apport de masse fluide.

Lorsque la condition (13) est vérifiée, à chaque instant t de l'intervalle $[t_0, t_1]$ le tenseur $\underline{\underline{P}}(t)$ peut s'écrire $\underline{\underline{P}}(t) = \underline{\underline{V}}(t)^T \cdot \underline{\underline{P}}(t_0)$, où $\underline{\underline{V}}(t)$ est une rotation ($\underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{1}}$ et $\det \underline{\underline{V}} = 1$). Il en résulte que $\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(t) = \dot{\underline{\underline{V}}}^T \cdot \underline{\underline{V}}(t)$, et par conséquent

(15) le tenseur $\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(t)$ est antisymétrique.

D'autre part, si $\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(t)$ est antisymétrique sur l'intervalle $[t_0, t]$, $\underline{\underline{P}}(t) \cdot \underline{\underline{P}}(t_0)^{-1}$ est une rotation : les propriétés (13) et (15) sont équivalentes. Dans la suite, on utilisera (14) et (15) pour caractériser les évolutions purement élastiques.

On note que si (15) est vérifiée, on a :

$$(16) \quad \dot{J}_p / J_p = \text{tr}(\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) = 0$$

Il résulte alors de (2), (14) et (16) que la porosité dans la configuration relâchée ϕ_R reste constante au cours d'une évolution purement élastique.

D'autre part, la condition (15) n'implique pas la nullité du taux de déformation eulérien plastique défini par (9). Le tenseur $\underline{\underline{D}}_p$ n'est donc pas nécessairement nul au cours d'une évolution purement élastique, ce qui rend ambiguë la terminologie de "taux de déformation plastique" consacrée par l'usage.

I.2.1.b. Variables de la densité volumique lagrangienne d'énergie libre.

On discute maintenant les variables dont dépend l'énergie libre du milieu poreux Ψ . Nous supposons qu'il existe un choix de la configuration relâchée associé à un couple de tenseurs $\underline{\underline{E}}^0$ et $\underline{\underline{P}}^0$ (avec $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{P}}^0$) qui permet d'écrire la densité volumique d'énergie libre du milieu poreux comme une fonction des tenseurs de Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}_e^0 = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{E}}^0 - \underline{\underline{1}})$ et $\underline{\underline{\Delta}}_p^0 = \frac{1}{2}(\underline{\underline{P}}^0 \cdot \underline{\underline{P}}^0 - \underline{\underline{1}})$ et des apports de masse fluides m_e et m_p :

$$(17) \quad \Psi = \Psi^0(\underline{\underline{\Delta}}_e^0, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p^0, m_p)$$

On admet que la valeur de Ψ ne dépend d'aucune autre variable.

Considérons maintenant un autre choix de la configuration relâchée associée aux tenseurs $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{V}}$ et $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{P}}^0$, où $\underline{\underline{V}}$ désigne une rotation. Les tenseurs de Green-Lagrange associés à cette orientation de la configuration relâchée sont égaux à $\underline{\underline{\Delta}}_e = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{\Delta}}_e^0 \cdot \underline{\underline{V}}$ et $\underline{\underline{\Delta}}_p = \underline{\underline{\Delta}}_p^0$. On voit alors, d'après (17) qu'on ne peut pas exprimer l'énergie libre Ψ comme une fonction des tenseurs de

Green-Lagrange $\underline{\underline{\Delta}}_e$ et $\underline{\underline{\Delta}}_p$ et des apports de masse fluides m_e et m_p seulement : l'énergie libre dépend aussi de la rotation $\underline{\underline{V}}$. Il est donc nécessaire d'introduire un critère physique permettant de distinguer l'orientation de la configuration relâchée associée au couple de tenseurs $\underline{\underline{E}}^o$ et $\underline{\underline{P}}^o$ des autres orientations possibles. C'est l'origine des modèles de plasticité "à repères directeurs", introduits par Mandel (1972).

Pour la construction de notre modèle, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que les propriétés élastiques du milieu poreux sont initialement isotropes dans la configuration relâchée et le demeurent : autrement dit, nous supposons que Ψ ne dépend que des invariants de $\underline{\underline{\Delta}}_e^o$. Cette propriété se traduit mathématiquement par :

$$(18) \quad \forall \underline{\underline{V}}_1 \text{ rotation } \Psi(\underline{\underline{V}}_1^T \cdot \underline{\underline{\Delta}}_e^o \cdot \underline{\underline{V}}_1, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p^o, m_p) = \Psi(\underline{\underline{\Delta}}_e^o, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p^o, m_p)$$

Si cette condition est vérifiée, il découle de (6) et (18) que l'expression de l'énergie libre *ne dépend pas* du choix de la configuration relâchée. Pour un matériau élastiquement isotrope, il n'est donc évidemment pas nécessaire d'introduire la notion de repère directeur.

D'autre part, on supposera que l'ensemble de variables $(\underline{\underline{\Delta}}_e, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p, m_p)$ est normal par rapport à $\underline{\underline{\Delta}}_e$ et m_e , c'est-à-dire que pour des valeurs fixées de $\underline{\underline{\Delta}}_p$ et m_p , le milieu est susceptible de subir des évolutions purement élastiques correspondant à des valeurs arbitraires des taux des grandeurs $\underline{\underline{\Delta}}_e$ et m_e .

I.2.1.c. Equations d'état du milieu poreux.

Portant l'expression (17) de l'énergie libre Ψ dans celle de la dissipation intrinsèque (12), on obtient :

$$(19) \quad \mathcal{D} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + g_m \dot{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}}_e} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}_e} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}}_p} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}_p} - \frac{\partial \Psi}{\partial m_e} \dot{m}_e - \frac{\partial \Psi}{\partial m_p} \dot{m}_p \geq 0$$

On combine alors (4), (8) et (10) avec (19) pour obtenir :

$$(20) \quad \mathcal{D} = (J_p \underline{\underline{\pi}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}}_e}) : \dot{\underline{\underline{\Delta}}_e} + (J_p g_m - \frac{\partial \Psi}{\partial m_e}) \dot{m}_e \\ + J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}_p + g_m (m_e \dot{J}_p + \dot{m}_p) - \frac{\partial \Psi}{\partial m_p} \dot{m}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\Delta}}_p} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}_p} \geq 0$$

où $\underline{\underline{\pi}}$ est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff sur la configuration relâchée, défini par :

$$(21) \quad \underline{\underline{\pi}} = J_e \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{E}}^T$$

(On notera que le tenseur $\underline{\underline{\pi}}$ n'est pas défini sur la configuration de référence, comme c'est le cas en poroélasticité, mais sur la configuration relâchée intermédiaire entre la configuration initiale et la configuration actuelle).

Considérons maintenant à un type particulier d'évolutions du milieu dans lesquelles on a $\dot{m}_p = 0$ et $\dot{\underline{P}} = 0$. Ces évolutions sont manifestement élastiques, puisqu'elles vérifient (14) et (15). La nullité de la dissipation intrinsèque \mathcal{D} dans les évolutions élastiques et le caractère normal de l'ensemble de variables $(\underline{\Delta}_e, m_e, \underline{\Delta}_p, m_p)$ par rapport à $\underline{\Delta}_e$ et m_e permettent d'obtenir les équations d'état du milieu poreux :

$$(22) \quad J_p \underline{\pi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}_e}$$

$$(23) \quad J_p g_m = \frac{\partial \Psi}{\partial m_e}$$

Il est important de souligner que les équations (22) et (23) sont vérifiées à chaque instant, même au cours d'une évolution qui n'est pas purement élastique, en raison de l'hypothèse qu'à chaque instant il serait possible de décharger de manière réversible le volume élémentaire de milieu poreux, même si cette décharge ne se produit *pas* dans son évolution réelle.

Compte tenu de (9) et des équations d'état (22) et (23), l'expression (20) de la non-négativité de la dissipation intrinsèque \mathcal{D} devient :

$$(24) \quad \mathcal{D} = \{ J \underline{\sigma} : \underline{E} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{E}^{-1} + g_m (\dot{m}_p + m_e \dot{J}_p) - \frac{\partial \Psi}{\partial m_p} \dot{m}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}_p} : \dot{\underline{\Delta}}_p \} \geq 0$$

Portant (21) dans (24), on peut encore écrire :

$$(25) \quad \mathcal{D} = \{ J_p (\underline{\pi} \underline{E}^T \cdot \underline{E}) : \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} + g_m (\dot{m}_p + m_e \dot{J}_p) - \frac{\partial \Psi}{\partial m_p} \dot{m}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}_p} : \dot{\underline{\Delta}}_p \}$$

La première équation d'état (22) et l'isotropie de Ψ par rapport à son argument $\underline{\Delta}_e$ montrent que $\underline{\pi}$ a mêmes directions principales que $\underline{\Delta}_e$: le produit de $\underline{\pi}$ et $\underline{E}^T \cdot \underline{E}$ est donc commutatif. On en déduit que $\underline{\pi} \underline{E}^T \cdot \underline{E}$ est un tenseur symétrique. Dans une évolution purement élastique (dans laquelle les conditions (14) et (15) sont vérifiées) \dot{m}_p est nul et $\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1}$ est antisymétrique (ce qui implique que $\dot{J}_p = 0$ et $\dot{\underline{\Delta}}_p = 0$) : on vérifie donc que la dissipation intrinsèque est nulle.

1.2.2. Evolution de la partie irréversible de la transformation du milieu poreux.

Les équations d'état relient les déformations et l'apport de masse fluide réversibles aux contraintes et à la pression du fluide. Nous étudions maintenant les relations décrivant l'évolution de la partie plastique \underline{P} de la transformation du squelette et de l'apport de masse fluide irréversible m_p , c'est-à-dire la formulation de la règle d'écoulement. Ces relations doivent

encore satisfaire la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque, qui, compte tenu des équations d'état, est exprimée par (25).

On se limite désormais aux évolutions dans lesquelles les variations de la masse volumique du fluide sont faibles, ce qui permet de linéariser la relation entre l'enthalpie libre du fluide et sa pression g_m (formule (127)₁ avec $p_0 = 0$) :

$$(26) \quad g_m(p) \cong g_m^0 + \frac{p}{\rho_0^f}$$

Par comparaison avec (38)₂, on voit que l'approximation (26) conduit à considérer que l'énergie libre spécifique du fluide ϕ_m est constante et égale à g_m^0 . On décompose alors l'énergie libre Ψ du milieu poreux en deux contributions associées respectivement au fluide et au squelette (comme on l'a fait au chapitre 2, §II.2.2, formules (36)₂ et (37)₂) :

$$(27) \quad \Psi = \phi_m (m + \rho_0^f \phi_0) + \Psi_s$$

L'énergie libre spécifique du fluide ϕ_m étant constante, Ψ apparaît bien comme une fonction des variables spécifiées en §1.2.1.b si l'énergie libre de la particule de squelette Ψ_s peut elle-même être considérée comme une fonction de $(\underline{\underline{\Delta}}_e, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p, m_p)$.

Portant (27) dans (25), on obtient :

$$(28) \quad \mathcal{D} = \left(J_p (\underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}}) + J_p m_e \frac{p}{\rho_0^f} \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}} \cdot \frac{\partial \Psi_s}{\partial \underline{\underline{\Delta}}_p} \cdot \underline{\underline{P}}^T \right) : \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} + \left(\frac{p}{\rho_0^f} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial m_p} \right) \dot{m}_p \geq 0$$

Nous ferons désormais l'hypothèse de découplage entre propriétés élastiques et plastiques du matériau, au sens où Ψ_s est la somme d'une part d'une contribution qui ne dépend que de $\underline{\underline{\Delta}}_e$ et m_e et représente l'énergie récupérable par décharge de l'élément de volume, que l'on notera Ψ_s^{el} , et d'une contribution qui ne dépend que de $\underline{\underline{\Delta}}_p$ et m_p et qui représente l'énergie libre stockée dans le squelette qui n'est pas restituée à la décharge, appelée énergie bloquée et notée U :

$$(29) \quad \Psi_s(\underline{\underline{\Delta}}_e, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p, m_p) = \Psi_s^{el}(\underline{\underline{\Delta}}_e, m_e) + U(\underline{\underline{\Delta}}_p, m_p)$$

Portant (29) dans (28), et supposant que le terme où figure m_e/ρ_0^f peut être négligé en vertu de l'hypothèse d'élasticité infinitésimale, on obtient finalement :

$$(30) \quad \mathcal{D} = (J_p \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}}) : \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} + \frac{p}{\rho_0^f} \dot{m}_p - \dot{U} \geq 0$$

I.2.2.a. Choix de l'orientation de la configuration relâchée.

On a déjà mentionné que le choix de la configuration relâchée n'a pas d'influence sur l'expression de l'énergie libre, à cause de l'hypothèse d'isotropie des propriétés élastiques. Toutefois, il est commode, dans la perspective de la formulation de la règle d'écoulement, d'adopter la convention suivante : nous choisissons désormais la configuration relâchée de telle

façon que le tenseur $\underline{\underline{E}}$ est un tenseur de déformation pure (donc symétrique). Avec cette convention, il n'y a pas de rotation entre les configurations $d\Omega_t^R$ et $d\Omega_t$ et la partie "rotation" dans le gradient de la déformation $\underline{\underline{F}}$ est entièrement associée au tenseur de déformation plastique $\underline{\underline{P}}$. On note $\underline{\underline{E}}^*$ et $\underline{\underline{P}}^*$ les tenseurs élastique et plastique correspondant à ce choix particulier de la configuration relâchée. D'une manière générale, les grandeurs associées à ce choix de la configuration relâchée sont signalées par un exposant *. Compte tenu de (22) et de l'isotropie de Ψ , $\underline{\underline{\pi}}^*$ a mêmes directions principales que $\underline{\underline{\Delta}}_e^*$ et $\underline{\underline{E}}^*$. D'après la formule de transport (21), $\underline{\underline{\sigma}}$ a alors également mêmes directions principales que $\underline{\underline{E}}^*$: le produit de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}^*$ est donc commutatif. Avec le choix particulier de l'orientation de la configuration relâchée que nous avons fait, l'expression de la dissipation intrinsèque (24) devient :

$$(31) \quad \mathcal{D} = J \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} + \frac{P}{\rho_0^f} \dot{m}_p - \dot{U} \geq 0$$

ou encore, en faisant l'approximation $J_e \cong 1$ en vertu de l'hypothèse que la déformation réversible est infinitésimale :

$$(32) \quad \mathcal{D} = J_p \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} + \frac{P}{\rho_0^f} \dot{m}_p - \dot{U} \geq 0$$

I.2.2.b. Critère de poroplasticité, règle d'écoulement et condition de cohérence.

Nous n'avons pas encore précisé sous quelles conditions l'évolution du milieu cesse d'être réversible. Comme en poroélastoplasticité infinitésimale, on postule l'existence d'une fonction convexe f du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et de la pression du fluide p , telle que les évolutions du milieu poreux demeurent purement élastiques tant que $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) < 0$. La fonction f n'étant en pratique calculée que pour des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ symétriques, on adoptera une forme symétrique pour l'écriture de f , c'est-à-dire telle que $\forall \underline{\underline{\tau}}, p \quad f(\underline{\underline{\tau}}, p) = f(\underline{\underline{\tau}}^T, p)$.

La fonction f porte le nom de critère de poroplasticité ou de fonction de charge. L'ensemble des couples $(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ tels que $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) < 0$ est appelé "domaine d'élasticité" : une évolution au cours de laquelle le point représentatif du couple reste à l'intérieur de ce domaine est réversible. La notion de domaine d'élasticité est largement admise pour les métaux ; en revanche, l'existence d'un domaine d'élasticité est parfois contestée en ce qui concerne les géomatériaux (notons qu'elle est cependant indispensable pour obtenir les équations d'état (22) et (23)). Nous ferons cependant l'hypothèse que sa mise en évidence et sa détermination expérimentales sont possibles.

Nous considérons d'abord le cas d'un matériau sans écrouissage : nous supposons que f ne dépend pas d'autres variables que $\underline{\underline{\sigma}}$ et p , et qu'il n'y a pas d'énergie bloquée dans le squelette ($U \equiv 0$). L'expression (32) de la dissipation intrinsèque devient alors :

$$(33) \quad \mathcal{D} = J_p \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{P}}^*} \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} + \frac{P}{\rho_0^f} \dot{m}_p \geq 0$$

Lorsque la valeur du critère $f(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ n'est pas strictement négative, un écoulement plastique peut se produire. Pour s'assurer que la condition (33) est satisfaite, il suffit d'adopter pour décrire l'évolution de $\underline{\underline{P}}^*$ et m_p une règle d'écoulement qui généralise la démarche des modèles de plasticité parfaite pour les milieux monophasiques en transformation finie (voir par exemple Halphen (1978)) :

$$(34) \quad \text{si } f = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_p \{ \dot{\underline{\underline{P}}^*} \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} \}_s = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \frac{\dot{m}_p}{\rho_0^f} = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial p} \end{array} \right. \quad \dot{\mu} \geq 0$$

La condition de non-négativité du multiplicateur plastique $\dot{\mu}$, la convexité de la fonction de charge $f(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ et l'hypothèse que l'état de contraintes et de pression nulles appartient au domaine d'élasticité suffisent alors à assurer que la condition (33) est vérifiée. On notera que la règle d'écoulement plastique (34) ne donne que la partie symétrique de $J_p \dot{\underline{\underline{P}}^*} \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1}$; il est clair en effet que la condition (33) ne porte que sur la partie symétrique de $\dot{\underline{\underline{P}}^*} \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1}$, puisque le tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

Dans la règle d'écoulement (34), l'évolution des grandeurs caractérisant la partie irréversible de la transformation du milieu poreux est calculée à partir des dérivées de la fonction de charge : f joue donc le rôle de "potentiel plastique" et la règle d'écoulement est associée. On peut évidemment envisager d'autres formulations de la règle d'écoulement, par exemple une règle d'écoulement non associée, c'est-à-dire dans laquelle le potentiel plastique est une fonction $g(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ distincte de la fonction de charge :

$$(35) \quad \text{si } f = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_p \{ \dot{\underline{\underline{P}}^*} \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} \}_s = \dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \frac{\dot{m}_p}{\rho_0^f} = \dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial p} \end{array} \right. \quad \dot{\mu} \geq 0$$

La fonction $g(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ doit alors être choisie de manière à vérifier la condition (33).

Il reste enfin à écrire la condition de cohérence :

$$(36) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad \text{si } f=0 \quad \text{et } \dot{\mu} > 0$$

qui exprime que la valeur de la fonction f demeure nulle lorsque des déformations irréversibles se produisent.

Considérons maintenant le cas d'un matériau écouissable : on note de manière générique χ les variables d'écrouissage dont dépend l'énergie bloquée U . Dans la présentation adoptée ici, les variables χ sont nécessairement fonction de $\underline{\Delta}_p$ et m_p , en raison du choix des variables de l'énergie libre fait en §1.2.1.b (cf. (29)) : on pourrait bien sûr construire dans un cadre plus général une théorie où figureraient d'autres variables d'écrouissage. Le cadre dans lequel nous nous plaçons sera suffisant pour les développements ultérieurs. On désigne par ζ les forces d'écrouissage associées, définies par :

$$(37) \quad \zeta = - \frac{\partial U}{\partial \chi}$$

L'expression (32) de la dissipation intrinsèque devient alors :

$$(38) \quad \mathcal{D} = J_p \underline{\sigma} : \dot{\underline{P}}^* \cdot \underline{P}^{*-1} + \frac{p}{\rho_0^f} \dot{m}_p + \zeta \dot{\chi} \geq 0$$

Revenons à la formulation de la règle d'écoulement. Dans le cas d'un matériau écouissable, le critère de poroplasticité f ne dépend pas seulement de $\underline{\sigma}$ et p , mais aussi des forces d'écrouissage ζ , liées aux variables de l'énergie bloquée χ par (37). On peut envisager plusieurs types de relations décrivant l'évolution de \underline{P}^* , m_p et χ . Par exemple, pour les matériaux standard généralisés, c'est-à-dire vérifiant l'hypothèse du travail plastique maximum (Halphen et Nguyen, 1975), on peut montrer que la règle d'écoulement est associée, c'est-à-dire donnée par (34) (dans laquelle f dépend maintenant de la variable supplémentaire ζ), et que l'évolution des variables d'écrouissage est donnée par :

$$(39) \quad \text{si } f = 0 \quad \dot{\chi} = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad \dot{\mu} \geq 0$$

Une autre possibilité consiste à adopter d'une part la règle d'écoulement associée (34), et à décrire l'évolution des variables d'écrouissage au moyen de la loi d'évolution suivante :

$$(40) \quad \text{si } f = 0 \quad \dot{\chi} = \dot{\mu} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad \dot{\mu} \geq 0$$

où l'on a introduit un potentiel supplémentaire $h(\underline{\sigma}, p, \zeta)$. Il convient alors de s'assurer que les équations (34) et (40) assurent la positivité de la dissipation intrinsèque. La règle d'écoulement et la loi d'évolution (40) choisies correspondent au cas d'un matériau standard non généralisé. Le lecteur pourra se reporter à Coussy (1991) pour une présentation des différents types de lois d'écoulement et de lois d'évolution des variables d'écrouissage.

On complète enfin la formulation du comportement en écrivant la condition de cohérence :

$$(41) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \dot{\zeta} = 0 \quad \text{si } f=0 \text{ et } \dot{\mu} > 0$$

Nous disposons désormais d'une formulation complète du comportement poroélastoplastique. On examine dans la section suivante le cas particulier du matériau parfaitement plastique dont l'élasticité est linéaire.

L3. EXEMPLE : PLASTICITE PARFAITE ET ELASTICITE LINEAIRE.

L3.1. Expressions explicites des équations d'état pour un fluide peu compressible (transformation élastique infinitésimale).

Nous cherchons à préciser la dépendance de l'énergie libre Ψ par rapport à ses variables $(\underline{\underline{\Delta}}_e, m_e, \underline{\underline{\Delta}}_p, m_p)$ pour obtenir des expressions explicites pour les équations d'état. On se place dans un cadre d'hypothèses permettant de faire un certain nombre d'approximations simplificatrices.

D'une part, on rappelle que l'on a linéarisé au §1.2.2 la relation entre l'enthalpie libre du fluide et sa pression g_m . D'autre part, on fait l'hypothèse que la partie réversible de la déformation et l'apport réversible de masse fluide sont infinitésimaux :

$$(42) \quad \|\underline{\underline{\Delta}}_e\| \ll 1$$

$$(43) \quad \left| \frac{m_e}{\rho_0} \right| \ll 1$$

On pose de plus :

$$(44) \quad \underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{e}}^*$$

Comme $\underline{\underline{E}}^*$, le tenseur $\underline{\underline{e}}^*$ est un tenseur symétrique. On peut alors, en vertu de l'hypothèse de déformation élastique infinitésimale, faire l'approximation :

$$(45) \quad \underline{\underline{\Delta}}_e^* = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}}^{*2} - \underline{\underline{1}}) \cong \underline{\underline{e}}^*$$

En vertu de la décomposition (27) de l'énergie libre Ψ , et du découplage (29) entre propriétés élastiques et plastiques du matériau, il suffit d'identifier la partie récupérable de

l'énergie libre du squelette Ψ_s^{el} pour obtenir une forme explicite des équations d'état. Compte tenu de l'hypothèse d'élasticité infinitésimale, on fait l'hypothèse que Ψ_s^{el} peut être représentée par un développement quadratique en $\underline{\underline{e}}^*$ et $\frac{m_e}{\rho_0^f}$:

$$(46) \quad \Psi_s(\underline{\underline{e}}^*, m_e) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{e}}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}}^* + M \left(\frac{m_e}{\rho_0^f}\right)^2 + 2 \frac{m_e}{\rho_0^f} \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{e}}^*)$$

(L'absence de terme linéaire de la forme $\underline{\underline{\pi}}^0 : \underline{\underline{e}}^*$ est liée à l'hypothèse que la configuration relâchée est une configuration dans laquelle la contrainte appliquée au milieu poreux est nulle). Notons que le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{C}}$, égal d'après (27) et (46) à $\partial^2 \Psi / \partial \underline{\underline{e}}^* \partial \underline{\underline{e}}^*$, est un tenseur isotrope, puisque Ψ est une fonction isotrope de $\underline{\underline{\Delta}}_e$. Pour la même raison, le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est nécessairement un tenseur sphérique. On pose :

$$(47) \quad \underline{\underline{D}} = -M b \underline{\underline{1}}$$

En raison de l'hypothèse de découplage entre élasticité et plasticité, $\underline{\underline{C}}$, M et b sont des constantes matérielles.

Portant (27), (46) et (47) dans les équations d'état (22) et (23), on obtient :

$$(48) \quad J_p \underline{\underline{\pi}}^* = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}}^* - M b \frac{m_e}{\rho_0^f}$$

$$(49) \quad J_p g_m = J_p \varphi_m + \frac{1}{\rho^f} \left[M \frac{m_e}{\rho_0^f} - b \operatorname{tr} \underline{\underline{e}}^* \right]$$

En comparant (26) et (49), nous obtenons :

$$(50) \quad J_p p = \left[M \frac{m_e}{\rho_0^f} - b \operatorname{tr} \underline{\underline{e}}^* \right]$$

Eliminant m_e entre (49) et (50), on écrit finalement :

$$(51) \quad J_p \underline{\underline{\pi}}^* = \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{e}}^* - b J_p p \underline{\underline{1}} \quad \text{avec } \underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{C}} - M b^2 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$$

Les expressions (48) et (50) (ou (51) et (50)) constituent les expressions explicites recherchées. On se convaincra sans peine que si l'on fait à présent l'hypothèse que la partie plastique de la transformation géométrique du squelette est infinitésimale, on retrouve les expressions des équations d'état en poroélastoplasticité infinitésimale obtenues par Coussy (1991). En particulier, on donne à nouveau à b et M les noms de "coefficient de Biot" et de "module de Biot" respectivement, et au tenseur $\underline{\underline{C}}_0$ celui de tenseur des modules d'élasticité drainés.

La section suivante est destinée à comparer cette formulation aux formulations les plus couramment employées dans la littérature pour représenter le comportement des milieux poreux élastoplastiques en transformation finie.

I.3.2. Comparaison avec les formulations disponibles dans la littérature.

I.3.2. a. Formulations usuelles du comportement poroélastoplastique en transformation finie.

Dans les formulations du comportement (poro)élastoplastique en transformation finie disponibles dans la littérature, le recours à la démarche thermodynamique n'est pas systématique : la plupart des auteurs proposent de modifier les formulations du comportement élastoplastique en petites perturbations pour des milieux monophasiques, afin de prendre en compte l'effet de rotations finies des particules de squelette d'une part et la présence du fluide d'autre part. Concrètement, il s'agit d'adapter une formulation du type :

$$(52) \quad \underline{\dot{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{d}} - \dot{\underline{\mu}} \underline{\underline{\delta}})$$

où $\underline{\underline{C}}$ désigne un tenseur de modules élastiques, $\underline{\underline{d}}$ le taux de déformation eulérien, et $\dot{\underline{\mu}}$ le multiplicateur plastique.

Ce type de démarche a conduit à l'introduction de la notion de dérivée objective du tenseur des contraintes, dont on rappelle rapidement l'origine : considérons un élément de volume soumis à un tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (par exemple uniaxial) subissant un mouvement de corps rigide, c'est-à-dire à une transformation au cours de laquelle l'élément de volume et le tenseur des contraintes subissent une rotation sans qu'aucune déformation (ni réversible ni irréversible) ne se produise. Il est facile de voir qu'une formulation du type (52) ne constitue pas une représentation convenable du comportement lorsque l'élément de volume considéré subit de grandes rotations : en effet, le taux de déformation eulérien $\underline{\underline{d}}$ et le multiplicateur plastique $\dot{\underline{\mu}}$ sont nuls, alors que la dérivée du tenseur des contraintes ne l'est pas, puisque les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ tournent avec la matière (figure 2).

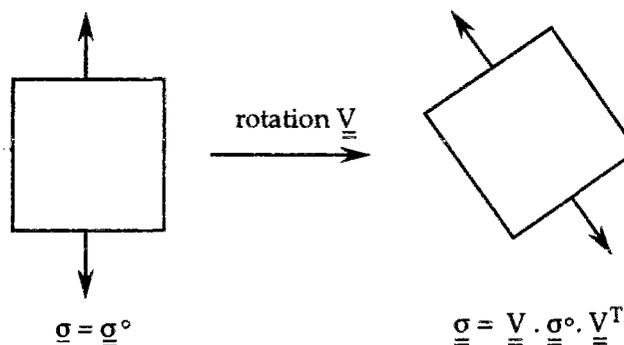


Figure 2
Rotation de l'élément de volume et des directions principales du tenseur des contraintes dans un mouvement de corps rigide

Cette contribution de la rotation d'ensemble de l'élément de volume au taux des contraintes, identifiée par de nombreux auteurs (voir par exemple la synthèse due à Dienes (1979)), est en général prise en compte en remplaçant dans (52) $\underline{\dot{\underline{\sigma}}}$ par une "dérivée objective" $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}$ du tenseur des contraintes, c'est-à-dire une grandeur dont la définition fait intervenir à la fois $\underline{\dot{\underline{\sigma}}}$ et la vitesse de rotation des directions matérielles, de telle sorte que $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}$ soit nulle dans un mouvement de corps rigide. Il est clair que l'on peut donner plusieurs définitions de $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}$ qui satisfont cette condition. Parmi les définitions de $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}$ qui conviennent, les plus fréquemment employées sont les dérivées de Jaumann $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}_J$ et de Green-Naghdi $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}_{GN}$:

$$(53) \quad \underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}_J = \underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_J - \underline{\underline{\Omega}}_J \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$(54) \quad \underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}_{GN} = \underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{GN} - \underline{\underline{\Omega}}_{GN} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

où $\underline{\underline{\Omega}}_J$ désigne le tenseur de spin, c'est-à-dire la partie antisymétrique du gradient eulérien des vitesses $\underline{\underline{\Omega}}_J = [\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}]_a$ et $\underline{\underline{\Omega}}_{GN}$ le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}$, où $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur de rotation pure de la décomposition polaire du gradient de la transformation géométrique $\underline{\underline{F}}$.

On peut montrer que beaucoup d'autres définitions de $\underline{\overset{\vee}{\underline{\sigma}}}$ conviennent (voir par exemple Simo (1988)), mais les formulations obtenues ne sont pas équivalentes lorsque le milieu subit une évolution quelconque. Le problème se pose alors de savoir sur quels critères physiques fonder le choix d'une dérivée objective ou d'une autre (Dienes (1979), Cescotto et Habbraken (1991), Gilormini (1994), Durban (1994), Schieck et Stumpf (1995)...). A un niveau plus fondamental, plusieurs auteurs ont posé la question de savoir si une relation de type (54) constitue une formulation complète du comportement ou s'il est nécessaire d'ajouter une autre équation de comportement (voir à ce sujet les travaux de Dafalias (1984), (1985) et Schieck et Stumpf (1995)). Au vu de la littérature, il semble que ces questions n'ont pas encore reçu de réponse unanimement acceptée.

Enfin, la présence de fluide est en général prise en compte en remplaçant dans la formulation (54) la dérivée du tenseur des contraintes de Cauchy par la dérivée du tenseur de contraintes effectives de Terzaghi $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$ ou d'un tenseur de contraintes effectives comparable à celui introduit par Biot en poroélasticité infinitésimale de la forme $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}}$ (voir par exemple Schrefler, Meroi et Zienkiewicz (1995), Manzari (1996)).

L 3. 2. b. Formulation incrémentale de la loi obtenue.

Nous cherchons ici une formulation de la loi de comportement établie en §I.2 en termes de taux de contraintes et de déformations afin de la comparer avec les formulations présentées au paragraphe précédent. Pour simplifier la présentation, nous ferons dans le raisonnement qui suit l'hypothèse que la règle d'écoulement est associée.

On pose pour alléger les notations $\underline{\underline{\Sigma}} = J \underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\Pi}}^* = J_p \underline{\underline{\pi}}^*$. La formule de transport (21) donne alors :

$$(55) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{\Pi}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*T}$$

Par dérivation par rapport au temps, on obtient :

$$(56) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = \underline{\underline{E}}^* \cdot \dot{\underline{\underline{\Pi}}^*} \cdot \underline{\underline{E}}^{*T} + \dot{\underline{\underline{E}}^*} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*T} + \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{\Pi}}^* \cdot \dot{\underline{\underline{E}}^{*T}}$$

$\underline{\underline{\Pi}}^*$ étant une fonction linéaire de $\underline{\underline{e}}^*$ et m_e , le premier terme du membre de droite de (56) est de l'ordre de $(\|\underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{e}}^*}\|, Mb \dot{m}_e / \rho_0^f)$. Les deux autres termes sont du même ordre que $(\|\dot{\underline{\underline{e}}^*}\| \|\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}}^*\|, \|\dot{\underline{\underline{e}}^*}\| Mb m_e / \rho_0^f)$, donc négligeables par rapport au premier en élasticité infinitésimale. Si on se limite aux termes d'ordre le plus bas, (56) se ramène donc à $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \cong \dot{\underline{\underline{\Pi}}^*}$, ou encore, par dérivation de (51) par rapport au temps :

$$(57) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \cong \dot{\underline{\underline{\Pi}}^*} = \underline{\underline{C}}_o : \dot{\underline{\underline{e}}^*} - \overline{b J_p p} \underline{\underline{1}}$$

De plus, en élasticité infinitésimale, on déduit facilement de (10) et (44) que l'on peut faire les approximations : $\underline{\underline{D}}_e^* \cong \underline{\underline{A}}_e^* \cong \dot{\underline{\underline{e}}^*}$. Compte tenu de (8), (57) donne alors :

$$(58) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = \underline{\underline{C}}_o : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{D}}_p^*) - \overline{b J_p p} \underline{\underline{1}}$$

On rappelle que d'après (9), on a :

$$(59) \quad \underline{\underline{D}}_p^* = \{ \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{*-1} \}_s = \{ \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_s^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*-1} \}_s + \{ \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*-1} \}_s$$

où $\underline{\underline{L}}_s^*$ et $\underline{\underline{L}}_a^*$ désignent respectivement les parties symétrique et antisymétrique de $\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1}$. On montre en utilisant (42) que l'on a, en se limitant aux termes d'ordre le plus bas par rapport à $\underline{\underline{e}}^*$:

$$(60) \quad \{ \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_s^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*-1} \}_s \cong \{ \underline{\underline{L}}_s^* + \underline{\underline{e}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_s^* - \underline{\underline{L}}_s^* \cdot \underline{\underline{e}}^* \}_s \cong \underline{\underline{L}}_s^*$$

$$(61) \quad \{ \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{E}}^{*-1} \}_s \cong \{ \underline{\underline{L}}_a^* + \underline{\underline{e}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_a^* - \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{e}}^* \}_s \cong \underline{\underline{e}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_a^* - \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{e}}^*$$

et l'on peut donc, compte tenu de la règle d'écoulement (34), faire l'approximation :

$$(62) \quad \underline{\underline{D}}_p^* \cong \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{e}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_a^* - \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{e}}^*$$

On déduit alors de (58), (62), (61) et de l'isotropie de $\underline{\underline{C}}_o$ que :

$$(63) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = \underline{\underline{C}}_o : \left(\underline{\underline{d}} - \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) - (\underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{e}}^*) \cdot \underline{\underline{L}}_a^* + \underline{\underline{L}}_a^* \cdot (\underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{e}}^*) - \overline{b} \dot{J}_p \underline{\underline{1}}$$

Portant (51) dans (63), on obtient :

$$(64) \quad \overline{b} \dot{J}_p \underline{\underline{1}} + (\underline{\underline{\Sigma}} + b \underline{\underline{J}}_p \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{\underline{L}}_a^* - \underline{\underline{L}}_a^* \cdot (\underline{\underline{\Sigma}} + b \underline{\underline{J}}_p \underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{C}}_o : \left(\underline{\underline{d}} - \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

On définit alors un "tenseur des contraintes effectives" $\underline{\underline{\Sigma}}'$ un peu inhabituel en posant :

$$(65) \quad \underline{\underline{\Sigma}}' = (\underline{\underline{\Sigma}} + b \underline{\underline{J}}_p \underline{\underline{1}}) \equiv J (\underline{\underline{\sigma}} + b \underline{\underline{p}} \underline{\underline{1}})$$

et on écrit finalement la relation (64) s'écrit :

$$(66) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}' + \underline{\underline{\Sigma}}' \cdot \underline{\underline{L}}_a^* - \underline{\underline{L}}_a^* \cdot \underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{C}}_o : \left(\underline{\underline{d}} - \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

Il est facile d'établir, en utilisant (7), (42), (44) et (45) que l'on a :

$$(67) \quad \dot{(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1})}_a = \underline{\underline{L}}_a^* + \frac{1}{2} (\underline{\underline{e}}^* \cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^* - \dot{\underline{\underline{e}}}^* \cdot \underline{\underline{e}}^*) + \underline{\underline{e}}^* \cdot \underline{\underline{L}}_s^* - \underline{\underline{L}}_s^* \cdot \underline{\underline{e}}^*$$

Portant l'expression de $\underline{\underline{L}}_a^*$ déduite de (67) dans (66), et compte tenu de la règle d'écoulement (34), on peut alors montrer que l'on a, en se limitant aux termes d'ordre le plus bas vis-à-vis de $\underline{\underline{e}}^*$:

$$(68) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}'_J = \underline{\underline{C}}_o : \left(\underline{\underline{d}} - \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

L'approche proposée ici conclut donc à la validité de l'emploi de la dérivée de Jaumann (et non pas de n'importe quelle autre dérivée objective) et fait apparaître un tenseur de contraintes effectives dans lequel figure la dilatation volumique du squelette. On notera que le critère de plasticité ne porte pas nécessairement sur le même tenseur, mais peut dépendre d'une manière a priori quelconque du tenseur des contraintes de Cauchy et de la pression du fluide.

II. COMPORTEMENT DES ARGILES SATUREES EN TRANSFORMATION FINIE.

La suite de ce chapitre est consacrée à la recherche d'une formulation du comportement poroélastoplastique en transformation finie adaptée aux argiles saturées. Nous conservons l'hypothèse d'élasticité infinitésimale : la déformation du squelette et l'apport de masse fluide "réversibles", c'est-à-dire qui ont lieu entre la configuration relâchée et la configuration actuelle, sont encore supposés infinitésimaux. Nous conservons aussi l'hypothèse d'isotropie des propriétés élastiques du matériau au cours de ses évolutions : l'énergie libre ne dépend du tenseur de Green-Lagrange associé à la transformation élastique que par l'intermédiaire de ses invariants. Dans ce cadre, le problème consiste donc à choisir une loi d'élasticité réaliste pour le type de matériau considéré et à introduire une loi d'écroutissement pour prendre en compte l'évolution du domaine d'élasticité au cours des transformations du milieu.

Il est naturel de s'inspirer des nombreux modèles élastoplastiques qui ont été développés depuis une quarantaine d'années pour modéliser le comportement des sols. Dans ces modèles, les deux constituants (solide et fluide) du milieu à l'échelle microscopique sont en général considérés comme incompressibles. Nous commencerons par étudier les conséquences de l'hypothèse d'incompressibilité du solide constituant le squelette du milieu poreux sur le modèle de poroélastoplasticité en transformation finie présenté dans la première partie. Nous chercherons ensuite à étendre l'un des modèles les plus souvent employés pour modéliser le comportement des argiles normalement consolidées, le modèle de Cam-Clay, aux milieux poreux en transformation finie.

II.1. PRISE EN COMPTE DE L'INCOMPRESSIBILITE DU SOLIDE DANS LA MODELISATION BIPHASIQUE DES MILIEUX POREUX.

L'objet de ce paragraphe est d'exploiter l'hypothèse d'incompressibilité du solide constituant le squelette dans la modélisation biphasique des milieux poreux. On obtient alors une formulation très proche de celles utilisées en mécanique des sols.

Rappelons d'abord que l'énergie libre des deux milieux continus squelette et fluide Ψ se décompose en deux contributions associées respectivement au fluide et au squelette. Portant (27) dans l'expression (12) de la dissipation intrinsèque, on obtient :

$$(69) \quad \mathcal{D} = \int \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + (g_m - \varphi_m) \dot{m} - (m + \rho_o^f \phi_o) \dot{\phi}_m - \dot{\Psi}_s$$

L'équation d'état du fluide (84)₁ et la relation (38)₂ entre enthalpie libre et énergie libre permettent alors de montrer que l'on a :

$$(70) \quad \mathcal{D} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + p \left(\frac{(\overline{m} + \rho_0^f \phi_0) / \rho^f}{\rho^f} \right) - \dot{\Psi}_s$$

Si l'on fait l'hypothèse classique en mécanique des sols que le solide constituant le squelette est incompressible, on a (cf. (130)₁) :

$$(71) \quad J\phi = J - (1 - \phi_0)$$

d'où l'on déduit :

$$(72) \quad m = \rho^f (J - (1 - \phi_0)) - \rho_0^f \phi_0$$

Portant (72) dans (70), on écrit finalement l'inégalité de non-négativité de la dissipation intrinsèque sous la forme :

$$(73) \quad \mathcal{D} = J \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{d}} - \dot{\Psi}_s \geq 0$$

où $\underline{\underline{\sigma}}'$ désigne le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi.

Reprenons la formulation du comportement en commençant par les équations d'état. Lorsque le solide est incompressible, on déduit facilement de (72) que l'apport de masse fluide irréversible m_p est donné par :

$$(74) \quad m_p = \rho_0^f (J_p - 1)$$

en raison du fait que la pression et donc la masse volumique du fluide prennent la même valeur dans la configuration relâchée et dans la configuration de référence. Il est alors facile de voir que la condition (15) suffit à caractériser les évolutions réversibles : en effet, si (15) est vérifiée, la condition (14) l'est aussi, en vertu de (16) et (74).

On obtient alors en écrivant que la dissipation intrinsèque (73) est nulle dans les évolutions réversibles caractérisées par la condition (15), l'équation d'état suivante :

$$(75) \quad J_p \underline{\underline{\pi}} + J_p \underline{\underline{p}} \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{E}}^{-1})^T = \frac{\partial \Psi_s}{\underline{\underline{\Delta}}_e}$$

où le tenseur $\underline{\underline{\pi}}$ est défini par la même formule de transport que (21) :

$$(76) \quad \underline{\underline{\pi}} = J_e \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{E}}^{-1})^T$$

On notera que lorsque le solide est incompressible, la condition de nullité de la dissipation intrinsèque ne fournit qu'une seule équation d'état (75) au lieu des deux équations (22) et (23), ce qui compense l'introduction d'une relation scalaire supplémentaire (71). En pratique, la relation d'état "manquante" (23) reliait, à m_p et J_p fixés, la valeur de la pression du fluide à m_e et $\underline{\underline{\Delta}}_e$, par l'intermédiaire de son enthalpie libre g_m . Dans le cas où le solide est incompressible, c'est la

relation (72), déduite de la condition d'incompressibilité du solide et de la définition de m , qui relie la pression du fluide à m_e et $\underline{\underline{\Delta}}_e$, par l'intermédiaire de sa masse volumique ρ^f .

Compte tenu de l'hypothèse d'élasticité infinitésimale, l'équation d'état (75) peut aussi s'écrire :

$$(77) \quad J_p \underline{\underline{\pi}} + J_p P \underline{\underline{1}} = \frac{\partial \Psi_s}{\underline{\underline{\Delta}}_e}$$

Cette équation a la même structure que l'équation (51) obtenue précédemment sans faire l'hypothèse d'incompressibilité du solide : elle relie un tenseur de contraintes effectives généralisé à la seule déformation élastique du squelette. La compatibilité entre (77) et (51) permet d'autre part d'identifier la valeur du coefficient de Biot : lorsque le solide constituant le squelette est incompressible, on a $b \cong 1$ (on retrouve un résultat classique en transformation infinitésimale).

Poursuivons la démarche menant à la formulation du comportement : compte tenu de l'équation d'état (75) et faisant pour l'orientation de la configuration relâchée le même choix qu'en §I.2.2.a, l'expression de la dissipation intrinsèque (73) devient :

$$(78) \quad D = J_p \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\dot{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} - \dot{U} = J_p \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\dot{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} + \zeta \dot{\chi} \geq 0$$

Notant $F(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta)$ le critère de plasticité, on adopte la règle d'écoulement associée suivante :

$$(79) \quad \text{si } f = 0 \quad J_p \{ \underline{\underline{\dot{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} \}_s = \dot{\mu} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\mu} \geq 0$$

et l'on conserve la forme (40) pour la loi d'évolution des variables d'écrouissage. Il résulte de la liaison (74) que le taux de variation de l'apport irréversible de masse fluide est donné par :

$$(80) \quad \text{si } f = 0 \quad \dot{m}_p / \rho_0^f = \dot{J}_p = \dot{\mu} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad \dot{\mu} \geq 0$$

La compatibilité avec la règle d'écoulement associée (34) proposée dans le cadre général de la poroélastoplasticité (§I.2.2.b) impose que la fonction de charge vérifie :

$$(81) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

Une démonstration élémentaire montre alors que la propriété (81) est équivalente à :

$$(82) \quad \forall (\underline{\underline{\sigma}}, p) \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}, 0)$$

(Il suffit d'étudier les variations de la fonction d'une variable réelle $h(x) = f(\underline{\underline{\sigma}} + x p \underline{\underline{1}}, p - x p)$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour établir la propriété dans le sens direct. La réciproque est immédiate). Si l'on adopte la règle d'écoulement (34), il est donc impératif d'écrire la fonction de charge en contraintes effectives de Terzaghi dans le cas où le solide constituant le squelette est incompressible : c'est ce que l'on fait d'emblée dans les modèles de mécanique des sols. Pour une

règle non associée du type (35), on montrerait de manière analogue que le potentiel plastique doit être une fonction du tenseur des contraintes effectives de Terzaghi.

II.2. LE MODELE CAM-CLAY.

Dans les années 1960, le groupe de mécanique des sols de l'Université de Cambridge a développé une famille de modèles élastoplastiques destinés à décrire le comportement des argiles (Burland et Roscoe (1968), Roscoe *et al* (1968), Schofield et Wroth (1968)). L'ensemble des modèles de cette famille sera désigné ici par le terme de modèle Cam-Clay. Il s'agit de modèles de plasticité associée avec écrouissage, dont on présente rapidement les principales caractéristiques.

II.2.1. Caractéristiques générales.

La cinématique du milieu continu représentant le sol est décrite au moyen des outils habituels, et la transformation géométrique du milieu est supposée infinitésimale. La décomposition (1) de son gradient $\underline{\underline{F}}$ en parties élastique et plastique conduit alors à la décomposition additive classique du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$(83) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_p$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ sont les tenseurs des déformations plastiques et élastiques linéarisés.

La loi d'élasticité est en général formulée sous la forme de relations incrémentales entre les déformations élastiques et les contraintes effectives de Terzaghi $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$, du type :

$$(84) \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{\sigma}}') : d\underline{\underline{\sigma}}'$$

La forme de ces relations est étudiée en détail dans la section §II.2.2.

Le modèle Cam-Clay est un modèle de plasticité associée. Notant f la fonction de charge, on décrit l'évolution des déformations plastiques par la règle d'écoulement :

$$(85) \quad \text{si } f = 0 \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'} \quad \text{avec } \dot{\mu} \geq 0$$

Comme dans de nombreux modèles de mécanique des sols, le critère de plasticité f ne dépend pas seulement du tenseur des contraintes effectives de Terzaghi $\underline{\underline{\sigma}}'$: dans le modèle Cam-Clay, l'écrouissage est décrit au moyen d'une seule variable d'écrouissage (scalaire) et une seule force d'écrouissage. La forme du critère et la dépendance de l'énergie bloquée sont discutées respectivement dans la section §II.2.3.

La plupart des modèles de la mécanique des sols ont été développés à partir d'essais classiques, particulièrement l'essai œdométrique et l'essai triaxial. On considère en général qu'au

cours de ces essais, les directions principales du tenseur de déformation linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ sont fixes et identiques pour les deux tenseurs. Supposons par exemple que les contraintes et les déformations présentent une symétrie de révolution autour de l'axe vertical désigné par Ox_1 :

$$(86) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \varepsilon_3 (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(87) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_e = \varepsilon_{e1} \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \varepsilon_{e3} (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(88) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_p = \varepsilon_{p1} \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \varepsilon_{p3} (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(89) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \sigma_3 (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(90) \quad \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}} = \sigma'_1 \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \sigma'_3 (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

Dans ce contexte, il est habituel d'introduire les variables suivantes, dites variables triaxiales :

$$(91) \quad P = -(\sigma_1 + 2\sigma_3) / 3$$

$$(92) \quad P' = P - p = -(\sigma_1 + 2\sigma_3) / 3 - p$$

$$(93) \quad Q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3$$

$$(94) \quad \varepsilon^v = -(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) ; \quad \varepsilon_e^v = -(\varepsilon_{e1} + 2\varepsilon_{e3}) ; \quad \varepsilon_p^v = -(\varepsilon_{p1} + 2\varepsilon_{p3})$$

$$(95) \quad \varepsilon^d = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) ; \quad \varepsilon_e^d = \frac{2}{3}(\varepsilon_{e1} - \varepsilon_{e3}) ; \quad \varepsilon_p^d = \frac{2}{3}(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p3})$$

On appelle P la contrainte totale moyenne (ou contrainte de confinement), Q le déviateur des contraintes totales (égal au déviateur des contraintes effectives), P' la contrainte effective moyenne. ε^v désigne la déformation volumique totale et ε^d la déformation déviatorique totale. ε_e^v et ε_e^d (respectivement ε_p^v et ε_p^d) désignent les déformations volumique et déviatorique élastiques (respectivement plastiques). On notera que l'on adopte ici les conventions de signe de la mécanique des sols : une contrainte de confinement positive $P > 0$ correspond à une compression, et une déformation volumique positive $\varepsilon^v > 0$ correspond à une diminution de volume.

II 2. 2. Modélisation des déformations réversibles.

Le comportement général d'un sol dans une expérience de compression isotrope drainée est illustré par la figure 3.

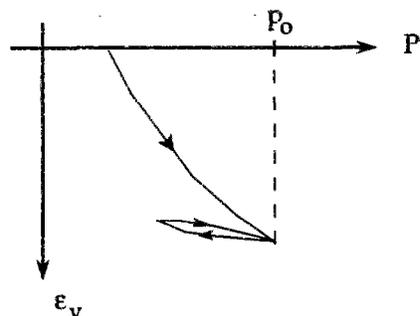


Figure 3- Déformation volumique dans un essai de compression isotrope

Dans la phase de première charge, la contrainte de confinement P' augmente progressivement jusqu'à une valeur p_o ; on constate que l'on peut alors effectuer des cycles de charge-décharge au cours desquels le comportement du sol est approximativement réversible, pourvu que la valeur de P' demeure inférieure à p_o . On définit le module de compression K du sol au cours de tels cycles par :

$$(96) \quad d\varepsilon_e^v = dP'/K$$

Pour les argiles normalement consolidées ou faiblement surconsolidées, on représente le plus souvent les variations de K par une dépendance linéaire par rapport à P' :

$$(97) \quad K = (1+e_o) P'/\kappa$$

où e_o désigne l'indice des vides initial et κ une constante strictement positive (On rappelle que l'indice des vides noté e est lié à la porosité par $e = \phi/(1-\phi)$).

Lorsque la contrainte appliquée n'est pas isotrope, on postule dans le modèle de Cam-Clay que les réponses en déformation à des incréments de contraintes volumique et déviatorique sont "découplées", au sens où les déformations induites par un incrément (dP' , dQ) sont données par :

$$(98) \quad d\varepsilon_e^v = dP'/K$$

$$(99) \quad d\varepsilon_e^d = dQ/3G$$

On suppose de plus que l'expression (97) de K identifiée expérimentalement dans un essai de compression isotrope demeure valide. Il est habituel de faire d'autre part l'hypothèse que le rapport G/K est constant ; le module de cisaillement G est alors de la forme :

$$(100) \quad G = P'/\theta$$

où θ est une constante matérielle. On néglige en général la dépendance de K et G par rapport à Q .

Il est connu que, du point de vue thermodynamique, les équations (98) et (99), associées aux expressions (97) et (100) de K et G ne représentent pas un comportement réversible (voir par exemple Loret (1985)). Considérons un cycle de chargement fermé dans l'espace (P',Q) tel que celui représenté sur la figure 4. Pour un comportement élastique, les déformations sont réversibles et l'énergie libre du système est donc la même au début et à la fin du cycle.

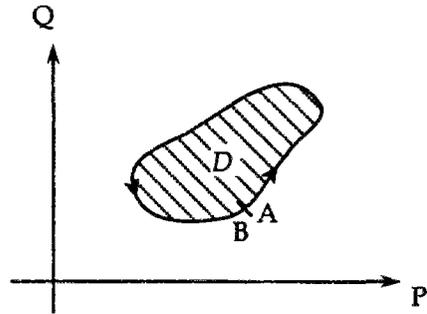


Figure 4
Cycle de chargement dans l'espace des contraintes

L'énergie fournie au système au cours du cycle est donnée par l'intégrale de contour :

$$(101) \quad W = \oint_{A \rightarrow B} P' d\epsilon_e^v + Q d\epsilon_e^d$$

Si les incréments de déformation $d\epsilon_e^v$ et $d\epsilon_e^d$ sont donnés par (98) et (99) avec les expressions (97) et (100) de K et G, on montre en appliquant la formule de Stokes que l'on a :

$$(102) \quad W = \oint_{A \rightarrow B} P' dP'/K + Q dQ/3G = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{Q}{3G} \right) - \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{P'}{K} \right) \right] dP' dQ$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale W soit nulle pour tout trajet de chargement fermé dans l'espace des contraintes est donc que K et G vérifient :

$$(103) \quad \frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{Q}{3G} \right) = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{P'}{K} \right)$$

Cette condition n'est pas vérifiée si l'on adopte pour K et G les expressions (97) et (100) : ces expressions sont donc incompatibles avec l'hypothèse d'un comportement réversible.

On peut résoudre la difficulté en faisant l'hypothèse que G est une constante ou une fonction de Q seul, mais dans ce cas le modèle ne permet plus de rendre compte de l'idée intuitive que les déformations élastiques $d\epsilon_e^d$ associées à un incrément du déviateur dQ sont d'autant plus faibles que la contrainte de confinement P' est grande. On peut aussi considérer que G est infini : la formulation obtenue est alors thermodynamiquement admissible, mais ne permet pas de rendre compte des déformations déviatoriques réversibles.

D'un point de vue plus général, il convient pour lever la difficulté de revenir à l'expression de la dissipation intrinsèque (73), qui en transformation infinitésimale et dans le contexte des essais classiques de la mécanique des sols, s'écrit :

$$(104) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\Psi}_s = P' \dot{\epsilon}_e^v + Q \dot{\epsilon}_e^d - \dot{\Psi}_s \geq 0$$

Lors de cycles de déchargement-rechargement réversibles, la dissipation intrinsèque est nulle, les taux de déformations plastiques le sont aussi (on a donc $\dot{\epsilon}_e^v = \dot{\epsilon}_e^v$ et $\dot{\epsilon}_e^d = \dot{\epsilon}_e^d$), et l'énergie bloquée

n'évolue pas ($\dot{U} = 0$, et donc en vertu de la décomposition (29) de l'énergie libre $\dot{\Psi}_s = \dot{\Psi}_s^{el}$). On a donc au lieu de (104) :

$$(105) \quad P' \dot{\epsilon}_e^v + Q \dot{\epsilon}_e^d - \dot{\Psi}_s^{el} = 0$$

On en déduit que les équations d'état s'écrivent :

$$(106) \quad P' = \frac{\partial \Psi_s^{el}}{\partial \epsilon_e^v} (\epsilon_e^v, \epsilon_e^d)$$

$$(107) \quad Q = \frac{\partial \Psi_s^{el}}{\partial \epsilon_e^d} (\epsilon_e^v, \epsilon_e^d)$$

On rappelle que l'on désigne par Ψ_s^{el} la partie de l'énergie libre du milieu qui ne dépend que de la déformation réversible et qui est restituée par le milieu à la décharge, c'est-à-dire la différence entre l'énergie libre totale et l'énergie bloquée. Les équations (106) et (107) peuvent être inversées pour obtenir ϵ_e^v et ϵ_e^d en fonction de P' et Q . On introduit la transformée de Legendre-Fenchel Ψ_s^{el*} de l'énergie libre Ψ_s^{el} définie par :

$$(108) \quad \Psi_s^{el*} (P', Q) = \text{Sup}_{\epsilon_e^v, \epsilon_e^d} (P' \epsilon_e^v + Q \epsilon_e^d - \Psi_s^{el} (\epsilon_e^v, \epsilon_e^d))$$

Les équations (106)-(107) sont alors équivalentes à :

$$(109) \quad \epsilon_e^v = \frac{\partial \Psi_s^{el*}}{\partial P'} (P', Q)$$

$$(110) \quad \epsilon_e^d = \frac{\partial \Psi_s^{el*}}{\partial Q} (P', Q)$$

et les différentielles des déformations réversibles font apparaître deux termes qui n'apparaissent pas dans (98) et (99) :

$$(111) \quad d\epsilon_e^v = dP'/K + dQ/H$$

$$(112) \quad d\epsilon_e^d = dP'/H + dQ/3G$$

où l'on a posé :

$$(113) \quad 1/K = \frac{\partial^2 \Psi_s^{el*}}{\partial P' \partial P'} \quad ; \quad 1/H = \frac{\partial^2 \Psi_s^{el*}}{\partial P' \partial Q} \quad ; \quad 1/3G = \frac{\partial^2 \Psi_s^{el*}}{\partial Q \partial Q}$$

C'est donc l'absence des termes lié aux dérivées croisées de Ψ_s^{el*} dans les formules (98) et (99) qui est à l'origine de la non-admissibilité thermodynamique du modèle qu'elles définissent. Ces termes disparaissent si les dérivées croisées de Ψ_s^{el*} sont nulles, c'est-à-dire si $H \rightarrow \infty$; mais, dans ce cas, G ne dépend pas de P' .

Lorsque H prend une valeur finie, un incrément de déformation volumique réversible peut être produit sous contrainte de confinement constante ($dP' = 0$) par un incrément de contrainte déviatorique $dQ \neq 0$. Cet effet n'est pas associé à la dilatance du matériau, puisque cette propriété concerne la partie irréversible des déformations. L'existence d'un incrément de déformation volumique associé à un incrément de contrainte purement déviatorique ($dP' = 0, dQ \neq 0$) pour un comportement élastique est classique dans le cas d'un comportement anisotrope : considérons par exemple un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et un matériau élastique linéaire transversement isotrope autour de la direction du vecteur \underline{e}_1 . On note E et ν (respectivement E' et ν') le module de Young et le coefficient de Poisson dans le plan $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (respectivement dans la direction \underline{e}_1). Pour un incrément de contrainte déviatorique "triaxial" défini par $d\sigma_2 = d\sigma_3 = -d\sigma_1 / 2$, on obtient une déformation volumique $d\varepsilon_e^v$ donnée par :

$$(114) \quad d\varepsilon_e^v = d\sigma_1 \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} - \frac{2\nu'}{E'} + \frac{2\nu}{E} \right)$$

Cependant, il faut souligner que ce type de considération n'explique pas pourquoi on observe un incrément de déformation volumique $d\varepsilon_e^v \neq 0$ sous contrainte de confinement constante $dP' = 0$ dans (111), puisque le comportement représenté par (111) et (112) est isotrope. L'existence d'incrément de déformation volumique non nuls sous contrainte de confinement constante est en fait la conséquence du fait que G dépend de P' .

Il est facile de voir d'après (113) que les fonctions $K(P', Q)$, $H(P', Q)$ et $G(P', Q)$ sont astreintes à vérifier les identités suivantes :

$$(115) \quad \frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{K} \right)$$

$$(116) \quad \frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{1}{3G} \right) = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{H} \right)$$

Calculons à nouveau l'intégrale W définie par (101) en utilisant les expressions (111) et (112) au lieu de (98) et (99). En utilisant à nouveau la formule de Stokes on montre que :

$$(117) \quad W = \oint_{A \rightarrow B} P' d\varepsilon_e^v + Q d\varepsilon_e^d = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{P'}{H} + \frac{Q}{3G} \right) - \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{P'}{K} + \frac{Q}{H} \right) \right] dP' dQ$$

Si les conditions (115) et (116) sont vérifiées, on a :

$$(118) \quad \forall P' \quad \forall Q \quad \frac{\partial}{\partial P'} \left(\frac{P'}{H} + \frac{Q}{3G} \right) - \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{P'}{K} + \frac{Q}{H} \right) = 0$$

et l'intégrale de la puissance reçue au cours d'un cycle réversible est donc nulle. Sur le plan mathématique, on se convaincra sans peine que la condition (118) est en fait équivalente à (115) et (116). D'un point de vue physique, la condition (118) d'une part, et les conditions (115) et (116) d'autre part, traduisent la même propriété, à savoir la réversibilité du comportement : (118) est déduite du fait qu'aucune énergie n'est dissipée au cours d'un trajet de chargement fermé dans

l'espace des contraintes tandis que (115) et (116) traduisent la nullité du taux de dissipation à chaque instant.

Nous cherchons maintenant à proposer une expression explicite des fonctions $K(P', Q)$, $H(P', Q)$ et $G(P', Q)$ compatible avec la condition (118), et voisine de la formulation originale de la loi d'élasticité du modèle Cam-Clay. Par analogie avec (97), on cherche à prendre en compte la dépendance de K avec P' et Q en posant :

$$(119) \quad K = P' / k(\eta)$$

où $\eta=Q/P'$ représente l'inclinaison des contraintes. De manière analogue, on pose :

$$(120) \quad 3G = P' / g(\eta)$$

$$(121) \quad H = P' / h(\eta)$$

La condition (118) s'écrit alors :

$$(122) \quad \frac{\partial}{\partial P'} (h(\eta) + \eta g(\eta)) = \frac{\partial}{\partial Q} (k(\eta) + \eta h(\eta)) \Rightarrow k'(\eta) + \eta g(\eta) + \eta^2 g'(\eta) = -2 \eta h'(\eta) - h(\eta)$$

On cherche une fonction $h(\eta)$ telle que H tende vers l'infini lorsque le déviateur des contraintes est nul, et une fonction $k(\eta)$ qui varie lentement lorsque l'inclinaison des contraintes est faible. On choisit de prendre :

$$(123) \quad h(\eta) = -d \eta$$

$$(124) \quad g(\eta) = d$$

$$(125) \quad k(\eta) = c + d \eta^2$$

où c et d sont deux constantes. La constante c s'identifie dans un essai de compression isotrope (cf. (96) et (97)) :

$$(126) \quad c = \frac{\kappa}{1+e_0}$$

On obtient finalement l'expression de la fonction $\Psi_s^{el*}(P', Q)$ en intégrant les équations (111) et (112). Par convention, on associe en général en mécanique des sols l'état de déformation réversible nulle ($\epsilon_e^v = 0$, $\epsilon_e^d = 0$) à un état de contraintes isotrope non nul ($P'=p_i > 0$, $Q = 0$). On trouve :

$$(127) \quad d\epsilon_e^v = [c + d \frac{Q^2}{P'^2}] \frac{dP'}{P'} - d \frac{Q}{P'} \frac{dQ}{P'}$$

$$(128) \quad d\epsilon_e^d = -d \frac{Q}{P'} \frac{dP'}{P'} + d \frac{dQ}{P'}$$

$$(129) \quad \Psi_s^{el*}(P', Q) = d \quad Q^2/2P' + c \left(P' \ln \frac{P'}{P_i} - P' \right)$$

$$(130) \quad \varepsilon_e^v = -d \quad Q^2/2P'^2 + c \ln \frac{P'}{P_i}$$

$$(131) \quad \varepsilon_e^d = d \quad Q/P'$$

Les équations (130) et (131) permettent d'obtenir P' et Q en fonction des déformations réversibles ; on déduit alors de (106) et (107) l'expression de la partie restituable de l'énergie libre Ψ_s^{el} :

$$(132) \quad P' = p_i \exp\left(\frac{\varepsilon_e^v + (\varepsilon_e^d)^2/2d}{c}\right)$$

$$(133) \quad Q = p_i \frac{\varepsilon_e^d}{d} \exp\left(\frac{\varepsilon_e^v + (\varepsilon_e^d)^2/2d}{c}\right)$$

$$(134) \quad \Psi_s^{el} = c p_i \exp\left(\frac{\varepsilon_e^v + (\varepsilon_e^d)^2/2d}{c}\right)$$

On obtient ainsi une loi d'élasticité admissible du point de vue thermodynamique, compatible avec l'existence de déformations déviatoriques réversibles et proche du modèle Cam-Clay pour de faibles valeurs de l'inclinaison des contraintes $\eta=Q/P'$.

II. 2. 3. Critère de plasticité et écrouissage.

II. 2. 3. a. Critère de plasticité, règle d'écoulement et état critique.

Avec les variables triaxiales introduites en §II.2.1, la règle d'écoulement (85) s'écrit :

$$(135) \quad \text{si } f = 0 \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_p^v = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial P'} \\ \dot{\varepsilon}_p^d = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial Q} \end{cases} \quad \dot{\mu} \geq 0$$

Les critères de plasticité utilisés dans les modèles de l'école de Cambridge présentent la particularité d'être fermés sur l'axe des compressions isotropes. On utilisera ici le critère du modèle "Cam-Clay modifié", proposé par Burland (1967), qui s'écrit :

$$(136) \quad f(P', Q) = Q^2 + M^2 P' (P' - p_c)$$

Sa représentation dans l'espace des contraintes effectives (P', Q) est une ellipse centrée sur l'axe des compressions isotropes (figure 5).

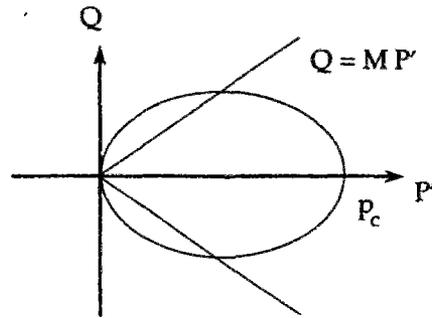


Figure 5
Critère de plasticité du modèle Cam-Clay modifié

La règle d'écoulement (135) s'écrit donc :

$$(137) \quad \dot{\epsilon}_p^v = \dot{\mu} M^2 (2P' - p_c)$$

$$(138) \quad \dot{\epsilon}_p^d = \dot{\mu} 2Q$$

Les sommets du petit axe de l'ellipse sont situés sur les deux droites d'équations $Q = \pm MP'$. Lorsque le point représentatif de l'état de contraintes se trouve à l'intersection de l'ellipse et de l'une des deux droites d'équations $Q = \pm MP'$, il est facile de voir que la déformation volumique plastique n'évolue pas $\dot{\epsilon}_p^v = 0$. On dit que le milieu est alors à l'état critique.

Le paramètre M est une constante matérielle. On prendra garde de ne pas le confondre avec le module de Biot, traditionnellement désigné par la même lettre, qui est infini dans le contexte de la mécanique des sols.

Le paramètre p_c est le seul paramètre d'écrouissage. D'un point de vue physique, il représente la plus grande contrainte isotrope que l'on puisse imposer au milieu avant que ne se produisent des déformations irréversibles. Il est appelé pression de consolidation. Son évolution est décrite par la loi d'écrouissage que l'on va préciser à présent.

II. 2. 3. b. Energie bloquée et loi d'écrouissage.

Dans le modèle Cam-Clay, la prise en compte de l'écrouissage repose sur l'existence d'une relation entre le paramètre scalaire p_c figurant dans le critère et une grandeur caractéristique de la variation irréversible de volume du sol. L'existence de cette relation est une constatation expérimentale et se trouve en fait à la base de la formulation originale du modèle Cam-Clay. Coussy (1991,1995) propose d'utiliser pour caractériser la dilatation volumique irréversible du milieu l'indice des vides plastiques e_p , défini comme la différence entre l'indice

des vides dans la configuration correspondant à une déformation élastique nulle et l'indice des vides dans la configuration initiale :

$$(139) \quad e_p = \frac{\phi_R}{1 - \phi_R} - \frac{\phi_0}{1 - \phi_0}$$

où ϕ_R désigne la porosité dans la configuration correspondant à une déformation élastique nulle. L'incompressibilité du solide permet de relier ϕ_R aux déformations plastiques :

$$(140) \quad J_p (1 - \phi_R) = 1 - \phi_0$$

Compte tenu de l'approximation $J_p \cong 1 + \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}_p$, on déduit de (139) et (140) que l'indice des vides plastiques est relié à la trace du tenseur des déformations plastiques par :

$$(141) \quad e_p = \frac{\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}_p}{1 - \phi_0} = - \frac{\epsilon_p^v}{1 - \phi_0}$$

En pratique, la relation entre p_c et e_p est en général identifiée expérimentalement au moyen d'une expérience de compression isotrope, et peut être représentée par une formule du type (Coussy, 1991, 1995) :

$$(142) \quad p_c = p_c^0 \exp [- e_p / (\lambda - \kappa)]$$

où λ est un scalaire positif strictement plus grand que κ .

Dans ce contexte, il est naturel de considérer l'énergie bloquée comme une fonction de la seule variable scalaire e_p ($\chi \equiv \{e_p\}$). On fait d'autre part l'hypothèse que p_c est la force thermodynamique associée à e_p :

$$(143) \quad p_c = - \partial U / \partial e_p (e_p)$$

(Il s'agit en fait d'une hypothèse très forte, comme on le verra par la suite). On obtient alors par intégration de (142) l'expression suivante de l'énergie bloquée :

$$(144) \quad U(e_p) = p_c^0 (\lambda - \kappa) \exp (- e_p / (\lambda - \kappa))$$

Il reste à préciser le potentiel h introduit dans la relation (40) pour décrire la loi d'évolution de la variable d'érouissage. Du fait de la relation (141) et de la règle d'écoulement (137), on a :

$$(145) \quad \dot{e}_p = - \frac{\dot{\epsilon}_p^v}{1 - \phi_0} = - \dot{\mu} M^2 (2P' - p_c) / (1 - \phi_0)$$

On identifie le potentiel h en rapprochant (145) et (40) (avec $\chi \equiv e_p$ et $\zeta \equiv p_c$) :

$$(146) \quad h = M^2 (p_c - 2P')^2 / [2(1 - \phi_0)]$$

Il convient enfin de vérifier que la dissipation intrinsèque calculée avec ce modèle est bien positive ou nulle. Portant les équations d'état (106) et (107) dans l'expression de la dissipation intrinsèque en transformation infinitésimale (104), on obtient :

$$(147) \quad \mathcal{D} = P' \dot{\epsilon}_p^v + Q \dot{\epsilon}_p^d - \dot{U} \geq 0$$

Compte tenu de (137) et (138), il est facile d'établir la valeur prise par la somme des deux premiers termes (en général appelée puissance plastique) :

$$(148) \quad P' \dot{\epsilon}_p^v + Q \dot{\epsilon}_p^d = \dot{\mu} [M^2 P' (2P' - p_c) + 2Q^2]$$

Si les déformations plastiques évoluent ($\dot{\mu} > 0$), le critère est saturé, et on obtient :

$$(149) \quad P' \dot{\epsilon}_p^v + Q \dot{\epsilon}_p^d = \dot{\mu} M^2 P' p_c$$

Compte tenu de (143) et (145), le taux de variation de l'énergie bloquée est égal à :

$$(150) \quad \dot{U} = -p_c \dot{e}_p = \dot{\mu} p_c M^2 (2P' - p_c) / (1 - \phi_0)$$

Considérons par exemple le cas d'une compression isotrope ($Q = 0$ et $P' = p_c$ en vertu de la nullité du critère) : d'après les expressions (149) et (150), le taux de l'énergie libre bloquée dans le squelette est supérieur à la puissance plastique. Autrement dit, ces expressions conduisent à une valeur de la dissipation intrinsèque négative : le modèle, tel que nous l'avons construit, n'est donc pas acceptable du point de vue thermodynamique.

Il est en fait facile de comprendre d'où vient la difficulté et de la résoudre, au moins partiellement. D'un point de vue théorique, le modèle fait intervenir la valeur de l'énergie bloquée $U(\chi)$. En pratique, on ne dispose pas de cette information, faute de savoir mesurer cette énergie, mais seulement de la relation entre p_c et l'indice des vides e_p . Rien n'indique cependant que p_c et e_p sont des variables conjuguées du point de vue énergétique, au sens où :

$$(151) \quad \dot{U} = -p_c \dot{e}_p$$

Reprenons la démarche précédente, et supposons que l'on choisisse comme variable d'érouissage une grandeur proportionnelle à e_p ou, ce qui revient au même, à $\text{tr} \underline{\epsilon}_p$: $\chi = \theta \text{tr} \underline{\epsilon}_p = \theta (1 - \phi_0) e_p$ (avec la condition $\theta \neq 0$; si θ est nul, χ est identiquement nul et il n'y a pas d'érouissage). On note cette fois $\bar{U}(\chi)$ l'énergie bloquée et on fait l'hypothèse que p_c est la force thermodynamique associée à χ :

$$(152) \quad p_c = -\partial \bar{U} / \partial \chi(\chi)$$

La relation (142) écrite sous la forme :

$$(153) \quad p_c = p_c^0 \exp \left[- \frac{\chi}{\theta (1 - \phi_0)} / (\lambda - \kappa) \right]$$

mène par intégration de (152) à une expression de l'énergie bloquée différente de (144) :

$$(154) \quad \bar{U} = p_c^0 \theta (1 - \phi_0) (\lambda - \kappa) \exp \left(- \frac{\chi}{\theta (1 - \phi_0)} / (\lambda - \kappa) \right) = \theta (1 - \phi_0) U$$

On obtient cette fois :

$$(155) \quad \dot{\bar{U}} = - p_c \dot{\chi} = \dot{\mu} \theta p_c M^2 (2P' - p_c)$$

et la valeur de la dissipation intrinsèque est maintenant donnée par :

$$(156) \quad \mathcal{D} = P' \dot{\epsilon}_p^v + Q \dot{\epsilon}_p^d - \dot{\bar{U}} = \dot{\mu} M^2 p_c [P' - \theta (2P' - p_c)]$$

Remarquant que l'expression obtenue est une fonction affine de P' , et compte tenu du fait que la valeur de P' est assujettie à demeurer dans l'intervalle $[0, p_c]$, la non-négativité de la dissipation intrinsèque au cours d'une évolution quelconque est assurée si et seulement si :

$$(157) \quad \theta \in]0, 1]$$

Cette discussion nous a permis de mettre en évidence une difficulté de la présentation du modèle Cam-Clay dans un contexte thermodynamique, déjà soulignée par Coussy (1995) : n'ayant pas accès directement à l'énergie bloquée, mais seulement à la relation entre l'indice des vides et le paramètre p_c , il est nécessaire de faire (le plus souvent implicitement) une hypothèse supplémentaire, concernant le choix du couple variable d'écroutissage-force thermodynamique associée. Nous fournissons ici une condition nécessaire et suffisante (157) pour aboutir à une formulation correcte du point de vue thermodynamique. Il faut enfin souligner que sur le plan pratique, le choix auquel on procède ne concerne que le calcul de l'énergie bloquée et la cohérence thermodynamique du modèle : le reste de la formulation (et des résultats) n'en est pas affecté.

II.3. EXTENSION DU MODELE CAM-CLAY AUX MILIEUX POREUX EN TRANSFORMATION FINIE.

Nous adaptons maintenant la formulation du modèle Cam-Clay présentée en §II.2 pour obtenir un modèle poroélastoplastique adapté aux argiles saturées en transformation finie. Nous incluons donc dans la formulation obtenue dans la première partie une loi d'élasticité non-linéaire, une fonction de charge et un écrouissage "voisins" de ceux du modèle Cam-Clay.

II.3.1. Loi d'élasticité

Précisons d'abord la dépendance de la partie récupérable Ψ_s^{el} de l'énergie libre Ψ_s par rapport à la déformation réversible $\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{e}}^*$. Nous recherchons une fonction Ψ_s^{el} qui ne dépend que des invariants de $\underline{\underline{e}}^*$. On note I_1 et I_2 les deux premiers invariants de $\underline{\underline{e}}^*$:

$$(158) \quad I_1 = \text{tr} \underline{\underline{e}}^*$$

$$(159) \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{e}}^{*2})$$

Compte tenu de l'expression de l'énergie libre (134) obtenue en transformation infinitésimale lorsque $\underline{\underline{e}}^*$ présente la symétrie de révolution autour de l'axe Ox_1 , il est naturel de tester une expression du type :

$$(160) \quad \Psi_s^{el} = c p_i \exp\left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c}\right)$$

où l'on a posé :

$$(161) \quad (e^d)^2 = 2/3 \underline{\underline{e}}^{*d} : \underline{\underline{e}}^{*d} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{e}}^{*d} = \underline{\underline{e}}^* - I_1 / 3 \underline{\underline{1}}$$

On vérifie sans peine que $(e^d)^2$ est une fonction isotrope de $\underline{\underline{e}}^*$:

$$(162) \quad (e^d)^2 = 4/3 I_2 - 2/9 I_1^2$$

L'équation d'état (75) prend alors la forme suivante :

$$(163) \quad \underline{\underline{\Pi}}^{*'} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \underline{\underline{e}}^*} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial I_1} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial I_2} \underline{\underline{e}}^* = p_i \exp\left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) \left[-\underline{\underline{1}} + \frac{2}{3d} \underline{\underline{e}}^{*d} \right]$$

où l'on a posé :

$$(164) \quad \underline{\underline{\Pi}}^{*'} = J_p \underline{\underline{\pi}}^* + J p \underline{\underline{E}}^{*-1} \cdot (\underline{\underline{E}}^* - 1)^T$$

Lorsque les déformations réversibles sont nulles ($\underline{\underline{e}}^* = 0$), le tenseur des contraintes effectives n'est pas nul :

$$(165) \quad J \underline{\underline{\sigma}}' = - p_i \underline{\underline{1}}$$

C'est évidemment la conséquence de la convention qui consiste à associer l'état de déformation réversible nulle à une contrainte isotrope non nulle, convention classique en mécanique des sols dont nous nous sommes servis pour obtenir la valeur (129) de Ψ_s^{el*} par intégration des différentielles (127) et (128). Il faut donc modifier l'expression (160) pour obtenir une formulation cohérente avec la définition de la configuration relâchée que nous avons adoptée pour la construction du comportement poroélastoplastique, qui suppose que les contraintes et la pression sont nulles lorsque les déformations réversibles sont nulles (c'est-à-dire lorsque $\underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{1}}$ ou de manière équivalente lorsque $\underline{\underline{e}}^* = 0$). Nous prendrons :

$$(166) \quad \Psi_s^{el} = p_i \left[c \exp\left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) + I_1 \right]$$

On obtient alors au lieu de (163) l'équation d'état suivante :

$$(167) \quad \underline{\underline{\Pi}}^* = p_i \left[\left(1 - \exp\left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c}\right)\right) \underline{\underline{1}} + \frac{2}{3d} \exp\left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) \underline{\underline{e}}^{*d} \right]$$

Nous aboutissons donc à une formulation de la loi d'élasticité dans laquelle figure trois paramètres matériels à identifier expérimentalement : p_i , c et d . Pour discuter le sens de ces coefficients, on se place à nouveau dans l'hypothèse où les tenseurs de contraintes et des déformations réversibles présentent une symétrie de révolution autour de la direction $\underline{\underline{e}}_1$, et on pose $\bar{P} = -1/3 \text{tr}(\underline{\underline{\Pi}}^*)$, $\bar{Q} = (\underline{\underline{\Pi}}^*)_{11} - (\underline{\underline{\Pi}}^*)_{33}$, $e^v = -1/3 I_1$. L'équation d'état (167) donne alors :

$$(168) \quad \bar{P} = -p_i \left(1 - \exp\left(\frac{e^v + (e^d)^2 / 2d}{c}\right)\right)$$

$$(169) \quad \bar{Q} = \frac{p_i}{d} \exp\left(\frac{e^v + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) e^d$$

Notant \bar{K} et \bar{G} le module de compression et le module de cisaillement définis respectivement par $\bar{K} = \partial \bar{P} / \partial e^v$ et $3\bar{G} = \partial \bar{Q} / \partial e^d$, on obtient :

$$(170) \quad \bar{K} = \frac{p_i}{c} \exp\left(\frac{e^v + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) = \frac{\bar{P} + p_i}{c}$$

$$(171) \quad 3\bar{G} = \frac{p_i}{d} \exp\left(\frac{e^v + (e^d)^2 / 2d}{c}\right) \left(1 + \frac{e^d}{cd}\right) = \frac{\bar{P} + p_i}{d} \left(1 + \frac{e^d}{cd}\right)$$

La dépendance linéaire de K et G vis-à-vis de la pression de confinement P' (cf. (97) et (100)) du modèle Cam-Clay est donc ici remplacée par une dépendance affine : les modules \bar{K} et \bar{G} prennent donc une valeur non nulle lorsque l'on supprime les contraintes appliquées à un élément de volume. D'après (170), le paramètre p_i/c représente la raideur initiale du matériau libre de contraintes, et le paramètre c caractérise le raidissement progressif du matériau à mesure que la contrainte de confinement augmente, comme dans le modèle de Cam-Clay. De manière analogue, d'après (171), le paramètre d permet de rendre compte de l'idée intuitive que le module de cisaillement augmente lorsque le confinement augmente, et la valeur initiale du module de cisaillement est donnée par $\frac{p_i}{d}$.

II.3.2. Critère de plasticité et loi d'écoulement

On conserve pour le critère de plasticité l'expression (136), dans laquelle P' et Q sont définis par :

$$(172) \quad P' = -1/3 \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}}'$$

$$(173) \quad Q = (3/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2}$$

où $\underline{\underline{s}}$ désigne le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}'$. (On vérifiera sans peine que ces définitions coïncident avec (92) et (93) lorsque le tenseur des contraintes présente la symétrie de révolution autour de l'axe Ox_1).

La règle d'écoulement (79) s'écrit donc dans ce contexte :

$$(174) \quad \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}') = 0 \quad J_p \{ \dot{\underline{\underline{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} \}_s = \dot{\mu} [3 \underline{\underline{s}} - M^2 (2P' - p_c) / 3 \underline{\underline{1}}] \quad \dot{\mu} \geq 0$$

Comme dans la présentation du modèle Cam-Clay, nous supposons que l'on dispose d'une relation d'origine expérimentale entre le paramètre d'écoulement p_c et une grandeur caractéristique de la variation irréversible de volume du milieu, la dilatation volumique plastique J_p par exemple :

$$(175) \quad p_c = p_c(J_p)$$

On pourrait enfin compléter la construction du modèle en supposant que la variable d'écoulement χ dont dépend l'énergie bloquée U s'identifie à J_p et que p_c est la force thermodynamique associée, c'est-à-dire que :

$$(176) \quad p_c = -\partial U / \partial J_p(J_p)$$

et obtenir par intégration la valeur de l'énergie bloquée. Compte tenu de la règle d'écoulement (174), on vérifie que la dissipation intrinsèque (78) est non-négative :

$$(177) \quad \mathcal{D} = J_p \underline{\underline{\sigma}}' : \dot{\underline{\underline{P}}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{*-1} + p_c \dot{J}_p = \dot{\mu} M^2 p_c (p_c - P') \geq 0$$

On notera qu'en pratique, la donnée de la relation (175) est suffisante pour la mise en œuvre du modèle.

II 4. ETUDE DE LA COMPACTION DES SEDIMENTS.

Nous reprenons l'étude du problème de la compaction, abordé en poroélasticité au chapitre 3, avec la formulation du comportement poroélastoplastique construite dans la section §II pour les argiles saturées en transformation finie. La position du problème et la démarche générale de résolution sont évidemment voisines de celles mises en œuvre en poroélasticité.

II 4. 1. Position du problème.

II 4. 1. a. Notations.

Nous conservons les hypothèses faites pour l'étude de la compaction en poroélasticité sur la géométrie du problème et les symétries matérielles. Les déplacements et les contraintes présentent alors une symétrie de révolution par rapport à l'axe vertical. De manière plus précise, on cherche la solution sous la forme :

$$(178) \quad \underline{\underline{F}} = \lambda \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(179) \quad \underline{\underline{e}}^* = e_1 \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + e_3 (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3) \quad (|e_1| \ll 1; |e_3| \ll 1)$$

$$(180) \quad \underline{\underline{P}}^* = \lambda (1 - e_1) \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + (1 - e_3) (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(181) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \sigma_3 (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

$$(182) \quad \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}} = \sigma_1' \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 + \sigma_3' (\underline{x}_2 \otimes \underline{x}_2 + \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_3)$$

où λ désigne la dilatation dans la direction verticale, p la pression du fluide, e_1 et e_3 les déformations élastiques dans la direction verticale et dans les directions horizontales, supposées infinitésimales, σ_1 et σ_3 les contraintes principales verticale et horizontale. Le vecteur \underline{x}_1 désigne le vecteur unitaire de la verticale ascendante (que nous avons noté \underline{e}_z au chapitre 3).

II 4. 1. b. Formulation de la loi de comportement.

Dans le contexte du problème étudié, les équations d'état (167) s'écrivent, compte tenu de la formule de transport (76) :

$$(183) \quad \lambda \sigma_1' = p_i \left[\exp \left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c} \right) \left[-1 + \frac{4}{9} \frac{e_1 - e_3}{d} \right] + 1 \right] (1 + e_1)^2$$

$$(184) \quad \lambda \sigma_3' = p_i \left[\exp \left(\frac{-I_1 + (e^d)^2 / 2d}{c} \right) \left[-1 - \frac{2}{9} \frac{e_1 - e_3}{d} \right] + 1 \right] (1 + e_3)^2$$

La règle d'écoulement (174) donne :

$$(185) \quad \dot{\lambda} (1 - e_1 - 2e_3) - \lambda (\dot{e}_1 + 2 \dot{e}_3) = \dot{\mu} M^2 \left(\frac{2}{3} (\sigma_1' + 2 \sigma_3') + p_c \right)$$

$$(186) \quad \lambda (\dot{e}_1 - \dot{e}_3) = -3 \dot{\mu} (\sigma_1' - \sigma_3') - \dot{\lambda} (1 - e_1 - 2e_3)$$

La condition de cohérence s'écrit :

$$(187) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial P'} \dot{P}' + \frac{\partial f}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0$$

ou encore, compte tenu des définitions (92) et (93) de P' et Q et du critère adopté (136):

$$(188) \quad [2Q - M^2(2P' - p_c)/3] \dot{\sigma}_1' - [2Q + 2M^2(2P' - p_c)/3] \dot{\sigma}_3' - M^2 P' \dot{p}_c = 0$$

Il reste à préciser la loi d'écrouissage, c'est-à-dire en pratique la relation entre p_c et J_p :

$$(189) \quad p_c = P_c(J_p)$$

On identifie cette relation en utilisant le résultat d'un essai œdométrique drainé à pression nulle. Mesurant la contrainte verticale appliquée σ_1 et la dilatation volumique (égale à la dilatation dans la direction verticale λ), on obtient une relation du type :

$$(190) \quad \sigma_1 = Q(\lambda)$$

Il s'agit clairement de la même donnée expérimentale que celle que nous avons employée pour identifier le comportement poroélastique au chapitre 3 (cf. (121)₃). Dans l'essai envisagé, la pression du fluide est nulle et on diminue progressivement l'épaisseur de l'échantillon à partir de la situation de référence (dans laquelle $\lambda = 1$ et $\sigma_1 = 0$). Pour un incrément donné $\dot{\lambda}$ de la dilatation, on dispose des six relations scalaires (183), (184), (185), (186), (187) et (190) pour déterminer les six inconnues $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{\mu}, \dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{p}_c$: la résolution du problème permet alors d'identifier la relation d'écrouissage liant p_c et $J_p = \lambda(1 - e_1 - 2e_3)$.

En pratique, le résultat dépend des valeurs que l'on adopte pour les coefficients M, c, d et p_i et pour la valeur initiale du paramètre p_c (c'est-à-dire sa valeur à la surface de la couche de sédiments). Nous conduirons les calculs pour deux ensembles de valeurs des paramètres M, c, d et p_i :

cas 1 : $M = 0.7 ; c = 0.01 ; d = 0.12 ; p_i/c = 20 \text{ kPa} ;$ valeur initiale de $p_c = 2.143 \text{ kPa}$

cas 2 : $M = 0.9 ; c = 0.02 ; d = 0.06 ; p_i/c = 30 \text{ kPa} ;$ valeur initiale de $p_c = 3.489 \text{ kPa}$

Les valeurs que nous avons choisies pour M et pour le paramètre $c = \frac{\kappa}{1+e_0}$ sont conformes aux valeurs typiques de la littérature. Les valeurs retenues pour le module de compressibilité initial p_i/c sont de quelques dizaines de kPa. Pour éviter des difficultés liées à la forme du critère (136) et de la règle d'écoulement (174), nous avons choisi des valeurs initiales de la pression de consolidation p_c très faibles mais non nulles.

On obtient deux relations différentes entre pression de consolidation et dilatation volumique plastique, dont les représentations graphiques sont données par la figure suivante : la courbe en trait plein correspond au premier ensemble de paramètres et la courbe en pointillé au deuxième.

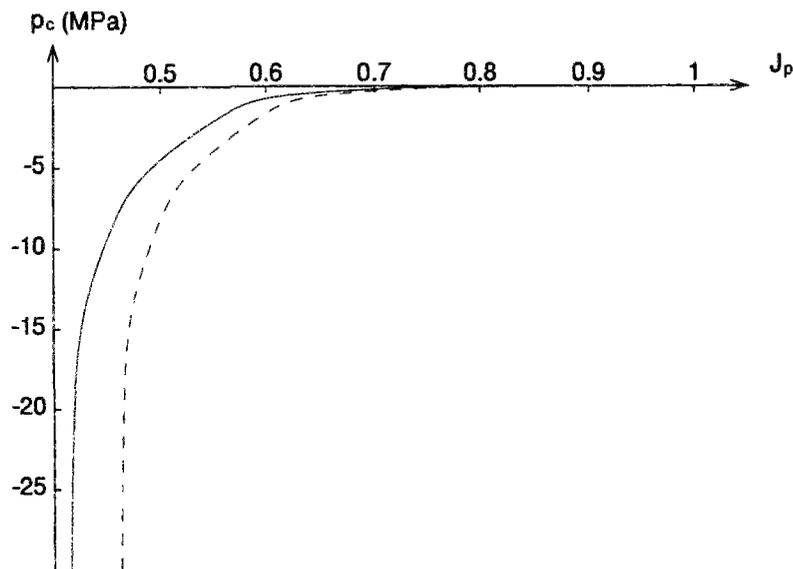


Figure 1
Lois d'écroûissage $p_c = p_c(J_p)$
identifiées à partir de la donnée du résultat d'un essai œdométrique drainé
pour deux ensembles de valeurs des paramètres M, c, d, p_c et p_i

II 4.2. Résolution.

Le problème se pose de la même façon qu'en élasticité. Il s'agit à nouveau de résoudre les équations suivantes :

$$(191) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = (\rho + \rho^f \phi) g = \rho^f g + \frac{1}{A \lambda} \quad (\text{avec } A = [(1 - \frac{\rho^f}{\rho^s}) \rho_o g]^{-1})$$

$$(192) \quad u^s / k = - (w / \rho^f) / k = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho^f g$$

$$(193) \quad \dot{\lambda} / \lambda = \frac{\partial u^s}{\partial z}$$

La différence avec le problème poroélastique réside dans la formulation du comportement, représenté par l'ensemble des équations (183) à (189) au lieu de la relation entre contrainte effective verticale et dilatation (121)₃.

En pratique, la discrétisation spatiale et temporelle reste la même qu'au chapitre 3 : la valeur d'une grandeur quelconque est estimée aux points de discrétisation $z_i(t)$ ($i=0, \dots, N+1$), tels que deux plans voisins $z=z_{i-1}$ et $z=z_i$ (pour $i=1, \dots, N$) délimitent une strate contenant une masse $\rho_o h_o$ de squelette. L'intervalle $[z_N, z_{N+1}]$ correspond à une strate supplémentaire de masse inférieure à celle des précédentes, correspondant à la partie supérieure de la couche en cours de

formation. On rappelle que la valeur prise par une grandeur B sur le plan $z=z_i(t)$ est notée B_i , et que les dérivées $\partial B/\partial z$ et \dot{B} sont estimées au moyen des formules suivantes :

$$(194) \quad (\partial B/\partial z)_i = \frac{B_i - B_{i-1}}{\lambda_i h_0}$$

$$(195) \quad \dot{B}_i = \frac{B_i(t+\delta t) - B_i(t)}{\delta t}$$

L'algorithme est inchangé : supposant connues à l'instant t les répartitions de pression, de dilatation, de contrainte, de déformations réversibles dans les directions horizontales et verticale dans la couche, on calcule le gradient de la pression du fluide, on en déduit la vitesse u^s par (192) puis l'évolution de la valeur de λ au moyen de (193) :

$$(196) \quad u_{i-1}^s(t) = k(\lambda_{i-1}(t)) \left[\frac{P_i(t) - P_{i-1}(t)}{\lambda_{i-1}(t) h_0} + \rho^f g \right]$$

$$(197) \quad \lambda_{i-1}(t+\delta t) = \lambda_{i-1}(t) + \delta t/h_0 (u_{i-1}^s(t) - u_{i-1}^s(t))$$

On calcule ensuite les contraintes à l'instant $t+\delta t$ par l'équation d'équilibre (191) :

$$(198) \quad \sigma_{1,i}(t+\delta t) - \sigma_{1,i-1}(t+\delta t) = h_0 (\rho^f g \lambda_{i-1}(t+\delta t) + 1/A)$$

On procède alors à l'intégration des relations de comportement (183) à (189) pour obtenir la valeur de la pression, de la contrainte latérale et des déformations réversibles e_1 et e_3 .

Le caractère incrémental de la loi de comportement rend le calcul plus lent qu'en poroélasticité. Cependant, on observe que les résultats obtenus en ce qui concerne l'évolution de la pression, de la contrainte verticale et de la dilatation dans la couche, pour les mêmes valeurs de la vitesse de sédimentation et de la perméabilité, sont les mêmes qu'en poroélasticité finie. Il n'y a en fait pas lieu de s'en étonner : il est facile de voir que les équations (183) à (189) constituent un ensemble d'équations que l'on peut utiliser séparément pour obtenir une relation entre la contrainte effective verticale σ_1 et λ au cours d'une évolution où la dilatation λ décroît *de manière monotone* (de sorte qu'il n'y a pas de décharge au cours d'une telle évolution). Compte tenu de la façon dont on a procédé pour identifier la loi d'écrouissage, cette relation coïncide évidemment avec (121)₃. Il est clair que l'on parviendrait à la même conclusion pour le problème de la consolidation, et qu'il n'est donc pas nécessaire de reprendre les calculs menés au chapitre 3.

Il faut souligner cependant que les modèles de comportement poroélastique et poroélastoplastique sont nettement différents, puisque le modèle élastoplastique distingue une partie réversible et une partie irréversible dans les déformations (alors que toute la déformation est réversible dans le modèle poroélastique). D'autre part, l'identification du modèle

élastoplastique requiert davantage d'information, puisqu'il faut identifier les paramètres M , c , d et p_i . En contrepartie, le modèle élastoplastique fournit des informations qui ne sont pas disponibles dans le modèle élastique, comme la valeur de la contrainte horizontale par exemple. On représente sur la figure 2 la contrainte verticale totale en fonction de la profondeur (égale pour les deux ensembles de paramètres matériels), ainsi que la contrainte horizontale totale, dans le cas où la perméabilité est suffisamment grande ($k_o=5.10^{-15} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2$) pour que la pression demeure hydrostatique dans la couche. La courbe correspondant à l'ensemble de paramètres 1 est en trait plein, la courbe correspondant à l'ensemble 2 est en pointillé.

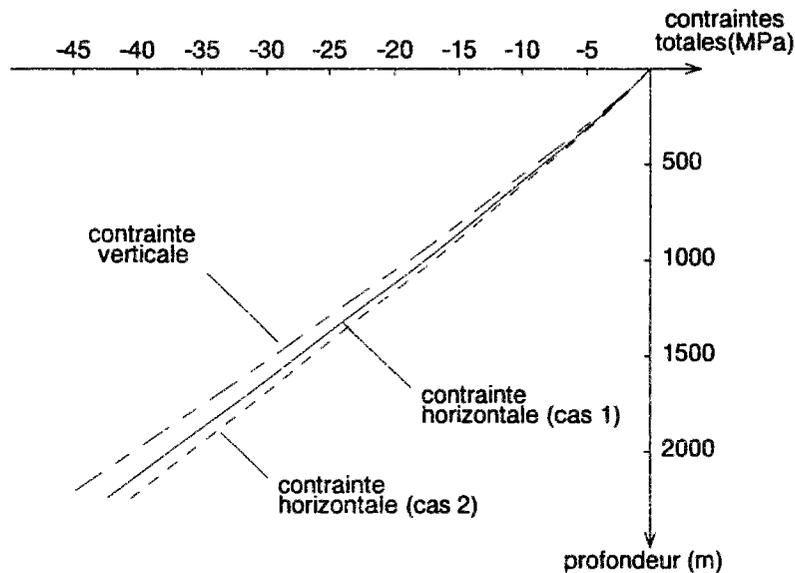


Figure 2
Contraintes verticale et horizontale en fonction de la profondeur

La figure 3 représente la valeur du coefficient de poussée des terres K_o défini classiquement en mécanique des sols comme le rapport de la contrainte effective horizontale à la contrainte effective verticale :

$$(199) \quad K_o = \frac{\sigma'_3}{\sigma'_1}$$

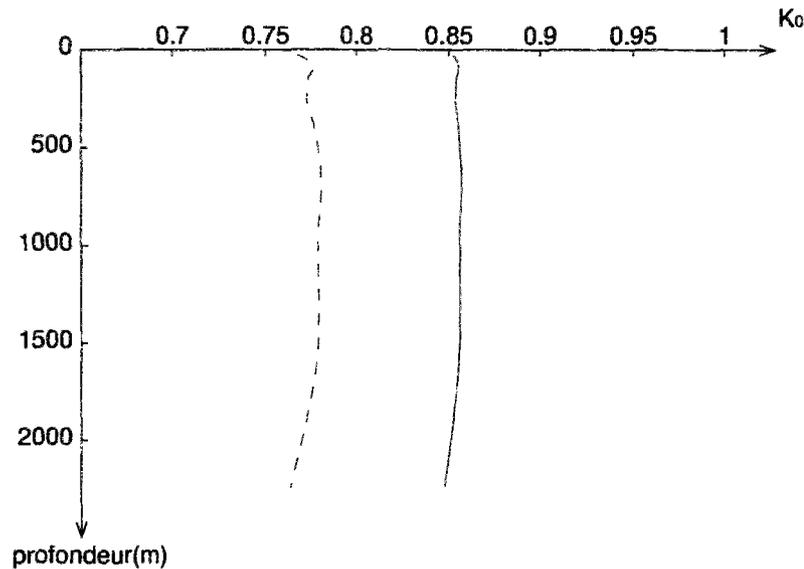


Figure 3
Coefficient K_0 (en fonction de la profondeur)

Dans le modèle Cam-Clay en petites perturbations, le coefficient K_0 est constant au cours d'un essai œdométrique drainé (voir par exemple Charlez, 1995). On obtient ici pour les deux ensembles de paramètres matériels considérés deux valeurs de K_0 qui varient peu avec la profondeur, et conformes aux valeurs couramment retenues dans la littérature (on considère en général que le coefficient de poussée des terres est compris entre 0.5 et 1). Les valeurs obtenues ne sont pas rigoureusement indépendantes de la profondeur, ce qui s'explique notamment par le fait que l'on a identifié la loi d'érouissage du modèle directement à partir de la donnée expérimentale (190) et non pas à partir d'une loi idéalisée entre indice des vides et contrainte de confinement du type $e = e_0 - \lambda \ln |(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3|$.

Il est intéressant de calculer les valeurs correspondantes de l'inclinaison des contraintes :

$$(200) \quad \eta = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3} = 3 \frac{1 - K_0}{1 + 2K_0}$$

Pour le premier ensemble de valeurs des paramètres M , c , d et p_i , on obtient $K_0 = 0.85$ et le rapport η vaut 0.17 : cette valeur est nettement inférieure à la pente de la droite d'état critique du Cam-Clay, égale à $M = 0.7$. (Il en va de même pour l'autre ensemble de paramètres : $K_0 = 0.77$, $\eta = 0.27$ à comparer à la valeur de $M = 0.9$). Le point représentatif de l'état de contraintes dans le plan (P', Q) reste donc près du sommet de l'ellipse situé sur l'axe des compressions isotropes. Dans cette situation, on considère en général dans le domaine des petites perturbations que l'emploi d'une loi d'écoulement associée avec un critère de Cam-Clay donne des résultats convenables. D'un point de vue plus général, si l'état de contraintes subi par un élément de milieu poreux au cours de l'enfouissement reste approximativement isotrope, on peut penser que l'hypothèse d'isotropie des propriétés élastiques du matériau sur laquelle repose la construction

de la loi de comportement que nous avons employée demeure raisonnable pour le problème considéré.

II 4.3. Conclusions de l'étude de la compaction en poroélastoplasticité finie .

La comparaison des résultats obtenus pour le problème de la compaction en poroélasticité et en poroélastoplasticité permet de conclure que le modèle poroélastique donne des résultats valides, bien que le phénomène étudié soit clairement irréversible. Ce résultat est dû au fait qu'il n'y a pas au cours de la compaction de phase de décharge qui mettrait en évidence les irréversibilités. Les deux modèles de comportement sont cependant clairement différents. Le modèle poroélastoplastique repose sur une description plus riche de la déformation du squelette (puisqu'il distingue une partie réversible et une partie irréversible), mais requiert l'identification de davantage de paramètres matériels. Il fournit davantage d'informations, par exemple dans le problème de la compaction une estimation de la contrainte latérale et du coefficient de poussée des terres. Contrairement au modèle poroélastique, le modèle poroélastoplastique permet d'aborder des problèmes dans lesquels le milieu subit une décharge : on peut donc envisager, bien qu'on ne l'ait pas fait ici, de représenter un phénomène comme l'érosion, à condition de proposer des conditions aux limites hydrauliques et mécaniques réalistes. On rappelle d'autre part que la formulation du comportement poroélastoplastique que nous avons mise en œuvre est d'emblée adaptée à des problèmes bi- ou tridimensionnels, et permettrait donc d'étudier la compaction de bassins dont la géométrie serait moins simpliste.

D'un point de vue pratique, quel que soit le type de comportement adopté, la principale difficulté du problème de la compaction réside dans le fait que le squelette du milieu poreux étudié n'est pas un système fermé. Le problème présente alors deux échelles de temps caractéristiques de la vitesse de chargement d'une part, de la conduction de la masse fluide d'autre part. On constate qu'un fort contraste entre ces deux échelles de temps peut provoquer des difficultés importantes sur le plan de la convergence et de la stabilité des algorithmes de résolution numérique, comme l'a signalé par exemple Lamoureux-Var (1997). Cette question mériterait sans doute d'être étudiée pour elle-même de manière plus approfondie.

CONCLUSION

Nous avons construit dans ce chapitre une formulation du comportement poroélastoplastique qui repose sur les hypothèses d'isotropie des propriétés élastiques, d'élasticité infinitésimale et de faible compressibilité du fluide.

Dans le cas où l'élasticité est linéaire, nous avons proposé dans la section §I.3 une formulation incrémentale (ou "en vitesses") de la loi de comportement. Le raisonnement suivi précise le statut des dérivées "objectives" (de Green-Naghdi, de Jaumann, etc...) dans les formulations du comportement en transformation finie : d'une part, ce type de dérivée ne joue pas de rôle fondamental dans la formulation de la loi de comportement puisqu'il n'apparaît que lorsque l'on cherche une formulation du comportement entre taux de déformations et contraintes (voir à ce sujet Dafalias (1997)). D'autre part, la dérivée objective à employer ne fait pas l'objet d'un choix : dans le cadre d'hypothèses où l'on s'est placé, c'est la dérivée de Jaumann qui apparaît dans la formulation incrémentale du comportement. Les hypothèses cruciales pour obtenir cette justification théorique de l'emploi de la dérivée de Jaumann sont l'isotropie de l'énergie libre d'une part et le caractère infinitésimal de la déformation réversible d'autre part ; le caractère associé ou non de la règle d'écoulement ne joue en revanche aucun rôle dans le raisonnement.

La formulation incrémentale obtenue met en jeu un tenseur de "contraintes effectives" $\underline{\underline{\Sigma}}'$ qui n'est pas le tenseur de Terzaghi, et dépend de la dilatation volumique du squelette. Le critère de plasticité et le potentiel plastique ne sont pas nécessairement des fonctions du même tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}'$, mais dépendent des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et de la pression p . La dépendance de la fonction de charge f (et du potentiel plastique g pour une loi non associée) vis-à-vis de $\underline{\underline{\sigma}}$ et p demeure un sujet ouvert, abordé par exemple (pour la fonction de charge) par de Buhan et Dormieux (1994) dans le cadre d'une approche d'homogénéisation en calcul à la rupture.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au comportement des argiles saturées en transformation finie : nous avons d'abord présenté dans un contexte thermodynamique les principales caractéristiques du modèle de Cam-Clay, souvent utilisé pour les argiles saturées en transformation infinitésimale, puis proposé une extension de ce modèle aux transformations finies. Nous avons utilisé ce modèle pour reprendre le problème de la compaction dans le cadre d'une analyse élastoplastique.

Le chapitre suivant est consacré à la résolution numérique des équations de la poroélastoplasticité finie.

CHAPITRE 5

RESOLUTION DES PROBLEMES DE POROELASTOPLASTICITE FINIE

INTRODUCTION

Après avoir étudié dans le chapitre précédent la formulation du comportement des milieux poreux élastoplastiques, nous abordons les méthodes de résolution numérique des problèmes de poroélastoplasticité en transformation finie. Ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec la société TOTAL. Le but poursuivi était de permettre à TOTAL d'adapter aux milieux poreux un code numérique existant développé pour des milieux continus monophasiques ("secs") élastoplastiques. On ne se propose donc pas de construire de toutes pièces un code complet, mais de mettre en place les principes de la construction d'une méthode numérique, et de fournir un algorithme simple de résolution. On résout enfin dans la dernière partie un problème académique simple, le problème de Mandel, par la méthode des différences finies. Ce travail a permis d'une part de valider au moins partiellement les modifications apportées par TOTAL au code préexistant, et d'autre part de mettre en évidence les insuffisances d'une formulation de type "petites perturbations" dans le domaine des transformations finies.

I. FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLEMES DE POROELASTOPLASTICITE ET ALGORITHME DE RESOLUTION

Nous nous limiterons pour la construction d'une méthode de résolution numérique des problèmes de poroélastoplasticité finie au cas où le squelette du milieu poreux étudié est un système matériel indépendant du temps.

La démarche que l'on suit consiste à s'inspirer d'une part des méthodes mises en œuvre en poroélastoplasticité infinitésimale, par exemple par Dangla (1995) et Shao (1995), qui ont établi des formulations variationnelles des équations de la poroplasticité et montré comment se ramener à la résolution itérative de problèmes de poroélasticité linéaire, et d'autre part des techniques de résolution numérique des problèmes d'élastoplasticité en transformation finie pour les milieux monophasiques (ou "secs", c'est-à-dire les milieux continus classiques dans lesquels aucun fluide ne circule), notamment des travaux de Bathe, Ramm et Wilson (1975) et de Bathe (1982). On peut aussi mentionner les travaux de Zienkiewicz et Shiomi (1984), Meroi, Schrefler et Zienkiewicz (1995) et de Manzari (1996).

I.1. FORMULATION DES PROBLEMES DE POROELASTOPLASTICITE.

On rappelle d'abord brièvement la formulation générale des équations constituant un problème de poroélastoplasticité, dans le cadre des transformations finies puis dans le cadre familier des petites perturbations, afin de comparer ultérieurement les résultats obtenus avec les deux formulations.

I.1.1. Equations de champ et conditions aux limites.

I.1.1. a. Formulation en transformation finie.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation quasi-statique. Les équations de conservation de la masse fluide et de la quantité de mouvement et la loi de conduction de la masse fluide s'écrivent :

$$(1) \quad \dot{m} + J \operatorname{div} \underline{w} = 0$$

$$(2) \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{r} \mathbf{g} = 0$$

$$(3) \quad \underline{\underline{w}} / \rho^f = \underline{\underline{k}} \cdot (-\text{grad } p + \rho^f \mathbf{g})$$

où \mathbf{r} désigne la masse volumique moyenne du milieu et \mathbf{g} l'accélération de la pesanteur. On adjoint à ces équations la loi de comportement. On adopte la formulation établie au chapitre 4, dans le cas de l'élasticité linéaire et en absence d'écoulement :

$$(4) \quad J_p \underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{e}} - b J_p p \underline{\underline{1}} \quad \text{équations d'état}$$

$$(5) \quad J_p p = M (m_e / \rho^f - b \text{tr } \underline{\underline{e}})$$

$$(6) \quad J_p \{ \dot{\underline{\underline{P}}}, \underline{\underline{P}}^{-1} \}_s = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\mu} \geq 0 \quad \text{règle d'écoulement}$$

$$(7) \quad \dot{m}_p / \rho^f = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$(8) \quad \dot{f} = 0 \quad \text{si } \dot{\mu} > 0 \quad \text{condition de cohérence}$$

où la fonction $f(\underline{\underline{\sigma}}, p)$ désigne le critère de plasticité, et μ le multiplicateur plastique. On a omis pour alléger les notations l'astérisque relative au choix de l'orientation de la configuration relâchée. Dans le cas de l'élasticité isotrope, le tenseur des modules d'élasticité drainés est de la forme $\underline{\underline{C}}_o = \lambda_o \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{1}}$, λ_o et μ étant les coefficients de Lamé drainés du matériau.

On rappelle que cette formulation a été établie sous l'hypothèse que les variations de la masse volumique du fluide sont infinitésimales.

En pratique, on utilisera la formulation de la loi de comportement reliant les taux de contraintes et de déformation :

$$(9) \quad \dot{\underline{\underline{\sigma}}}' + J (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}}, \underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{C}}_o : (\underline{\underline{d}} - \dot{\mu} / J_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}})$$

où $\underline{\underline{\sigma}}'$ désigne le tenseur des contraintes effectives défini par $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}}$.

On décrit les conditions aux limites au moyen des partitions suivantes de la frontière S du domaine étudié Ω (cf. chapitre 1) :

- les partitions relatives aux conditions aux limites mécaniques :

$$(10) \quad S = S^{T_i} \cup S^{E_i} \quad (\text{avec } S^{T_i} \cap S^{E_i} = \emptyset) \quad i = 1, 2, 3$$

où S^{T_i} (resp. S^{E_i}) désigne la partie de S où la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte (resp. du déplacement du squelette) est imposée ;

- la partition relative aux conditions aux limites hydrauliques :

$$(11) \quad S = S^W \cup S^P \quad (\text{avec } S^W \cap S^P = \emptyset)$$

où S^W (resp. S^P) désigne la partie de S où la valeur du flux de masse fluide (resp. de la pression du fluide) est imposée. On rappelle que les surfaces S^{T_i} , S^{E_i} , S^W et S^P sont des surfaces matérielles attachées au squelette : leur position géométrique à l'instant t' fait donc en général partie des

inconnues du problème (sauf éventuellement dans le cas où l'on impose toutes les composantes du déplacement du squelette sur une partie de sa frontière).

I.1.1.b. Formulation en transformation infinitésimale.

En transformation infinitésimale, les équations (1), (2) et (3) deviennent (chapitre 1) :

$$(12) \quad \dot{\underline{m}} + \text{div } \underline{w} = 0$$

$$(13) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + r_0 \underline{g} = 0$$

$$(14) \quad \underline{w} / \rho^f = \underline{k} \cdot (-\underline{\text{grad}} p + \rho^f \underline{g})$$

où r_0 désigne la masse volumique moyenne du milieu dans la configuration initiale. On rappelle que les géométries actuelle et initiale sont confondues, et que les dérivées spatiales sont calculées sur la configuration initiale.

Dans le cadre du comportement poroélastoplastique en petites perturbations, dans le cas de l'élasticité linéaire et en absence d'écrouissage, le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et l'apport de masse fluide \underline{m} se décomposent en deux contributions, l'une réversible, l'autre irréversible :

$$(15) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_p$$

$$(16) \quad \underline{m} = \underline{m}_e + \underline{m}_p$$

et le comportement est représenté par les équations suivantes :

$$(17) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda_0 \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}_e \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_e - b p \underline{\underline{1}}$$

$$(18) \quad p = M (-b \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{m}_e / \rho^f)$$

équations d'état

$$(19) \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \dot{\mu} \partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}} (\underline{\underline{\sigma}}, p)$$

$$\dot{\mu} \geq 0$$

règle d'écoulement

$$(20) \quad \dot{\underline{m}}_p / \rho^f = \dot{\mu} \partial f / \partial p (\underline{\underline{\sigma}}, p)$$

$$(21) \quad \dot{f} = 0$$

$$\text{si } \dot{\mu} > 0$$

condition de cohérence

On rappelle que le coefficient de Biot b est égal à 1 lorsque le solide constituant le squelette est incompressible (cf. Coussy (1991)).

Il est facile d'établir en combinant (15), (17), (19) que l'équation (9) est remplacée en transformation infinitésimale par :

$$(22) \quad \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{C}}_0 : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

Les conditions aux limites s'expriment formellement de la même façon qu'en transformation finie, mais les surfaces S^{T_i} , S^{E_i} , S^W et S^P sont désormais considérées comme des données du problème puisque les changements de géométrie sont négligés.

I 1. 2. Formulation simplifiée

Les techniques employées dans les développements qui suivent (§ II.2) ont un caractère général et pourraient être mises en œuvre pour le problème en transformation finie tel qu'il est formulé en § II.1.1.a. En pratique, dans le cadre de la collaboration avec la société TOTAL, il a paru souhaitable dans une première étape de proposer une formulation simplifiée, qui permette de réaliser une première adaptation du code existant pour les milieux élastoplastiques secs dans un délai court : on a donc cherché une formulation qui ne nécessite pas de bouleverser les structures de données et l'organisation générale du code.

Pour simplifier la formulation, nous avons pris le parti de faire les hypothèses suivantes :

- on fait l'hypothèse que la perméabilité du milieu est homogène et isotrope ;
- on suppose que les deux constituants solide et fluide sont incompressibles : comme on l'a déjà dit, on peut admettre que ces hypothèses constituent une première approximation raisonnable pour la plupart des problèmes de géophysique ;
- on suppose enfin que le *squelette* du milieu poreux est plastiquement incompressible ($J_p = 1$). Il s'agit d'une hypothèse beaucoup plus restrictive, qui limite sévèrement la généralité de la formulation : elle est essentiellement due aux caractéristiques du code initialement disponible chez TOTAL.

En pratique, ces hypothèses permettent de combiner les équations du problème de manière à éliminer un certain nombre d'inconnues. On réduit ainsi le nombre d'inconnues principales du problème, donc, en anticipant sur l'étape de résolution proprement dite, la taille des matrices à inverser.

En combinant les expressions de la conservation de la masse fluide (1) et la loi de Darcy (3), on obtient :

$$(23) \quad \dot{m} / \rho^f = k J \nabla^2 p$$

L'incompressibilité des deux constituants donne la relation de liaison (132)₁, qui permet d'éliminer l'apport de masse fluide m pour obtenir l'équation suivante, dite équation de diffusivité :

$$(24) \quad k \nabla^2 p = \dot{J} / J = \text{tr } \underline{\underline{d}}$$

où ∇^2 représente l'opérateur Laplacien. Cette équation sera dualisée pour obtenir un problème variationnel portant sur les incréments de la pression et des déplacements du squelette entre deux instants successifs.

On utilise d'autre part les hypothèses de déformation élastique infinitésimale et d'incompressibilité plastique du squelette pour remplacer (9) par :

$$(25) \quad \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}_o : \left(\underline{\underline{d}} - \dot{\underline{\underline{\mu}}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

On notera que l'on obtient une formulation où figure un nombre réduit d'inconnues, puisque l'apport de masse fluide et la décomposition de la transformation totale du squelette en parties élastique et plastique n'apparaissent pas dans les équations (24) et (25).

En transformation infinitésimale, l'équation de diffusivité (24) est remplacée par :

$$(26) \quad k \nabla^2 p = \text{tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

et la loi de comportement conserve la forme (22).

L2. DISCRETISATION TEMPORELLE ET FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME DISCRETISE.

L2.1. Discrétisation temporelle. Notations.

La conduction de la masse fluide à travers un milieu poreux n'étant pas un phénomène instantané, la résolution d'un problème de mécanique des milieux poreux consiste à déterminer l'évolution temporelle de l'ensemble des champs inconnus. Il est donc nécessaire de commencer par discrétiser le problème en temps, afin transformer le problème d'évolution initial en une suite de problèmes d'approximation de la valeur des champs à des instants successifs.

On suppose donc que la valeur de tous les champs est connue à l'instant t , et on recherche leur valeur à un instant ultérieur $t' = t + \delta t$. On note Ω_t (resp. $\Omega_{t'}$) le volume occupé par le milieu poreux à l'instant t (resp. t') et S_t (resp. $S_{t'}$) la frontière de Ω_t (resp. $\Omega_{t'}$). On distingue les valeurs prises par une grandeur B aux instants t et t' en les affectant d'un exposant placé à gauche : ${}^t B$ et ${}^{t'} B$ représentent respectivement les valeurs de B à l'instant t et à l'instant t' .

On note x_i les coordonnées d'une particule de squelette dans la configuration à t et x'_i les coordonnées de la même particule dans la configuration à t' . Un champ scalaire tB , défini à l'instant t' , est naturellement fonction des coordonnées x'_i ; toutefois, compte tenu de la correspondance biunivoque entre les points de Ω_t et de $\Omega_{t'}$ établie par la transformation géométrique du squelette, tB peut également être considéré comme une fonction des coordonnées x_i , c'est-à-dire comme un champ défini sur Ω_t . Les gradients de tB par rapport aux deux configurations sont reliés par une formule de dérivation composée :

$$(27) \quad \frac{\partial {}^tB}{\partial x_i} = \frac{\partial {}^tB}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i}$$

On notera $\underline{\underline{G}}$ le tenseur de composantes :

$$(28) \quad G_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

$\underline{\underline{G}}$ est le gradient (calculé sur la configuration à t) de la transformation du squelette entre la configuration à t et la configuration à t' . On notera que le tenseur $\underline{\underline{G}}$ ne se confond pas en général avec le tenseur $\underline{\underline{F}}$ décomposé en partie élastique et partie plastique dans l'étude du comportement.

Afin de distinguer en notations intrinsèques les gradients calculés sur les configurations à t et à t' , on introduit la convention suivante : un indice placé à gauche d'un opérateur de dérivation spatiale indique la configuration par rapport à laquelle l'opération de dérivation est effectuée. Avec cette convention, le gradient de la transformation $\underline{\underline{G}}$ s'écrit en fonction du champ de déplacement *réel* $\underline{U} = U_i \underline{e}_i$, défini sur Ω_t et donnant les déplacements des particules de squelette entre t et t' :

$$(29) \quad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{1}} + {}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U}$$

On notera que la valeur prise par la $i^{\text{ème}}$ composante du champ \underline{U} sur S_t^E est prescrite par les conditions aux limites. D'autre part, la formule (27) s'écrit :

$$(30) \quad {}_t\underline{\underline{\nabla}}({}^tB) = \underline{\underline{G}}^T \cdot {}_{t'}\underline{\underline{\nabla}}({}^tB)$$

Pour un champ de vecteurs $\underline{B} = B_i \underline{e}_i$, on établit facilement la formule de dérivation composée suivante :

$$(31) \quad {}_t\underline{\underline{\nabla}}({}^t\underline{B}) = {}_{t'}\underline{\underline{\nabla}}({}^t\underline{B}) \cdot \underline{\underline{G}}$$

I.2.2. Formulation variationnelle.

On construit maintenant une formulation variationnelle du problème en dualisant l'équation d'équilibre et l'équation de diffusivité (Bourgeois, de Buhan et Dormieux, 1997).

I.2.2.a. Dualisation de l'équation d'équilibre.

Avec les notations introduites en §II.2.1, l'équation d'équilibre à l'instant t' (2) s'écrit, sur la configuration inconnue à t' :

$$(32) \quad {}_{t'} \underline{\text{div}} ({}_{t'} \underline{\underline{\sigma}}) + {}_{t'} \underline{\underline{r}} \underline{\underline{g}} = 0$$

L'opérateur de divergence étant relatif aux coordonnées x'_i , ${}_{t'} \underline{\text{div}} ({}_{t'} \underline{\underline{\sigma}})$ désigne le vecteur de coordonnées $\partial({}_{t'} \underline{\underline{\sigma}}_{ij}) / \partial x'_j$. On multiplie cette équation par un champ de déplacement virtuel $\hat{\underline{\underline{u}}}$ défini sur $\Omega_{t'}$ dont la $i^{\text{ème}}$ composante \hat{u}_i est nulle sur $S_{t'}^{\Xi_i}$; après intégration par parties, on obtient :

$$(33) \quad \int_{\Omega_{t'}} {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} : {}_{t'} \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{\underline{u}}} \, d\Omega_{t'} = \int_{S_{t'}^{\Gamma_i}} T_i^d \hat{u}_i \, dS_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} {}_{t'} \underline{\underline{r}} \underline{\underline{g}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, d\Omega_{t'}$$

On se propose de modifier l'expression de l'intégrale figurant au membre de gauche en exploitant la loi de comportement et en introduisant explicitement la transformation géométrique du squelette entre t et t' . On estime d'abord la variation des contraintes entre t et t' par :

$$(34) \quad {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} = {}_t \underline{\underline{\sigma}} + \delta t \, {}_{t'} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$$

où la dérivée temporelle est une dérivée matérielle en suivant le mouvement du squelette : ${}_{t'} \underline{\underline{\sigma}}$ et ${}_{t'} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ sont donc les valeurs prises par le tenseur des contraintes de Cauchy à t et à t' en des points homologues dans la transformation géométrique du squelette entre ces deux instants. La valeur de ${}_{t'} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ (à un instant quelconque) est déduite de la formulation en vitesses (25) de la loi de comportement :

$$(35) \quad {}_{t'} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}_o : ({}_{t'} \underline{\underline{d}} - {}_{t'} \underline{\underline{\mu}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) - {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}_{t'} \underline{\underline{\Omega}} + {}_{t'} \underline{\underline{\Omega}} \cdot {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} - {}_{t'} \underline{\underline{p}} \underline{\underline{1}}$$

On obtient alors :

$$(36) \quad \int_{\Omega_{t'}} {}_{t'} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : {}_{t'} \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{\underline{u}}} \, d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_{t'}} ({}_t \underline{\underline{\sigma}} + \delta t [\underline{\underline{C}}_o : ({}_{t'} \underline{\underline{d}} - {}_{t'} \underline{\underline{\mu}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) - {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}_{t'} \underline{\underline{\Omega}} + {}_{t'} \underline{\underline{\Omega}} \cdot {}_{t'} \underline{\underline{\sigma}} - {}_{t'} \underline{\underline{p}} \underline{\underline{1}}]) : {}_{t'} \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{\underline{u}}} \, d\Omega_{t'}$$

Dans cette expression, ${}_{t'} \underline{\underline{\sigma}}$ représente la valeur prise par le champ de contraintes sur la configuration à t transportée dans le mouvement du squelette sur la configuration à t' : cette notation représente donc ici un champ défini sur $\Omega_{t'}$.

On estime les taux de déformation et de rotation $\underline{\underline{t}}_d$ et $\underline{\underline{t}}_\Omega$ par :

$$(37) \quad \underline{\underline{t}}_d = \{ \underline{\underline{t}}_\nabla (\underline{U}/\delta t) \}_s \quad ; \quad \underline{\underline{t}}_\Omega = \{ \underline{\underline{t}}_\nabla (\underline{U}/\delta t) \}_a$$

ou, en notations indicielles :

$$(38) \quad t_{dij} = \frac{1}{2\delta t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad t_{\Omega ij} = \frac{1}{2\delta t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

D'autre part, on adopte pour le calcul de $\underline{\underline{t}}_p$ une dérivée à droite :

$$(39) \quad \underline{\underline{t}}_p = P/\delta t$$

où l'on a noté $P = \underline{\underline{t}}_p - \underline{\underline{t}}_p$ la différence entre les valeurs de la pression en des points homologues dans la transformation du squelette entre t et t' (dont la valeur sur S_t^P est prescrite par les conditions aux limites).

Enfin, le tenseur $\underline{\underline{t}}_\nabla \hat{u}$ représente le gradient d'un champ défini sur la configuration inconnue à t' . On se ramène à la configuration à t en exploitant la formule de dérivation composée (31) :

$$(40) \quad \underline{\underline{t}}_\nabla \hat{u} = \underline{\underline{t}}_\nabla \hat{u} \cdot \underline{\underline{G}}$$

Avec les mêmes notations, on a aussi :

$$(41) \quad d\Omega_{t'} = \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t$$

Portant (39), (40), (41) et (37) dans (36), on établit que les champs \underline{U} et P recherchés vérifient donc la propriété suivante, qui résulte de la dualisation de l'équation d'équilibre :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{u} \text{ champ de déplacement virtuel sur } \Omega_{t'} \text{ vérifiant } \hat{u}_i = 0 \text{ sur } S_{t'}^{\xi_i}, \\ \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{t}}_\sigma + [C_o : (\underline{\underline{t}}_\nabla \underline{U})_s - \underline{\underline{t}}_\mu \delta t \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}] - \underline{\underline{t}}_\sigma \cdot \{ \underline{\underline{t}}_\nabla \underline{U} \}_a + \{ \underline{\underline{t}}_\nabla \underline{U} \}_a \cdot \underline{\underline{t}}_\sigma - P \underline{1}) : (\underline{\underline{t}}_\nabla \hat{u} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1}) \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \\ = \int_{S_{t'}^T} T_i^d \hat{u}_i dS_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} \underline{\underline{t}}_r \underline{g} \cdot \hat{u} d\Omega_{t'} \end{array} \right.$$

On rappelle que $\underline{\underline{G}}$ est lié au gradient de \underline{U} par (29). L'intégrale figurant au membre de gauche est donc définie sur la configuration connue à l'instant t , et ne dépend que de grandeurs connues (définies à t) et des champs inconnus \underline{U} et P qui représentent respectivement le déplacement des particules de squelette et l'incrément de pression du fluide entre t et t' .

La démarche suivie pour se ramener à une intégrale définie sur une configuration connue est assez classique. Contrairement à certains auteurs (Bathe (1982) ou Manzari (1996) par exemple), nous avons choisi de ne pas introduire un tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff et

un taux virtuel de déformation lagrangiens par rapport à la configuration à t . On évite ainsi de manipuler des objets mathématiques dépourvus de signification physique : l'écriture proposée est moins compacte, mais les rôles des champs de déplacement virtuel $\underline{\hat{u}}$ (défini sur $\Omega_{t'}$) et réel \underline{U} (défini sur Ω_t) apparaissent plus clairement.

I.2.2.b. Dualisation de l'équation de diffusivité.

Multipliant l'équation (24) écrite sur la configuration inconnue par une variation virtuelle de pression \hat{p} nulle en tout point de $S_{t'}^P$, et intégrant sur le volume $\Omega_{t'}$, on obtient :

$$(43) \quad \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla^2({}_t p) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_{t'}} \text{tr}({}_t \underline{\hat{d}}) \hat{p} \, d\Omega_{t'}$$

Considérons d'abord le membre de gauche de (43). Une intégration par parties tenant compte de la condition aux limites sur la variation \hat{p} donne d'abord :

$$(44) \quad \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla^2({}_t p) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{S_{t'}^w} (k \text{ }_t \nabla({}_t p) \hat{p}) \cdot \underline{n} \, dS_{t'} - \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla({}_t p) \cdot \text{ }_t \nabla \hat{p} \, d\Omega_{t'}$$

Utilisant alors la loi de Darcy (3) et les conditions aux limites sur $S_{t'}^w$ on obtient :

$$(45) \quad \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla^2({}_t p) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{S_{t'}^w} (k \rho^f \underline{g} \cdot \underline{n} - w^d / \rho^f) \hat{p} \, dS_{t'} - \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla({}_t p) \cdot \text{ }_t \nabla \hat{p} \, d\Omega_{t'}$$

On utilise alors la formule de dérivation composée (30) et (41) pour se ramener à une intégrale définie sur la configuration à t :

$$(46) \quad \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla^2({}_t p) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{S_t^w} [k \rho^f \underline{g} \cdot \underline{n} - w^d / \rho^f] \hat{p} \, dS_t \\ - \int_{\Omega_t} k \text{ }_t \nabla({}_t p) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot \text{ }_t \nabla \hat{p} \, \det \underline{\underline{G}} \, d\Omega_t$$

Compte tenu de la variation du champ de pression entre t et t' , on obtient finalement :

$$(47) \quad \int_{\Omega_{t'}} k \text{ }_t \nabla^2({}_t p) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{S_t^w} (k \rho^f \underline{g} \cdot \underline{n} - w^d / \rho^f) \hat{p} \, dS_t \\ - \int_{\Omega_t} k \text{ }_t \nabla({}_t p + P) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot \text{ }_t \nabla \hat{p} \, \det \underline{\underline{G}} \, d\Omega_t$$

On s'intéresse maintenant au second membre de (43). On déduit d'abord de la relation cinématique :

$$(48) \quad \underline{\underline{d}} = \{ \dot{\underline{\underline{G}}} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \}_s$$

que la trace du tenseur $\underline{\underline{d}}$ est donnée par :

$$(49) \quad \text{tr}({}^t\underline{\underline{d}}) = \frac{\dot{{}^t\det \underline{\underline{G}}}}{\det \underline{\underline{G}}}$$

où $\det \underline{\underline{G}}$ désigne le jacobien de la transformation du squelette à partir de la configuration à t . En utilisant une approximation décentrée à gauche pour calculer $\dot{{}^t\det \underline{\underline{G}}}$, on trouve :

$$(50) \quad \dot{{}^t\det \underline{\underline{G}}} = (\det \underline{\underline{G}} - 1) / \delta t$$

et finalement :

$$(51) \quad \int_{\Omega_{t'}} \text{tr}({}^t\underline{\underline{d}}) \hat{p} \, d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_t} (\det \underline{\underline{G}} - 1) / \delta t \hat{p} \, d\Omega_t$$

L'expression dualisée de l'équation de diffusivité prend donc finalement la forme suivante :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{p} \text{ champ de pression virtuel sur } \Omega_{t'} \text{ tel que } \hat{p} = 0 \text{ sur } S_{t'}^P \\ \int_{\Omega_t} \{ [k {}^t\underline{\underline{\nabla}}({}^t\underline{\underline{p}}+P) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1 T} \cdot {}^t\underline{\underline{\nabla}}\hat{p}] \det \underline{\underline{G}} + \frac{\det \underline{\underline{G}} - 1}{\delta t} \hat{p} \} \, d\Omega_t = \int_{S_{t'}^w} (k \rho^f \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{n}} - \frac{w^d}{\rho^f}) \hat{p} \, dS_{t'} \end{array} \right.$$

Le problème d'évolution entre les instants t et t' se ramène finalement à trouver les champs $(\underline{\underline{U}}, P)$ vérifiant les conditions aux limites sur $S_{t'}^P$ et $S_{t'}^E$ et tels que les deux propriétés (42) et (52) soient satisfaites.

1.3. RESOLUTION DU PROBLEME VARIATIONNEL.

1.3.1. Principe.

On désigne par A_1 et B_1 (respectivement A_2 et B_2) le membre de gauche et le membre de droite du problème variationnel (42) (respectivement (52)) :

$$(53) \quad A_1(\underline{\underline{U}}, P; \hat{u}; \hat{u}) = \int_{\Omega_t} ({}^t\underline{\underline{\sigma}} + [C_0 : ({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}})_s - \hat{u} \delta t \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}] - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot ({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}})_a + ({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}})_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - P \hat{1}) : ({}^t\underline{\underline{\nabla}} \hat{u} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1}) \det \underline{\underline{G}} \, d\Omega_t$$

$$(54) \quad B_1(\underline{\underline{U}}; \hat{u}) = \int_{S_{t'}^T} T_i^d \hat{u}_i \, dS_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} {}^t r \underline{\underline{g}} \cdot \hat{u} \, d\Omega_{t'}$$

$$(55) \quad A_2(\underline{\underline{U}}, P; \hat{p}) = \int_{\Omega_t} \{ [k {}^t\underline{\underline{\nabla}}({}^t\underline{\underline{p}}+P) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1 T} \cdot {}^t\underline{\underline{\nabla}} \hat{p}] \det \underline{\underline{G}} + (\det \underline{\underline{G}} - 1) / \delta t \hat{p} \} \, d\Omega_t$$

$$(56) \quad B_2(\underline{\underline{U}}; \hat{p}) = \int_{S_{t'}^w} (k \rho^f \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{n}} - w^d / \rho^f) \hat{p} \, dS_{t'}$$

où l'on a omis pour alléger l'écriture l'indication du temps dans la notation du multiplicateur plastique, et où B_1 et B_2 dépendent de \underline{U} par l'intermédiaire du changement de géométrie du squelette entre t et t' , puisque les intégrales qui les définissent sont calculées sur les surfaces S_t^T et S_t^W et sur le domaine Ω_t . Les quatre quantités A_1 , B_1 , A_2 et B_2 sont linéaires vis-à-vis du couple (\underline{u}, \hat{p}) . Avec ces notations, les champs $(\underline{U}, P, \dot{\mu})$ recherchés sont solution du problème suivant :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{p} \text{ champ de pression virtuel sur } \Omega_t \text{ vérifiant } \hat{p} = 0 \text{ sur } S_t^P \\ \forall \underline{u} \text{ champ de déplacement virtuel sur } \Omega_t \text{ vérifiant } \underline{u}_1 = 0 \text{ sur } S_t^E, \\ A(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}, \hat{p}) = B(\underline{U}; \underline{u}, \hat{p}) \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$(58) \quad A(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}, \hat{p}) = A_1(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}) - \delta t A_2(\underline{U}, P; \hat{p})$$

$$(59) \quad B(\underline{U}; \underline{u}, \hat{p}) = B_1(\underline{U}; \underline{u}) - \delta t B_2(\underline{U}; \hat{p})$$

(le coefficient δt étant introduit pour des raisons d'homogénéité).

Il s'agit donc de déterminer la solution du problème variationnel (57), qui est non-linéaire vis-à-vis des inconnues (\underline{U}, P) . On se ramène à la résolution de problèmes linéaires en décomposant les intégrales figurant dans les problèmes variationnels en sommes de termes constants, linéaires en (\underline{U}, P) et en termes non-linéaires. Les termes linéaires fournissent un problème linéaire à résoudre au moyen des méthodes classiques, et les termes non-linéaires sont reportés avec les termes indépendants de (\underline{U}, P) dans le second membre et évalués de manière itérative. La méthode de résolution n'est pas unique : on peut choisir de ne pas décomposer certains termes et de les calculer en remplaçant les inconnues par leur estimation à l'itération précédente (ils apparaissent alors comme une partie du second membre d'un problème linéaire).

I.3.2. Linéarisations des problèmes variationnels.

On choisit de conserver l'expression de B_1 et B_2 sans modification, et de séparer les termes A_1 et A_2 en une somme de termes linéaires en (\underline{U}, P) et de termes constants ou non-linéaires. On décompose ainsi $\underline{\underline{G}}^{-1}$ et $\det \underline{\underline{G}}$ de la manière suivante :

$$(60) \quad \underline{\underline{G}}^{-1} = \underline{\underline{1}} - {}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U} + (\underline{\underline{G}}^{-1} - (\underline{\underline{1}} - {}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U}))$$

$$(61) \quad \det \underline{\underline{G}} = 1 + \text{tr}({}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U}) + (\det \underline{\underline{G}} - (1 + \text{tr}({}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U})))$$

On fait alors apparaître la partie linéaire de $A(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}, \hat{p})$ en écrivant :

$$(62) \quad A(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}, \hat{p}) = L(\underline{U}, P; \underline{u}, \hat{p}) + R(\underline{U}, P, \dot{\mu}; \underline{u}, \hat{p})$$

où l'on a posé

$$(63) \quad L(\underline{U}, P; \hat{\underline{u}}, \hat{p}) = L_1(\underline{U}, P; \hat{\underline{u}}) - \delta t L_2(\underline{U}, P; \hat{p})$$

avec:

$$(64) \quad L_1(\underline{U}, P; \hat{\underline{u}}) = \int_{\Omega_t} {}^t\underline{\underline{\sigma}} : [({}^t\underline{\nabla} \hat{\underline{u}}) \cdot (\text{tr}({}^t\underline{\nabla} \underline{U}) \underline{1} - {}^t\underline{\nabla} \underline{U})] d\Omega_t \\ + \int_{\Omega_t} [C_o : \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}\}_s - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}\}_a + \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}\}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - P \underline{1}] : {}^t\underline{\nabla} \hat{\underline{u}} d\Omega_t$$

$$(65) \quad L_2(\underline{U}, P; \hat{p}) = \int_{\Omega_t} \{k [{}^t\underline{\nabla} P - {}^t\underline{\nabla}({}^t p)] \cdot ({}^t\underline{\nabla} \underline{U} + {}^t\underline{\nabla} \underline{U}^T - \text{tr}({}^t\underline{\nabla} \underline{U}) \underline{1}) \cdot {}^t\underline{\nabla} \hat{p} + [\text{tr}({}^t\underline{\nabla} \underline{U})] \hat{p} / \delta t\} d\Omega_t$$

où les termes L_1 et L_2 sont obtenus en portant (60) et (61) dans les expressions de A_1 et A_2 et en ne conservant que les termes linéaires en (\underline{U}, P) .

Avec ces notations, $A(\underline{U}, P, \hat{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}, \hat{p})$ apparaît comme la somme d'une forme bilinéaire vis-à-vis des couples (\underline{U}, P) et $(\hat{\underline{u}}, \hat{p})$, notée $L(\underline{U}, P; \hat{\underline{u}}, \hat{p})$, et d'un reste dans lequel sont regroupées les contributions non-linéaires, noté R . Le terme R contient à la fois des termes indépendants de (\underline{U}, P) et des corrections non-linéaires en (\underline{U}, P) . Ces non-linéarités sont de natures diverses : certaines sont liées au changement de géométrie, d'autres à la loi de comportement adoptée. C'est le cas notamment du terme où figure le multiplicateur plastique $\hat{\underline{u}}$, qui est un champ inconnu du problème au même titre que \underline{U} et P , à déterminer en écrivant la condition de cohérence.

1.3.3. Algorithme itératif de résolution.

Les champs inconnus sont recherchés de manière itérative : on note $\underline{U}^{(k)}$, $P^{(k)}$ les approximations successives des champs de déplacement et d'incrément de pression entre t et t' . De la même façon, on note $\hat{\underline{u}}^{(k)}$ la $k^{\text{ème}}$ estimation de $\hat{\underline{u}}$. On adopte au début de la première itération les valeurs suivantes :

$$(66) \quad \underline{U}^{(0)} = 0 ; P^{(0)} = 0 ; \hat{\underline{u}}^{(0)} = 0$$

et l'on résout ensuite de manière itérative le problème linéaire suivant :

Trouver $(\underline{U}^{(k)}, P^{(k)})$ tels que :

$$(67) \quad \forall \hat{\underline{u}} \forall \hat{p} \quad L(\underline{U}^{(k)}, P^{(k)}; \hat{\underline{u}}, \hat{p}) = B(\underline{U}^{(k-1)}; \hat{\underline{u}}, \hat{p}) - R(\underline{U}^{(k-1)}, P^{(k-1)}; \hat{\underline{u}}^{(k-1)}; \hat{\underline{u}}, \hat{p})$$

La résolution de ce système fournit une estimation du champ de contraintes à l'instant t' , notée ${}^t\underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}$:

$$(68) \quad {}^t\underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} + [C_o : \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}^{(k)}\}_s - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}^{(k)}\}_a + \{{}^t\underline{\nabla} \underline{U}^{(k)}\}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - P^{(k)} \underline{1}]$$

On note d'autre part ${}^t p^{(k)}$ l'estimation du champ de pression à t' donnée par :

$$(69) \quad {}^t p^{(k)} = {}^t p + P^{(k)}$$

Les champs ${}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}$ et ${}^t p^{(k)}$ ne vérifient pas nécessairement le critère. On ajuste alors la valeur du multiplicateur plastique de la façon suivante :

$$(70) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{si } f({}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}, {}^t p^{(k)}) < 0 & \dot{\mu}^{(k)} = 0 \\ \text{si } f({}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}, {}^t p^{(k)}) \geq 0 & \dot{\mu}^{(k)} \text{ solution de } f({}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)} - \dot{\mu}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}({}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}, {}^t p^{(k)}), {}^t p^{(k)}) = 0 \end{array} \right.$$

et le champ de contraintes à l'instant t' est finalement approché par :

$$(71) \quad {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = {}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)} - \dot{\mu}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}({}^t \underline{\underline{\sigma}}_{el}^{(k)}, {}^t p^{(k)})$$

La solution du problème d'évolution poroélastoplastique entre t et t' s'obtient en itérant la résolution de (67) et la détermination du multiplicateur plastique jusqu'à obtenir un écart assez faible entre deux estimations successives des champs solutions (\underline{U} , P , $\dot{\mu}$).

1.3.4. Remarques.

Le principe de la démarche est simple : on remplace le problème non-linéaire à résoudre par un problème linéaire, les termes non-linéaires étant calculés en remplaçant les champs inconnus par leur estimation à l'itération précédente.

La matrice à inverser est directement liée à la forme bilinéaire $L(\underline{U}, P; \hat{u}, \hat{p})$ qui d'après (64), (65) et (63) est donnée par :

$$(72) \quad \begin{aligned} L(\underline{U}, P; \hat{u}, \hat{p}) = & \int_{\Omega_t} [C_o : \{ \underline{\underline{\nabla}} \underline{U} \}_s] : \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} -k \delta t \, {}^t \nabla P \cdot {}^t \nabla \hat{p} \, d\Omega_t \\ & - \int_{\Omega_t} (\hat{p} \operatorname{tr}({}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U}) + P \operatorname{tr}({}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u})) \, d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\sigma}} : [({}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u}) \cdot (\operatorname{tr}({}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U}) \underline{1} - {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U})] \, d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} -k \delta t [- {}^t \underline{\underline{\nabla}}({}^t p) \cdot ({}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U}^T - \operatorname{tr}({}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{U}) \underline{1})] \cdot {}^t \nabla \hat{p} \, d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} [- {}^t \underline{\underline{\sigma}} \cdot \{ \underline{\underline{\nabla}} \underline{U} \}_a + \{ \underline{\underline{\nabla}} \underline{U} \}_a \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}}] : \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} \, d\Omega_t \end{aligned}$$

On notera que, d'après cette expression, la matrice de rigidité à inverser est la même pour toutes les itérations effectuées entre t et t' .

Les termes figurant sur les deux premières lignes de (72) sont les termes habituels en petites perturbations. Il est intéressant de noter que ces termes définissent une forme bilinéaire

symétrique vis-à-vis des deux couples (\underline{U}, P) et $(\underline{\hat{u}}, \hat{p})$ (en raison des symétries du tenseur \underline{C}_0 notamment), tandis que les termes figurant sur les trois dernières lignes ne sont pas symétriques : ils proviennent d'une part du transport des champs de contraintes ${}^t\underline{\underline{\sigma}}$ et de pression ${}^t p$ à l'instant t sur la configuration à l'instant t' , et d'autre part des termes figurant dans la dérivée de Jaumann.

Dans le problème tel que nous l'avons posé, la forme bilinéaire définissant le problème linéaire à résoudre et la matrice à inverser ne sont donc pas symétriques, ce qui constitue une différence avec les problèmes de poroélasticité infinitésimale. Pour des raisons pratiques, il peut s'avérer judicieux de conserver la symétrie de la matrice à inverser : on dispose en effet de méthodes d'inversion particulièrement performantes pour ce type de matrices. Il suffit pour retrouver la symétrie de linéariser différemment le problème variationnel initial (57), et d'adopter, au lieu de la décomposition $A(\underline{U}, P, \underline{\mu}; \underline{\hat{u}}, \hat{p}) = L(\underline{U}, P; \underline{\hat{u}}, \hat{p}) + R(\underline{U}, P, \underline{\mu}; \underline{\hat{u}}, \hat{p})$ une décomposition $A(\underline{U}, P, \underline{\mu}; \underline{\hat{u}}, \hat{p}) = L'(\underline{U}, P; \underline{\hat{u}}, \hat{p}) + R'(\underline{U}, P, \underline{\mu}; \underline{\hat{u}}, \hat{p})$, où $L'(\underline{U}, P; \underline{\hat{u}}, \hat{p})$ définit une forme bilinéaire symétrique. On peut prendre par exemple les termes symétriques de L :

$$(73) \quad L'(\underline{U}, P; \underline{\hat{u}}, \hat{p}) = \int_{\Omega_t} [\underline{C}_0 : ({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U})_s] : {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{\hat{u}} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} -k \delta t \, {}^t\underline{\underline{\nabla}} P \cdot {}^t\underline{\underline{\nabla}} \hat{p} \, d\Omega_t \\ - \int_{\Omega_t} (\hat{p} \operatorname{tr}({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{U}) + P \operatorname{tr}({}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{\hat{u}})) \, d\Omega_t$$

Les termes non-symétriques sont reportés dans R' , donc dans le second membre, où ils sont évalués de manière itérative.

II. ETUDE DU PROBLEME DE MANDEL : BLOC POROELASTOPLASTIQUE EN COMPRESSION

La première partie de ce chapitre présente une formulation variationnelle des problèmes d'évolution poroélastoplastique entre deux instants successifs et propose un algorithme itératif de résolution. Elle constitue la base d'une méthode de résolution par la méthode des éléments finis. En pratique, nous avons choisi de ne pas reprendre de bout en bout la construction d'un code d'éléments finis, ce travail ayant été réalisé par ailleurs par la société TOTAL.

Afin de valider au moins partiellement le code de TOTAL, nous avons cherché à résoudre un problème académique simple : il s'agit du problème de la compression simple d'un bloc poreux en déformations planes, initialement proposé par Mandel en poroélasticité (Mandel, 1953), également étudié par Cheng et Detournay (1988) et Abousleiman (1996) entre autres. Compte tenu de sa simplicité, le problème se prête à une résolution numérique par la méthode des différences finies, plus facile à mettre en œuvre que la méthode des éléments finis. La méthode employée ne fait pas appel à la formulation variationnelle présentée en §I.3 ; en revanche, l'algorithme de résolution est très proche de celui présenté en §I.3.3 .

II.1. PRESENTATION DU PROBLEME

On considère un bloc poreux saturé de hauteur H , de largeur $2L$, qui repose sur un plan rigide, lisse et imperméable situé dans le plan $Z = 0$ (figure 1). Le bloc est limité par deux plans verticaux lisses rigides et imperméables $X = 0$ et $X = a$ (parallèles au plan de la figure). La face supérieure du bloc initialement située dans le plan $Z = H$, est mise en mouvement au moyen d'un piston rigide lisse imperméable, animé d'un mouvement de translation dans la direction verticale vers le bas à vitesse constante $\underline{V} = -\dot{\alpha} H \underline{e}_z$, tandis que les faces verticales initialement situées en $Y = \pm L$ sont libres de contraintes et drainées. On cherche à déterminer l'évolution au cours du temps des champs de contraintes et de pression dans le bloc ainsi que des déplacements des particules de squelette.

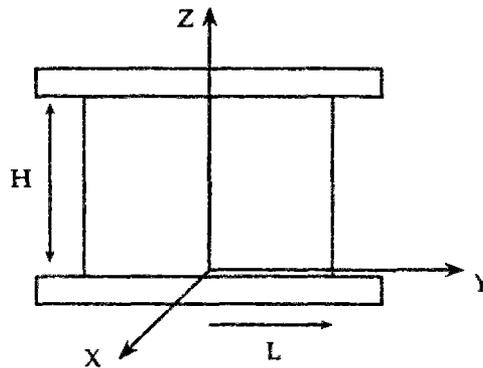


Figure 1 - Géométrie initiale

Le bloc est homogène, isotrope et élastoplastique. On néglige les forces de volume et les effets d'inertie. On adopte une loi d'écoulement associée, et le critère de plasticité est écrit en contraintes effectives, c'est-à-dire que le domaine élastique est caractérisé par la condition $f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}) \leq 0$. On utilisera ici le critère de Von Mises :

$$(74) \quad f(\underline{\underline{\tau}}) = 1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} - \frac{\sigma_0^2}{3} \quad \text{où } \underline{\underline{s}} \text{ est le déviateur de } \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\tau}} - 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{1}}$$

Le squelette est donc plastiquement incompressible ($J_p = 1$). On suppose que les autres hypothèses introduites dans la section §II.1.2 sont également vérifiées : le fluide saturant et le solide constituant le squelette sont incompressibles et la perméabilité du milieu demeure homogène, isotrope et constante.

On note (X, Y, Z) les coordonnées lagrangiennes d'une particule de squelette, c'est-à-dire les coordonnées du point géométrique où elle se situe dans la configuration initiale, et (x, y, z) les coordonnées eulériennes de la même particule (les coordonnées du point géométrique où elle se situe dans la configuration actuelle). Compte tenu de la symétrie de la géométrie initiale et des conditions aux limites hydrauliques et mécaniques, on recherche une solution invariante par translation dans la direction x et telle que le champ de contraintes et le gradient (eulérien) des vitesses ne dépendent pas de z . En particulier, on suppose que la transformation géométrique du squelette est de la forme :

$$(75) \quad x = X \quad ; \quad y = y(Y, t) \quad ; \quad z = Z \bar{z}(t)$$

Le squelette demeure un cylindre à génératrices parallèles à la direction OX , dont la section droite est le rectangle défini par $-l(t) \leq y \leq l(t) ; 0 \leq z \leq h(t) = (1 - \dot{\alpha} t) H$.

Les conditions aux limites mécaniques et hydrauliques s'écrivent donc :

$$(76) \quad \text{face supérieure } z = h(t) : \quad (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_z) \wedge \underline{\underline{e}}_z = 0 \quad \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{e}}_z = -\dot{\alpha} H t \quad \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0$$

$$(77) \quad \text{face inférieure } z=0 : \quad (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_z) \wedge \underline{\underline{e}}_z = 0 \quad \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0 \quad \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0$$

$$(78) \quad \text{faces verticales } y = \pm l(t) : \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_y = 0 \quad p = 0$$

$$(79) \quad \text{faces verticales } x=0 \text{ et } x = a : \quad (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_x) \wedge \underline{\underline{e}}_x = 0 \quad \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{e}}_x = 0 \quad \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{e}}_x = 0$$

On recherche le champ de contraintes sous la forme :

$$(80) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x(y) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_y(y) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_z(y) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Un tel champ est manifestement à divergence nulle si σ_y est constant. Les faces verticales $y = \pm l$ étant libres de contraintes, on prend dans la suite $\sigma_y = 0$.

On cherche les champs de pression et de courant de masse fluide sous la forme :

$$(81) \quad p = p(y)$$

$$(82) \quad \underline{w} = w(y) \underline{e}_y$$

L'équation d'équilibre étant vérifiée pour tous les champs de contraintes de la forme (80), le problème à résoudre est constitué par :

- l'équation de conservation de la masse fluide, qui s'écrit, compte tenu de l'incompressibilité plastique du squelette :

$$(83) \quad \dot{m} + \text{div } \underline{w} = 0 \quad ,$$

- la loi de conduction de la masse fluide (loi de Darcy) :

$$(84) \quad \underline{w}/\rho^f = -k \underline{\text{grad}} p \quad ,$$

- les équations de comportement ,
- les conditions aux limites mécaniques et hydrauliques.

Si les champs de déplacement, de contrainte, de pression et de courant relatif de masse fluide vérifient (75), (81) et (82), les équations (76) à (84) se ramènent aux relations suivantes :

$$(85) \quad \dot{m} + \partial w / \partial y = 0$$

$$(86) \quad w/\rho^f = -k \partial p / \partial y$$

$$(87) \quad \text{en } z=h(t) \quad (Z=H) \quad \xi_z = -\dot{\alpha} H t$$

$$(88) \quad \text{en } z=0 \quad (Z=0) \quad \xi_z = 0$$

$$(89) \quad \text{en } y=\pm l(t) \quad (Y=\pm L) \quad p = 0$$

II.2. RESOLUTION EN TRANSFORMATION INFINITESIMALE.

On donne d'abord la solution analytique du problème de Mandel en poroélasticité linéaire, que l'on résout ensuite numériquement par la méthode des différences finies. On étend ensuite le traitement numérique au problème poroélastoplastique.

II.2.1. Le problème élastique.

Compte tenu de (75), le tenseur des déformations linéarisé est de la forme $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_y(y,t) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \varepsilon_z(t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, et la compatibilité avec les conditions aux limites impose de prendre :

$$(90) \quad \varepsilon_z = -\dot{\alpha} t$$

L'équation d'état (17) (avec $b = 1$ en vertu de l'incompressibilité du solide) donne alors :

$$(91) \quad (\lambda_0 + 2\mu) \varepsilon_y = p + \lambda_0 \dot{\alpha} t$$

$$(92) \quad \sigma_x = \lambda_0 (\varepsilon_y + \varepsilon_z) - p = -\frac{2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} p - \frac{2\mu\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu} \dot{\alpha} t$$

$$(93) \quad \sigma_z = \lambda_0 (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z - p = -\frac{2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} p - \frac{4\mu(\lambda_0 + \mu)}{\lambda_0 + 2\mu} \dot{\alpha} t$$

Utilisant (90) et (91), l'équation de diffusivité (26) peut se mettre sous la forme :

$$(94) \quad \dot{p} = c_m \partial^2 p / \partial y^2 + 2\mu \dot{\alpha}$$

où c_m désigne le coefficient de diffusion : $c_m = k(\lambda_0 + 2\mu)$. On se ramène ainsi à la résolution d'une équation aux dérivées partielles dans laquelle la seule grandeur inconnue est la pression p . Les autres grandeurs inconnues s'en déduisent en utilisant (91), (92) et (93).

II.2.1.a. solution analytique.

Il est facile de voir l'équation aux dérivées partielles (94) avec les conditions aux limites (89) admet une solution particulière indépendante du temps qu'on notera $p_\infty(y)$:

$$(95) \quad p_\infty = -\mu \dot{\alpha} (y^2 - L^2) / c_m$$

On introduit alors une variable auxiliaire v définie par $v = p - p_\infty$. On déduit de l'équation aux dérivées partielles (94) et des conditions aux limites (89) que v est solution de :

$$(96) \quad \dot{v} = c_m \partial^2 v / \partial y^2$$

avec les conditions aux limites :

$$(97) \quad v = 0 \quad \text{en } y = \pm L$$

Compte tenu de la condition initiale $m(t=0^+, y) = 0$ qui traduit le fait que la mise en mouvement du fluide n'est pas instantanée, on déduit de (18) (avec $b=1$ et $M \rightarrow \infty$ en raison de l'incompressibilité des deux constituants) la condition initiale :

$$(98) \quad t = 0^+ : \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

soit encore en utilisant (90) et (91) :

$$(99) \quad t = 0^+ : p = 0 \quad \text{et} \quad v = -p_\infty(y)$$

On recherche la solution sous forme d'une série de solutions élémentaires à variables séparées de (96) avec les conditions aux limites (97) :

$$(100) \quad v(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left((2k+1)\frac{\pi y}{2L}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2 \frac{t}{\tau}\right)$$

où τ est le temps caractéristique de consolidation du bloc : $\tau = \frac{L^2}{c_m}$. On obtient enfin la valeur des coefficients A_k en projetant la condition initiale (99) sur les vecteurs propres, et on trouve :

$$(101) \quad p(y, t) = p_\infty(y) + \mu \dot{\alpha} \tau \sum_{k=0}^{\infty} \frac{32(-1)^{k+1}}{\pi^3(2k+1)^3} \cos\left((2k+1)\frac{\pi y}{2L}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2 \frac{t}{\tau}\right)$$

On notera que la répartition de pression dans le bloc atteint une valeur asymptotique au bout d'un temps infini donnée par la fonction $p_\infty(y)$.

II.2.1.b. résolution numérique.

Les valeurs d'une grandeur B aux instants t et $t' = t + \delta t$ étant notées respectivement tB et ${}^{t'}B$, les dérivées par rapport au temps sont estimées au moyen de la formule d'approximation suivante :

$$(102) \quad \dot{B} = \delta B / \delta t$$

où $\delta B = {}^{t'}B - {}^tB$ désigne l'incrément de B entre t et t' .

On discrétise la géométrie initiale au moyen de $N+1$ points de coordonnées $Y_i = (2i/N - 1)L$ ($i=0, \dots, N$). On note $\sigma_x(i)$, $\sigma_z(i)$, $\varepsilon_y(i)$, $\varepsilon_z(i)$ et $p(i)$ les valeurs des champs σ_x , σ_z , ε_y , ε_z et p au point Y_i . A l'instant initial, tous ces champs sont nuls.

Nous employons pour résoudre l'équation (94) un schéma implicite dans lequel le Laplacien est estimé à l'instant t' , et qui conduit au système linéaire suivant :

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p(0) = 0 \\ i=1, \dots, N-1 \quad \delta p(i)/\delta t = c_m \frac{{}^t p(i-1) - 2{}^t p(i) + {}^t p(i+1) + \delta p(i-1) - 2\delta p(i) + \delta p(i+1)}{(2L/N)^2} + 2\mu \dot{\alpha} \\ \delta p(N) = 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système consiste simplement à inverser une matrice tridiagonale. Les autres inconnues se déduisent de la solution du problème en pression par :

$$(104) \quad \forall i=0, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_0 + 2\mu) \delta \varepsilon_y(i) = \lambda_0 \dot{\alpha} \delta t + \delta p(i) \\ (\lambda_0 + 2\mu) \delta \sigma_x(i) = -2\mu \delta p(i) - 2\mu \lambda_0 \dot{\alpha} \delta t \\ (\lambda_0 + 2\mu) \delta \sigma_z(i) = -2\mu \delta p(i) - 4\mu (\lambda_0 + \mu) \dot{\alpha} \delta t \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus numériquement sont en très bon accord avec la solution analytique.

II.2.2. Le problème élastoplastique.

Supposons connue la situation à l'instant t , et cherchons les incréments de déformations totales et plastiques, de contraintes et de pression entre t et t' . On rappelle que le squelette est plastiquement incompressible pour le critère adopté, c'est-à-dire que l'on a :

$$(105) \quad \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}_p = 0$$

La relation (17) s'écrit donc :

$$(106) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda_0 \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_e - p \underline{\underline{1}}$$

soit encore, après projections sur les directions principales et dérivation par rapport au temps :

$$(107) \quad \dot{\sigma}_x = \lambda_0 (\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) - 2\mu \dot{\varepsilon}_x^P - \dot{p}$$

$$(108) \quad 0 = \lambda_0 (\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2\mu (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_y^P) - \dot{p}$$

$$(109) \quad \dot{\sigma}_z = \lambda_0 (\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2\mu (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_z^P) - \dot{p}$$

On tire de (108) l'expression de $\dot{\varepsilon}_y$ en fonction de $\dot{\varepsilon}_z$, $\dot{\varepsilon}_y^P$ et \dot{p} :

$$(110) \quad (\lambda_0 + 2\mu) \dot{\varepsilon}_y = \dot{p} + \lambda_0 \dot{\alpha} + 2\mu \dot{\varepsilon}_y^P$$

Portant ensuite (110) dans (107), (109) et dans l'équation de diffusivité (26) on obtient respectivement :

$$(111) \quad (\lambda_0 + 2\mu) \dot{\sigma}_x = -2\mu \dot{p} - 2\mu \lambda_0 \dot{\alpha} - 4\mu (\lambda_0 + \mu) \dot{\varepsilon}_x^P - 2\mu \lambda_0 \dot{\varepsilon}_z^P$$

$$(112) \quad (\lambda_0 + 2\mu) \dot{\sigma}_z = -2\mu \dot{p} - 4\mu (\lambda_0 + \mu) \dot{\alpha} - 2\mu \lambda_0 \dot{\varepsilon}_x^P - 4\mu (\lambda_0 + \mu) \dot{\varepsilon}_z^P$$

$$(113) \quad \dot{p} = c_m \partial^2 p / \partial y^2 + 2\mu (\dot{\alpha} - \dot{\varepsilon}_y^P)$$

Autrement dit, on recherche le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)} \in S(i)$ tel que :

$$(119) \quad \forall \underline{\underline{\tau}} \in S(i) \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)} - \underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{\sigma}}^{el(i)} - \underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)} \rangle \geq 0$$

Dans le cas particulier du critère de Von Mises en contraintes effectives, il est facile de voir que $\underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)}$ est le tenseur qui a la même trace que $\underline{\underline{\sigma}}^{el(i)}$, qui vérifie $f(\underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)}) = 0$ et dont le déviateur est proportionnel à celui de $\underline{\underline{\sigma}}^{el(i)}$.

La $k^{\text{ème}}$ estimation de l'incrément de déformation plastique au point considéré est alors définie par :

$$(120) \quad \underline{\underline{\delta e}}^{P(k)(i)} = \underline{\underline{\delta e}}^{(k)(i)} - \underline{\underline{C}}_o^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}}^{Pa(i)} - \underline{\underline{\sigma}}(i))$$

et l'on résout à nouveau (115) et (116). On constate que ce processus itératif converge.

II.3. RESOLUTION EN TRANSFORMATION FINIE.

Nous proposons maintenant une résolution du problème de Mandel en transformation finie par la méthode des différences finies. On introduit les composantes du gradient la transformation du squelette :

$$(121) \quad \underline{\underline{F}} = F_x \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + F_y \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + F_z \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$$

et du taux eulérien de déformation du squelette :

$$(122) \quad \underline{\underline{d}} = d_x \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + d_y \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + d_z \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$$

qui sont reliées par la relation classique $d_i = \dot{F}_i / F_i$. On se place à nouveau dans le cadre de la formulation simplifiée établie au § II.1.2 : on utilisera donc la formulation (25) de la loi de comportement et l'équation de diffusivité (24).

II.3.1. analyse du problème.

On conserve les hypothèses (75), (80), (81) et (82) relatives à la forme des champs de vitesses, de contraintes, de courant de masse fluide et de pression. Il résulte de la forme de la transformation géométrique du squelette (75) que l'on a :

$$(123) \quad F_x = 1 \quad ; \quad F_y = F_y(Y,t) \quad ; \quad F_z = F_z(t)$$

et par suite :

$$(124) \quad d_x = 0$$

$$(125) \quad \underline{\underline{\Omega}} = 0$$

La dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes se ramène donc à une dérivée ordinaire. D'autre part, il est facile de déduire de la condition cinématique imposée sur le déplacement du plan supérieur de l'éprouvette la valeur des fonctions $F_z(t)$ et $d_z(t)$:

$$(126) \quad F_z = \bar{z}(t) = (1 - \dot{\alpha} t)$$

$$(127) \quad d_z = \dot{F}_z / F_z = -\dot{\alpha} / (1 - \dot{\alpha} t)$$

Le tenseur $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}})$ a les mêmes directions principales que $\underline{\underline{\sigma}}$. On pose :

$$(128) \quad \underline{\underline{C}}_o : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}) = (N_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + N_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + N_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$

Le problème consiste donc à déterminer les valeurs des champs d_y , \dot{p} , $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_z$ et $\dot{\mu}$ en résolvant les équations suivantes, déduites de (24) et (25) :

$$(129) \quad (d_y + d_z) = k \partial^2 p / \partial y^2 = (k / F_y^2) \partial^2 p / \partial Y^2$$

$$(130) \quad \dot{\sigma}_x + \dot{p} = \lambda_o (d_y + d_z) - \dot{\mu} N_x$$

$$(131) \quad \dot{p} = \lambda_o (d_y + d_z) + 2\mu d_y - \dot{\mu} N_y$$

$$(132) \quad \dot{\sigma}_z + \dot{p} = \lambda_o (d_y + d_z) + 2\mu d_z - \dot{\mu} N_z$$

avec la condition de non-négativité du multiplicateur plastique $\dot{\mu} \geq 0$ et la condition de cohérence :

$$(133) \quad \dot{f} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mu} > 0$$

II.3.2. Algorithme de résolution numérique.

Comme en transformation infinitésimale, on se propose de se ramener à la résolution itérative d'un problème linéaire vis-à-vis de l'incrément de pression δp entre les instants t et t' , dont les coefficients dépendent notamment du changement de géométrie entre t et t' (puisque l'équation de diffusivité fait intervenir des gradients sur la configuration à t') et du champ de multiplicateur plastique.

Les équations (130), (131), (132) donnent :

$$(134) \quad \delta \sigma_x + \delta p = \lambda_o {}^t d_z \delta t + \lambda_o {}^t d_y \delta t - \dot{\mu} N_x \delta t$$

$$(135) \quad \delta p = \lambda_o {}^t d_z \delta t + (\lambda_o + 2\mu) {}^t d_y \delta t - \dot{\mu} N_y \delta t$$

$$(136) \quad \delta \sigma_z + \delta p = (\lambda_o + 2\mu) {}^t d_z \delta t + \lambda_o {}^t d_y \delta t - \dot{\mu} N_z \delta t$$

où pour alléger l'écriture on a omis les exposants t portant sur $\dot{\mu}$ et les N_i (il n'y a pas de confusion possible dans la mesure où ne fera pas référence dans la suite à leur valeur à l'instant t). La valeur de ${}^t d_z$ est donnée par (127) :

$$(137) \quad {}^t d_z = -\dot{\alpha} / (1 - \dot{\alpha} (t + \delta t))$$

Il est commode de mettre (135) sous la forme :

$$(138) \quad \delta t \text{ } ^t d_y = \beta \delta p + \gamma \delta t \quad \text{avec } \beta = 1/(\lambda_o + 2\mu) ; \gamma = (-\lambda_o \text{ } ^t d_z + \dot{\mu} N_y)/(\lambda_o + 2\mu)$$

D'autre part, on a d'après (102) :

$$(139) \quad \text{ } ^t d_y = (\text{ } ^t F_y - \text{ } ^t F_y) / (\delta t \text{ } ^t F_y)$$

Combinant (138) et (139), il est facile de relier $\text{ } ^t F_y$ à l'incrément de pression et au multiplicateur plastique :

$$(140) \quad \text{ } ^t F_y = \text{ } ^t F_y (1 - \beta \delta p - \gamma \delta t)^{-1}$$

L'équation de diffusivité (129) se met sous la forme :

$$(141) \quad \frac{k \delta t}{\text{ } ^t F_y^2} \partial^2 (\text{ } ^t p + \delta p) / \partial Y^2 = \delta t (\text{ } ^t d_y + \text{ } ^t d_z)$$

Portant (138) et (140) dans (141), on obtient :

$$(142) \quad \frac{k \delta t}{\text{ } ^t F_y^2} (1 - \beta \delta p - \gamma \delta t)^2 \partial^2 (\text{ } ^t p + \delta p) / \partial Y^2 = (\beta \delta p + \gamma \delta t) + \delta t \text{ } ^t d_z$$

Les champs inconnus sont à nouveau recherchés de manière itérative, la $k^{\text{ème}}$ estimation de la grandeur B étant notée $B^{(k)}$. On écrit d'abord :

$$(143) \quad (1 - \beta \delta p - \gamma \delta t)^2 = 1 - 2\beta \delta p - 2\gamma \delta t + R(\delta p, \dot{\mu} N_y)$$

puis on recherche la solution de (142) en résolvant de manière itérative le problème (linéaire vis-à-vis de δp) suivant :

$$(144) \quad \frac{k \delta t}{\text{ } ^t F_y^2} \left((1 - 2\gamma^{(k-1)} \delta t + R^{(k-1)}) \partial^2 (\text{ } ^t p) / \partial Y^2 - 2\beta \partial^2 (\text{ } ^t p) / \partial Y^2 \delta p^{(k)} + (1 - \beta \delta p^{(k-1)} - \gamma^{(k-1)} \delta t)^2 \partial^2 (\delta p^{(k)}) / \partial Y^2 \right) = [(\beta \delta p^{(k)} + \gamma^{(k-1)} \delta t) + \delta t \text{ } ^t d_z]$$

où l'on a posé :

$$(145) \quad \gamma^{(k-1)} = (-\lambda_o \text{ } ^t d_z + \dot{\mu}^{(k-1)} N_y^{(k-1)}) / (\lambda_o + 2\mu)$$

$$(146) \quad R^{(k-1)} = R(\delta p^{(k-1)}, \dot{\mu}^{(k-1)} N_y^{(k-1)})$$

On discrétise à nouveau la géométrie initiale au moyen de $N+1$ points de coordonnées $Y_i = (2i/N-1)L$ ($i=0, \dots, N$) : $B(i)$ désigne la valeur de la grandeur B au point y_i homologue de Y_i dans la transformation du squelette. Au début de la première itération, on prend évidemment :

$$(147) \quad \forall i \quad \dot{\mu}^{(0)}(i) = 0 \quad ; \quad \delta p^{(0)}(i) = 0$$

Chaque itération commence par la résolution du problème linéaire suivant :

$$(148) \quad \left\{ \begin{array}{l} i=0 \quad \delta p^{(k)}(i) = 0 \\ i=1, \dots, N-1 \quad (C(i) + 2D^{(k-1)}(i)/(2L/N)^2) \delta p^{(k)}(i) \\ \quad \quad \quad - D^{(k-1)}(i)/(2L/N)^2 (\delta p^{(k)}(i-1) + \delta p^{(k)}(i+1)) = E^{(k-1)}(i) \\ i=N \quad \delta p^{(k)}(i) = 0 \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$(149) \quad C = \beta (1 + 2 (k \delta t) / ({}^t F_y)^2) \partial^2({}^t p) / \partial Y^2$$

$$(150) \quad D^{(k-1)} = (k \delta t) / ({}^t F_y)^2 [1 - \beta \delta p^{(k-1)} - \gamma^{(k-1)} \delta t]^2$$

$$(151) \quad E^{(k-1)} = (k \delta t) / ({}^t F_y)^2 (1 - 2 \gamma^{(k-1)} \delta t + R^{(k-1)}) \partial^2({}^t p) / \partial Y^2 - \delta t (\gamma^{(k-1)} + {}^t d_z)$$

On obtient alors la $k^{\text{ème}}$ estimation de ${}^t F_y$ et de ${}^t d_y$ par les formules suivantes, déduites de (139) et (140) :

$$(152) \quad {}^t F_y^{(k)}(i) = {}^t F_y(i) (1 - \beta \delta p^{(k)}(i) - \gamma^{(k-1)}(i) \delta t)^{-1}$$

$$(153) \quad {}^t d_y^{(k)}(i) = \frac{{}^t F_y^{(k)}(i) - {}^t F_y(i)}{\delta t {}^t F_y(i)}$$

L'incrément des contraintes est calculé au moyen de (134) et (136) :

$$(154) \quad \delta \sigma_x^{(k)}(i) = \lambda_o ({}^t d_z + {}^t d_y^{(k)}(i)) \delta t - \dot{\mu}^{(k-1)}(i) N_x^{(k-1)}(i) \delta t - \delta p^{(k)}(i)$$

$$(155) \quad \delta \sigma_z^{(k)}(i) = (\lambda_o + 2\mu) {}^t d_z \delta t + \lambda_o {}^t d_y^{(k)}(i) \delta t - \dot{\mu}^{(k-1)}(i) N_z^{(k-1)}(i) \delta t - \delta p^{(k)}(i)$$

Si pour tout i , le tenseur de contraintes effectives ${}^t \underline{\underline{\sigma}}' = {}^t \underline{\underline{\sigma}} + \delta \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} + ({}^t p + \delta p^{(k)}) \underline{\underline{1}}$ vérifie le critère de plasticité, le processus d'itération s'arrête, et l'on considère que la $k^{\text{ème}}$ estimation des incréments de déformations, de contraintes et de pression est satisfaisante. Dans le cas contraire, on construit une nouvelle estimation du multiplicateur plastique de la façon suivante : si, au point $n^{\circ}i$, le critère n'est pas respecté, c'est-à-dire si $f({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(i)) > 0$, on pose :

$$(156) \quad N_x^{(k)}(i) e_x \otimes e_x + N_y^{(k)}(i) e_y \otimes e_y + N_z^{(k)}(i) e_z \otimes e_z = \underline{\underline{C}}_o : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} ({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(k)(i)) = 2 \mu \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} ({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(k)(i))$$

et on détermine la valeur de la $k^{\text{ème}}$ estimation du multiplicateur plastique par :

$$(157) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } f({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(k)(i)) = 0 \quad \dot{\mu}^{(k)}(i) = 0 \\ \text{si } f({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(k)(i)) > 0 \quad \dot{\mu}^{(k)}(i) \text{ est donné par l'équation} \\ \quad \quad \quad f({}^t \underline{\underline{\sigma}}'(k)(i) + \delta t (\dot{\mu}^{(k-1)}(i) \underline{\underline{N}}^{(k-1)}(i) - \dot{\mu}^{(k)}(i) \underline{\underline{N}}^{(k)}(i))) = 0 \end{array} \right.$$

On itère alors le processus en résolvant à nouveau le problème en pression (148). On teste d'abord cet algorithme par comparaison avec l'algorithme employé en poroélastoplasticité en petites perturbations : on obtient une excellente concordance entre les résultats fournis par les deux algorithmes lorsque les déformations du squelette demeurent infinitésimales.

II.3.3. Résultats numériques - Commentaires

En poroélasticité, la pression du fluide dans le bloc atteint une valeur asymptotique, donnée par le profil parabolique $p_\infty(y)$ (cf. §II.2.1). En poroélastoplasticité, on peut montrer qu'une pression uniforme nulle dans tout le bloc fournit une solution indépendante du temps de l'ensemble des équations de champ du problème : cette solution est donnée par $-\dot{\varepsilon}_z = -\dot{\varepsilon}_z^P = \dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_y^P = \dot{\alpha}$, $\dot{\varepsilon}_x = 0$ et $\dot{\sigma}_x = \dot{\sigma}_z = 0$ en transformation infinitésimale, et par $d_x = 0$, $d_z = -d_y = -\dot{\alpha}/(1 - \dot{\alpha} t)$, $\dot{\mu} N_i = 2 \mu d_i$ et $\dot{\sigma}_x = \dot{\sigma}_z = 0$ en transformation finie. On s'attend donc à atteindre un régime asymptotique dans lequel la pression est nulle en tout point.

En pratique, le bloc est écrasé à vitesse constante : le régime asymptotique ne peut être atteint que si la conduction de la masse fluide est plus rapide que l'écrasement du bloc lui-même. On présente ici les résultats de calcul réalisés avec les valeurs numériques suivantes, choisies de manière à se placer dans une situation intermédiaire entre une évolution où la perméabilité serait assez forte pour que la pression atteigne très rapidement sa valeur asymptotique, et une évolution où la perméabilité serait trop faible pour permettre aux surpressions générées par le chargement d'être significativement diminuées par le processus de conduction de la masse fluide. Nous prenons :

$$\lambda_0 = \mu = 1 \text{ Pa} ; \text{ critère de plasticité : } \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0.05 \text{ Pa} ;$$

$$\text{vitesse de déformation verticale : } \dot{\alpha} = 10^{-5} \text{ s}^{-1} ; \text{ largeur initiale : } 2L = 1 \text{ m} ;$$

$$\text{perméabilité : } k = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Les figures 2 à 6 représentent à différents instants (ou ce qui revient au même, pour différentes valeurs de la diminution d'épaisseur du bloc $\dot{\alpha} t$) la pression et la contrainte verticale dans le bloc, ainsi que le déplacement et la dilatation dans la direction horizontale, en fonction de la position dans le bloc, c'est-à-dire de l'abscisse Y du point considéré dans la géométrie initiale. La figure 7 donne l'évolution au cours du temps de la résultante verticale exercée sur le plan $Z = 0$ (par unité de longueur dans la direction X perpendiculaire au plan de la figure 1). Pour chaque résultat, on présente le résultat du calcul en transformation infinitésimale (courbes en trait pointillé, désignées par 'HPP' en légende) et le résultat du calcul en transformation finie (courbes en trait noir, désignées par 'TF' en légende).

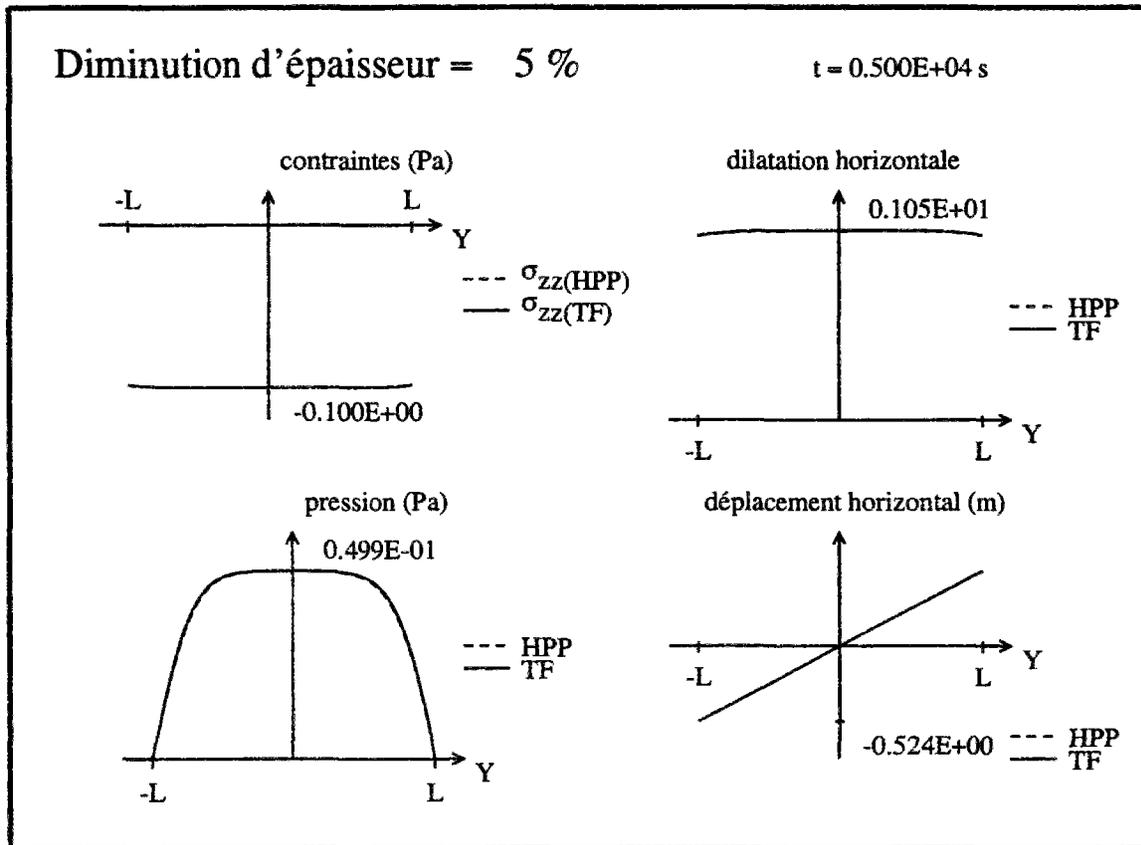


Figure 2 - Résultats pour une diminution d'épaisseur de 5%

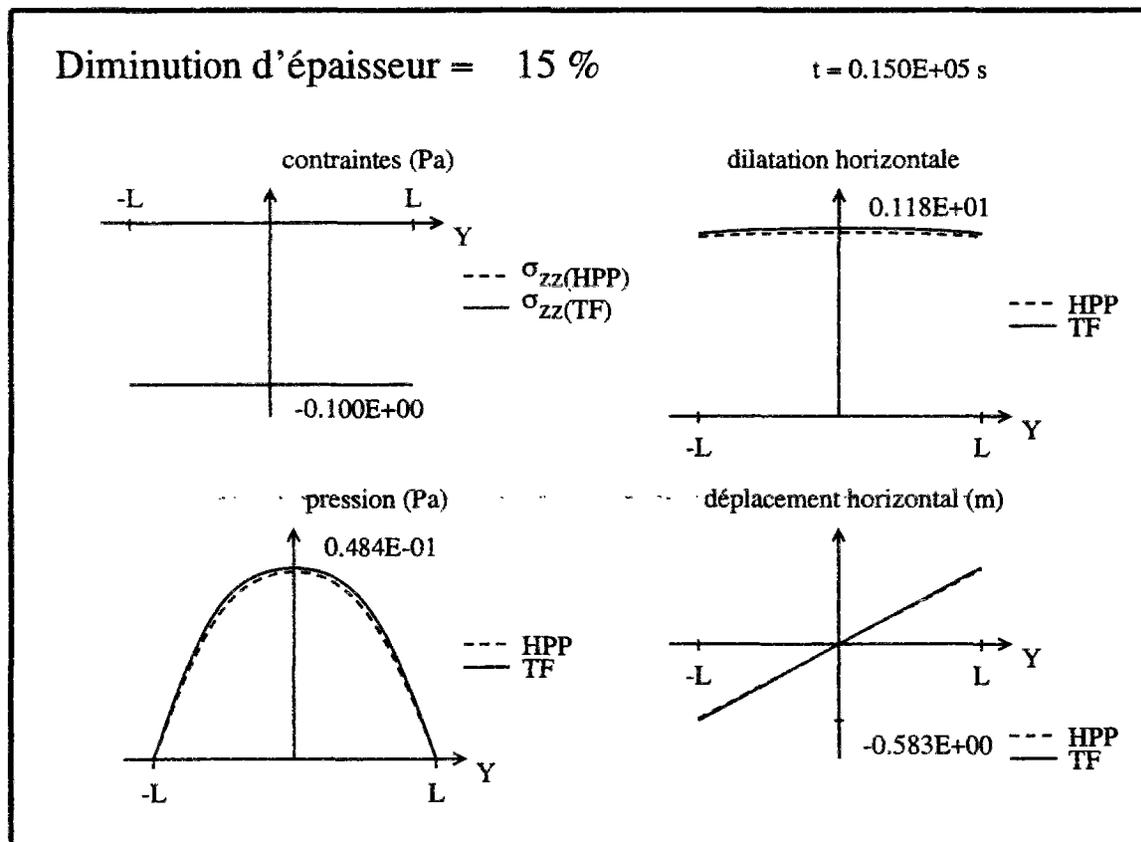


Figure 3 - Résultats pour une diminution d'épaisseur de 15%

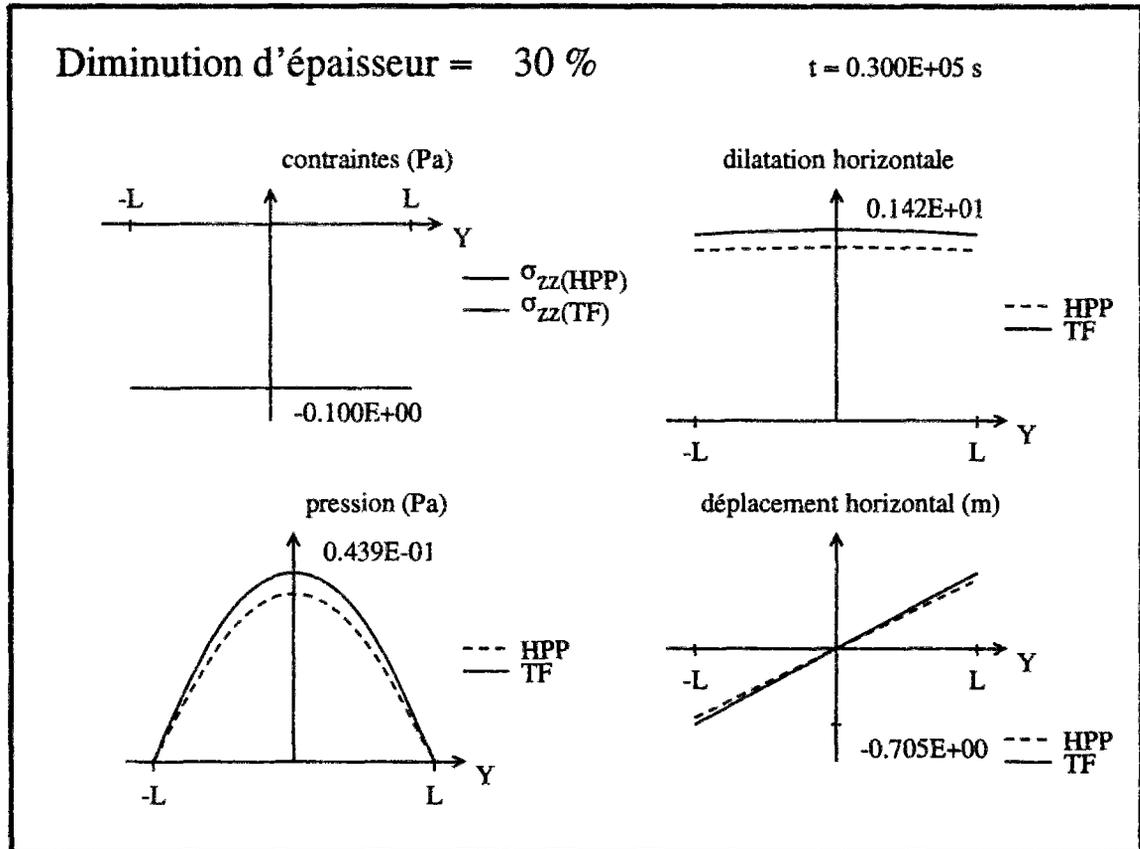


Figure 4 - Résultats pour une diminution d'épaisseur de 30%

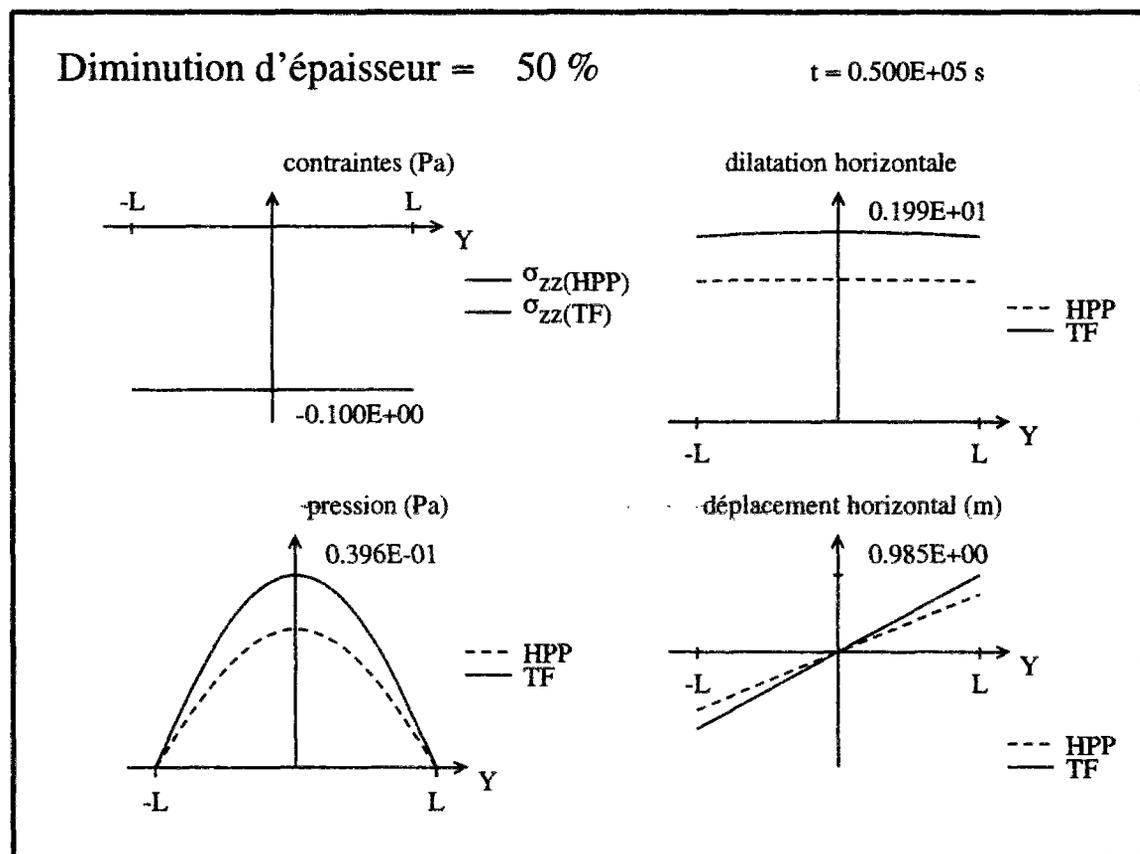


Figure 5 - Résultats pour une diminution d'épaisseur de 50%

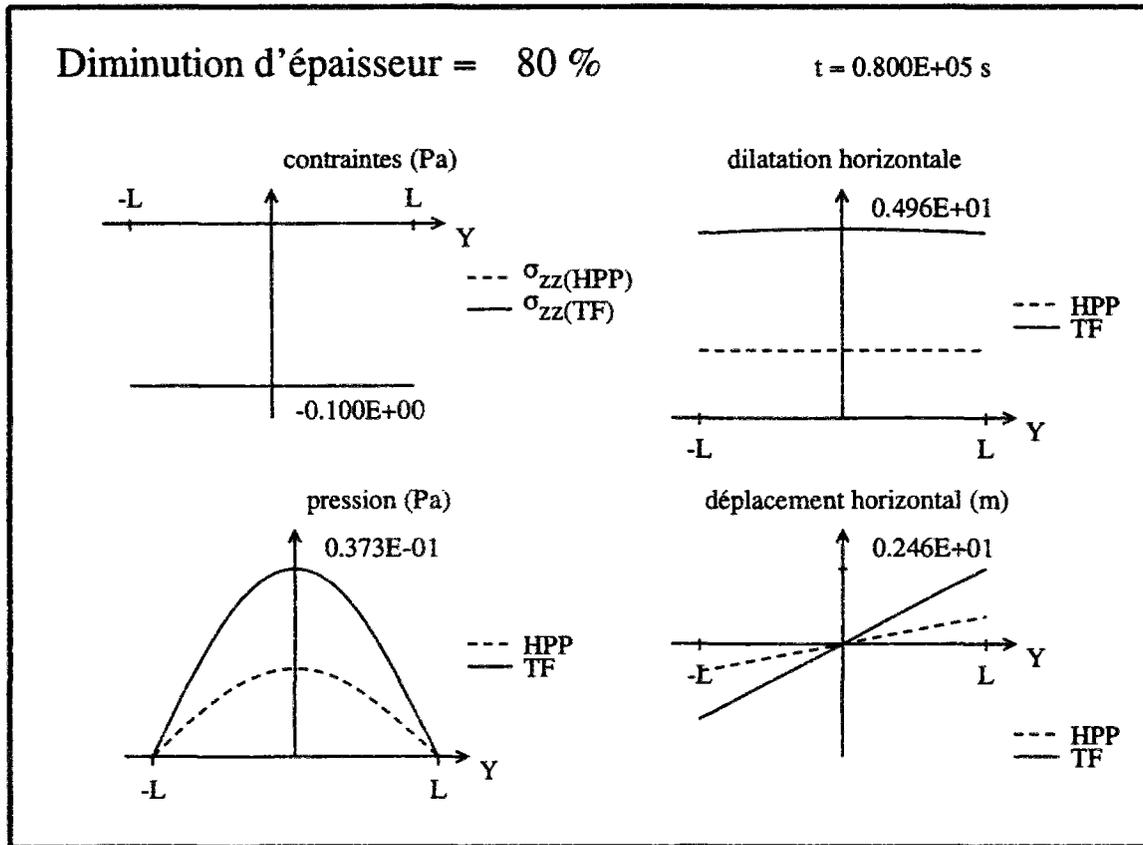


Figure 6 - Résultats pour une diminution d'épaisseur de 80%

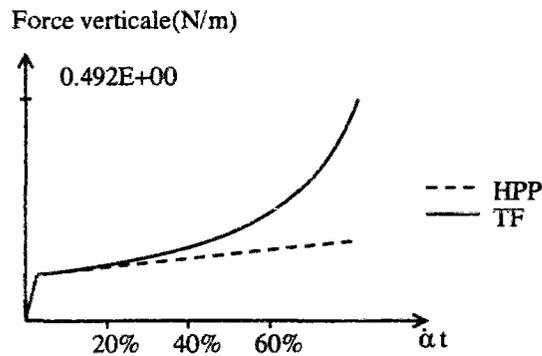


Figure 7 - Evolution de la résultante verticale exercée par le bloc sur le plan supérieur $Z=0$ en fonction de la diminution d'épaisseur de l'échantillon αt

On constate d'abord que l'écart entre les résultats obtenus sous les hypothèses de petites perturbations et les résultats de la formulation en transformation finie est négligeable tant que les déformations restent faibles (de l'ordre de 15%). A mesure que les déformations augmentent, l'écart entre les solutions calculées augmente.

On observe un écart important entre les forces verticales calculées en petites perturbations et en transformation finie. Les forces verticales représentées sur la figure 7 sont calculées en multipliant la contrainte verticale par la largeur de l'échantillon. Les contraintes verticales ont sensiblement la même valeur dans les deux modélisations (cette valeur est limitée par le critère) : la différence entre les estimations de la force résultante traduit donc une erreur dans l'estimation de la largeur de l'échantillon. Bien qu'il ne soit pas habituel de le faire, nous avons tenu compte de la correction due au changement de géométrie dans le calcul en petites perturbations : si l'on néglige la contribution des déformations élastiques, la somme des déformations linéarisées ϵ_y et ϵ_z est nulle : la force verticale varie comme la largeur de l'échantillon donc comme $1 + \epsilon_y \cong 1 + \dot{\alpha} t$. En transformation finie, compte tenu du fait que la partie élastique de la transformation du squelette est infinitésimale, le produit de la largeur de l'échantillon par sa hauteur est à peu près constant à cause de l'incompressibilité plastique du squelette : la largeur de l'échantillon et la force verticale varient donc comme l'inverse de la hauteur, donc comme $1/(1 - \dot{\alpha} t)$. L'erreur commise en petites perturbations sur l'estimation de la résultante verticale est donc directement liée aux linéarisations géométriques, c'est-à-dire à l'approximation consistant à remplacer \underline{d} par $\underline{\dot{\epsilon}}$ dans la loi de comportement (9).

D'autre part, les gradients de pression sont calculés en petites perturbations sur la configuration initiale, ce qui conduit à surestimer leur valeur, puisque le bloc se dilate dans la direction horizontale Y. On surestime donc aussi l'effet de la conduction du fluide et la vitesse avec laquelle les surpressions s'amortissent. Il en résulte qu'au bout d'un temps suffisamment long, les valeurs de la pression estimées en petites perturbations sont sensiblement plus faibles que les valeurs réelles.

Enfin, on signale que les résultats numériques donnés par la méthode des différences finies coïncident avec les résultats obtenus par éléments finis par TOTAL.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre une démarche permettant d'obtenir une formulation variationnelle des équations de la poroélastoplasticité finie. La principale difficulté réside dans la prise en compte des changements de géométrie du squelette : l'approche que nous avons proposée est largement inspirée de celle mise en œuvre par Bathe pour les milieux monophasiques. La prise en compte de la présence de fluide reprend les techniques utilisées en transformation infinitésimale par Shao (1995) ou Dangla (1995).

Une fois le problème mis sous une forme convenable, on peut faire appel à des méthodes éprouvées de résolution numérique de problèmes non-linéaires : nous nous sommes contentés de suggérer un algorithme extrêmement simple, et nous n'avons pas abordé les questions de la stabilité, de la convergence et de la précision de l'algorithme proposé, qui nous ont semblé sortir du cadre de ce mémoire. La formulation variationnelle et l'algorithme proposés ont été utilisés en pratique pour construire un code d'éléments finis par la société TOTAL.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, la résolution d'un problème simple par la méthode des différences finies nous a permis de valider partiellement le code de résolution par éléments finis réalisé par TOTAL et de mettre en évidence les limites d'une approche en transformation infinitésimale.

Pour des raisons pratiques, nous nous sommes placés dans un cadre d'hypothèses restrictif, limité notamment à des modèles de comportement dans lesquels la variation irréversible du volume du squelette est négligée. Il serait évidemment souhaitable de reprendre la démarche en considérant une classe de potentiels plastiques moins restrictive : une telle extension serait en fait relativement simple aussi bien sur le plan théorique que du point de vue pratique. D'autres perspectives consisteraient, selon les problèmes auxquels on s'intéresse, à introduire une formulation du comportement poroélastoplastique plus générale (avec une loi d'élasticité non linéaire et un écrouissage par exemple) ou à s'affranchir des hypothèses faites sur la perméabilité (supposée isotrope et homogène pour obtenir l'équation de diffusivité).

CONCLUSIONS
ET
PERSPECTIVES

Nous avons présenté dans ce mémoire la construction d'une modélisation mécanique des milieux poreux en transformation finie, en portant une attention particulière à la formulation du comportement d'une part, aux méthodes de résolution d'autre part, et enfin aux différences entre les résultats obtenus selon le type de modélisation utilisé (transformation finie ou transformation infinitésimale).

La formulation du comportement constitue un élément central d'un modèle de mécanique des milieux continus : elle fait l'objet de deux chapitres de ce mémoire. Nous avons cherché à mettre en évidence les aspects spécifiquement liés au caractère fini des transformations géométriques du squelette et à la présence d'un fluide. En ce qui concerne les transformations finies, qu'il s'agisse de milieux mono- ou multiphasiques, de nombreux auteurs ont cherché à généraliser les formulations adaptées aux transformations infinitésimales. Ces approches ont le mérite de mettre en évidence certaines difficultés propres aux transformations finies, comme la nécessité de prendre en compte les rotations de l'élément de matière par exemple. Elles présentent un inconvénient majeur : il est possible de proposer plusieurs généralisations raisonnables entre lesquelles il est difficile de faire un choix fondé sur des arguments théoriques clairs. Pour ce qui concerne la présence du fluide, on représente en général en transformation infinitésimale la loi de comportement par une relation entre la transformation du squelette et le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$ familier en mécanique des sols ou un tenseur de contraintes effectives similaire à celui introduit par Biot en poroélasticité $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}}$. Il est légitime de se demander à quelle condition ce type de formulation est encore justifié en transformation finie.

Pour examiner ces questions, nous avons choisi de revenir à l'information physique dont on dispose sur la thermodynamique du milieu. En pratique, nous avons étudié de manière approfondie la formulation du comportement poroélastique et du comportement poroélastoplastique.

En ce qui concerne le comportement poroélastique, nous avons montré que les contraintes effectives de Terzaghi apparaissent comme une fonction de la transformation géométrique du squelette lorsque celui-ci est constitué par un solide incompressible. En revanche, la validité d'une formulation en contraintes effectives de Terzaghi n'est pas assurée lorsque le solide constituant le squelette n'est pas incompressible. D'autre part, nous avons étudié, à titre d'exemple et en marge de l'étude des transformations finies proprement dite, la formulation du comportement d'un milieu poreux parcouru par un fluide très compressible lorsque les déformations du squelette dépendent linéairement de la pression du fluide et de la contrainte appliquée au milieu poreux.

En ce qui concerne le comportement poroélastoplastique, nous avons obtenu, en généralisant aux milieux poreux la notion de configuration relâchée, une formulation qui ne repose pas sur l'introduction a priori de la notion de dérivée objective du tenseur des contraintes.

Afin de comparer le modèle obtenu avec ceux utilisés par d'autres auteurs, nous avons établi une formulation du comportement entre taux de contraintes et de déformations, qui permet de conclure, dans le cas où les propriétés élastiques du milieu sont isotropes, à la validité de l'emploi de la dérivée de Jaumann. On notera que cette formulation relie le taux de déformation du squelette à un tenseur des contraintes effectives qui, contrairement aux tenseurs introduit par Terzaghi et Biot, dépend de la dilatation volumique du squelette. Il faut souligner que rien n'indique que le critère de poroplasticité, et éventuellement le potentiel plastique si l'on adopte une loi non associée, soient fonctions du même tenseur. Enfin, nous avons proposé une formulation relativement simple du comportement des argiles saturées normalement consolidées en transformation finie, qui constitue une adaptation du modèle de Cam-Clay.

Une fois établie la formulation du comportement, nous avons abordé la résolution de différents problèmes en transformation finie : la consolidation d'une couche poroélastique, la compaction des sédiments (en poroélasticité et en poroélastoplasticité) et le problème de Mandel en poroélastoplasticité.

On peut tirer de l'ensemble de ces exemples certaines conclusions générales sur la structure mathématique des problèmes à résoudre. Dans le cadre particulier de la poroélasticité linéaire, on se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire, dont on peut obtenir une solution analytique dans certaines situations où la géométrie est particulièrement simple. En transformation finie, les géométries initiale et actuelle ne peuvent pas être confondues, ce qui a pour conséquence que l'on est amené à résoudre, par voie numérique, une (ou des) équation(s) aux dérivées partielles non-linéaire(s). Cependant, le problème mathématique auquel on parvient n'est pas plus complexe que le problème posé en transformation infinitésimale avec un comportement non-linéaire. Autrement dit, la prise en compte complète des transformations finies n'augmente pas la difficulté technique de la résolution des problèmes.

Par comparaison avec les problèmes de mécanique des milieux poreux en transformation infinitésimale, les difficultés posées par la formulation et la résolution des problèmes en transformation finie se résument donc à la nécessité sur le plan pratique de distinguer les configurations géométriques du squelette (considérées comme confondues en transformation infinitésimale), ce qui suppose de définir des notations qui soient à la fois précises et commodes, et sur le plan théorique de reprendre l'étude de la formulation du comportement. On aura donc intérêt, lorsque le problème l'exige, à renoncer à une formulation établie dans le cadre des petites perturbations. On évitera ainsi, sans introduire de réelle difficulté supplémentaire, de commettre des erreurs, parfois importantes, associées aux linéarisations géométriques : la linéarisation de la relation entre dilatation verticale et porosité dans le problème de la compaction et la linéarisation

de la relation entre hauteur et largeur d'un bloc plastiquement incompressible en compression simple sont à cet égard exemplaires.

Divers prolongements du travail présenté dans ce mémoire peuvent être envisagés.

En premier lieu, les problèmes dans lesquels le squelette du milieu poreux considéré n'est pas un système matériel indépendant du temps constituent un champ d'investigation largement ouvert, dans lequel l'expérience acquise reste limitée, et qui s'avère intéressant pour la modélisation des déformations synsédimentaires de structures géologiques. Une des particularités les plus marquantes de ce type de problèmes est l'existence de deux échelles de temps caractérisant la vitesse de sédimentation d'une part et la vitesse de conduction de la masse fluide d'autre part. Les conséquences de cette propriété sur les méthodes à mettre en œuvre pour résoudre le problème de manière efficace restent à étudier plus précisément et pourraient faire l'objet de développements mathématiques et numériques.

D'autre part, nous n'avons considéré ici que des problèmes simples (essentiellement unidimensionnels). Cependant, la démarche proposée pour résoudre les équations de la poroélastoplasticité finie a une portée générale, et permet de considérer des problèmes dans lesquels la géométrie est quelconque. Il est donc naturel de proposer de passer à la réalisation d'un code de résolution numérique par éléments finis, comme celui mis en place par TOTAL, mais capable de prendre en compte une formulation du comportement plus générale, par exemple celle proposée au chapitre 4 pour étendre le modèle Cam-Clay aux transformations finies. Ce travail constituerait une bonne façon de valoriser les résultats obtenus dans cette thèse, et permettrait d'aborder de manière précise les questions d'analyse numérique qui n'ont pas été détaillées ici.

Enfin, on pourrait juger nécessaire, selon les problèmes auxquels on s'intéresse, d'étendre la formulation du comportement à des situations plus générales. Il est par exemple souhaitable de prendre en compte le gradient géothermique dans la modélisation de la compaction des sédiments : on pourrait donc chercher une formulation du comportement adaptée à des problèmes non isothermes. On peut également envisager de prendre en compte l'anisotropie induite par le chargement subi par le matériau. Compte tenu des travaux disponibles dans la littérature pour les milieux monophasiques, la construction d'un modèle prenant en compte l'anisotropie semble relativement accessible du point de vue technique. Il faut cependant garder à l'esprit le fait qu'une telle construction augmente significativement la quantité d'informations à identifier expérimentalement. Il est difficile de dire a priori si le comportement serait représenté de manière beaucoup plus fidèle, et l'intérêt du raffinement proposé dépend fortement du problème considéré.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- Abouleisman Y., Cheng A. H. -D., Cui L., Detournay E. and Roegiers J.- C., Mandel's problem revisited, *Géotechnique*, vol. 46, pp.187-195.
- 2- Athy L.F. (1930), Density, porosity and compaction of sedimentary rocks, *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, vol.14, n°1.
- 3- Atkinson J.H. (1993), *Introduction to the mechanics of soils and foundations*, Mc Graw-Hill, London, 337p.
- 4- Auriault J.-L. et Sanchez-Palencia E. (1977), Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *Journal de Mécanique*, vol. 16, n°4, p. 575-603.
- 5- Bathe K.-J. (1982), *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- 6- Bathe K.-J., Ramm E. et Wilson E.L. (1975), Finite element formulations for large deformation dynamic analysis, *Int. J. Num. Meth. Engineering*, 9, p.353-386.
- 7- Bear J. et Bachmat Y. (1990), *Introduction to modelling of transport in porous media*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- 8- Bilby B.A., Gardner L.R.T. et Stroh A.N. (1957), Continuous distributions of dislocations and the theory of plasticity, *Extraits des actes du IX^e Congrès international de Mécanique Appliquée*, p.35-44, Brüssels.
- 9- Biot M.A. (1941), General theory of three-dimensional consolidation, *Journal of Applied Physics*, 12, p. 155-164.
- 10- Biot M.A. (1955), Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *Journal of Applied Physics*, vol. 26, p. 182-185.
- 11- Biot M.A. (1977), Variational Lagrangian-thermodynamics of nonisothermal finite strain mechanics of porous solids and thermomolecular diffusion, *Int. J. Solids Structures*, 13, p. 579-597.
- 12- Bourgeois E., de Buhan P. et Dormieux L. (1995), Formulation d'une loi élastoplastique pour un milieu poreux saturé en transformation finie, *C.R.Acad.Sci.Paris*, t.321, Série IIb, p.175-182.
- 13- Bourgeois E. et Dormieux L. (1996), Consolidation of a nonlinear poroelastic layer in finite deformations, *Eur. J. Mechanics A/Solids*, vol.15, n°4, p.575-598.
- 14- Bourgeois E., de Buhan P. et Dormieux L. (1997), Elastoplastic porous media at large strains : thermodynamic approach of the constitutive law and numerical resolution, *Computational plasticity, Fundamentals and applications (Complas V)*, Owen D.R.J., Oñate E., Hinton E. (eds), Barcelona, p. 901-906.

- 15- Bourgeois E. et Dormieux L. (1997), Prise en compte des non-linéarités géométriques dans la modélisation de la compaction des sédiments, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol.52, n°1.
- 16- Bowen R.M. (1976), Theory of mixtures, *Continuum physics*, 3, A.C. Eringen ed., New York, Academic Press.
- 17- de Buhan P. et Dormieux L. (1994), Formulation du critère de rupture d'un milieu poreux, *C.R.Acad.Sci. Paris*, t.319, Série II, p.1-7.
- 18- de Buhan P., Chateau X. et Dormieux L. (1997), The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a homogenization approach, accepté pour publication à l'*Eur. J. Mechanics A/ Solids*.
- 19- Burland J.B. (1967), *Deformation of soft clay*, Ph. D. Thesis Cambridge University.
- 20- Burland J.B. et Roscoe K.H. (1968), On the generalized stress-strain behaviour of wet clay, in *Engineering plasticity*, Heyman Leckie ed., Cambridge.
- 21- Cescotto S. et Habraken A.-M. (1991), A note on the response to simple shear of elasto-plastic materials with isotropic hardening, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol.10, n°1, p.1-13.
- 22- Charlez Ph. A. (1995), Example of poroplastic model : the Cam-Clay model, in *Mechanics of porous media*, ed. Ph. Charlez, Balkema, Rotterdam, 311 p.
- 23- Cheng A. H. -D. et Detournay E. (1988), A direct boundary element method for plane strain poroelasticity, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol.12, 551-572.
- 24- Cordary D. (1994), *Mécanique des sols*, Lavoisier Tec & Doc.
- 25- Cosenza P. (1996), *Sur les couplages entre comportement mécanique et processus de transfert de masse dans le sel gemme*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie Paris VI, Paris, 184 p.
- 26- Coussy O. (1989), Thermodynamics of saturated porous solids in finite deformation, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol.8, p. 1-14.
- 27- Coussy O. (1991), *Mécanique des milieux poreux*, Technip, Paris.
- 28- Coussy O. (1995), *Mechanics of porous continua*, Wiley, New York.
- 29- Dafalias Y.F. (1997), Common misunderstandings in finite deformation anisotropic plasticity, *Computational plasticity, Fundamentals and applications (Complas V)*, Owen D.R.J., Oñate E., Hinton E. (eds), Barcelona.
- 30- Dafalias Y.F. (1984), The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations, *Mechanics of Materials*, 3, p.223-233.
- 31- Dafalias Y.F. (1985), The plastic spin, *Journal of Applied Mechanics*, 52, p.865-871.
- 32- Dangla P. (1995), Variational formulation of a thermoporoelastic problem, in *Mechanics of porous media*, Charlez (ed.), Balkema, Rotterdam, p.139-156.

- 33- Dangla P. et Coussy O. (1996), Drainage and drying of deformable porous materials : 1D case study, *Proceedings of IUTAM Symposium on Mechanics of granular and porous materials*.
- 34- Dienes J.K. (1979), On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mechanica*, 32, p.217-323.
- 35- Dormieux L. et Coussy O. (1994), *Introduction à la mécanique des milieux poreux*, cours de mécanique de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- 36- Dormieux L. et Stolz C. (1992), Approche variationnelle en poroélasticité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.315, série II, p. 407-412.
- 37- Dullien F.A.L. (1992), *Porous Media, Fluid Transport and pore structure*, 2nd edition, Academic Press, San Diego, 574 p.
- 38- Durban D. (1994), Simple shear at finite strains of anisotropic plastic solids, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol.13, n°6, p.783-792.
- 39- Ene H.I. et Sanchez-Palencia E. (1975), Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux, *Journal de mécanique*, vol.14, n°1.
- 40- Gibson R.E., England G.L. et Hussey M.J.L. (1967), The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays, *Géotechnique*, 17, p.261-263.
- 41- Gilbert F. (1987), *Descriptions thermomécaniques de milieux à plusieurs constituants et application aux milieux poreux saturés*, Thèse de doctorat d'Etat ès sciences physiques, université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- 42- Gilbert F. (1987), Description des sols saturés par une méthode d'homogénéisation, in *Manuel de rhéologie des géomatériaux*, F. Darve ed., Presses de l'ENPC, Paris, 402p.
- 43- Gilormini P. et Rougée P. (1994), Taux de rotation des directions matérielles dans un milieu déformable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.318, série II, p.421-427.
- 44- Gilormini P. (1994), Sur les référentiels locaux objectifs en mécanique des milieux continus, *C.R.Acad. Sci. Paris*, t.318, série II, p.1153-1159.
- 45- Guéguen Y. et Palciauskas V. (1994), *Introduction to the physics of rocks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 294 p.
- 46- Halphen B. et Nguyen Q.S. (1975), Sur les matériaux standard généralisés, *Journal de Mécanique*, 14, n°1, p. 39-63.
- 47- Halphen B. (1978), *Problèmes quasistatiques en viscoplasticité*, thèse de doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- 48- Hamilton E.L. (1959), Thickness and consolidation of deep-sea sediments, *Bulletin of the Geological Society of America*, vol.70, p.1399-1424.
- 49- Hedberg H.D. (1936), Gravitational compaction of clays and shales, *American Journal of Science*, vol. 31, n°184.

- 50- Hubbert M.K. et Rubey W.W. (1959), Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting, I. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting, *Bulletin of the Geological Society of America*, vol.70, p.115-166.
- 51- Lambe T.W. et Whitman R.V. (1979), *Soil Mechanics-SI Version*, John Wiley, New York, 553p.
- 52- Lamoureux-Var V. (1997), *Modélisation de la compaction dans les bassins sédimentaires : approche mécanique*, Thèse de doctorat de l'Ecole polytechnique, 256p.
- 53- Lee E.H. (1969), Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, 36, p.1-6.
- 54- Loret B. (1985), On the choice of elastic parameters for sand, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9, p.285-292.
- 55- Mandel J. (1953), Consolidation des sols (étude mathématique), *Géotechnique*, vol. 3, 287-299.
- 56- Mandel J. (1971), *Plasticité classique et viscoplasticité*, Cours au CISM n°97, Springer-Verlag.
- 57- Manzari M.T. (1996), On finite deformation dynamic analysis of saturated soils, *Arch. Mech.*, 48, 2, p.281-310.
- 58- Meroi E.A., Schrefler B.A. et Zienkiewicz O.C. (1995), Large strain static and dynamic semisaturated soil behaviour, *Int. J. Num. Analytic. Meth. Geomech.*, vol.19, p.81-106.
- 59- Müller I. (1975), Thermodynamics of mixtures of fluids, *Journal de Mécanique*, vol.14, n°2, pp.267-303.
- 60- Roscoe K.H., Schofield A.N. et Wroth C.P. (1968), On the yielding of soils, *Géotechnique*, vol.9, p.71.
- 61- Salençon J. (1988), *Mécanique des milieux continus, t.1: concepts fondamentaux*, Ellipses, Paris.
- 62- Schieck B. et Stumpf H. (1995), The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, vol.32, p.3643-3667.
- 63- Schneider F., Potdevin J.L., Wolf S. et Faille I. (1994), Modèle de compaction élastoplastique et viscoplastique pour simulateurs de bassins sédimentaires, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol.49, n°2.
- 64- Schofield A.N. et Wroth C.P. (1968), *Critical state soil mechanics*, Mac Graw Hill.
- 65- Shao J.F. (1995), Numerical solutions of non-linear problems related to thermal convection and poroplasticity, in *Mechanics of porous media*, Charlez (ed.), Balkema, Rotterdam, p.157-176.
- 66- Simo J.C. (1988), A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I: continuum formulation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 66, p.199-219.
- 67- Smith J.E. (1971), The dynamics of shale compaction and evolution of pore-fluid pressures, *Mathematical Geology*, vol.3, n°3.
- 68- Terzaghi, K. (1925), *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*, F. Deitke, Vienna.
- 69- Terzaghi K. (1943), *Theoretical soil mechanics*, John Wiley & sons, New York.

-
- 70- Truesdell C. et Toupin R.A. (1960), The classical field theory, *Handbuch der Physik*, III, 1S., Flügge ed., Springer Verlag.
- 71- Yong R.N. et Warkentin B.P. (1975), *Soil properties and behaviour*, Elsevier, New York.
- 72- Zienkiewicz O.C., Chan A.H.C., Pastor M., Paul D.K. et Shiomi T. (1990), Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. I: Fully saturated problems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 429, p.285-309, 1990.
- 73- Zienkiewicz O.C. et Shiomi T. (1984), Dynamic behaviour of saturated porous media : the generalized Biot formulation and its numerical solution, *Int. J. Num. Analytic. Meth. Geomech.*, vol.8, p.71-96.

ANNEXE 1

principales notations

Le but de cette annexe est de récapituler les notations les plus fréquemment utilisées dans l'ensemble du mémoire. D'une manière générale, les notations employées obéissent aux règles typographiques suivantes :

- les vecteurs sont représentés par une lettre soulignée une fois, les tenseurs d'ordre 2 par une lettre soulignée deux fois, les tenseurs d'ordre 4 par une lettre soulignée par un \sim (par exemple le tenseur des modules d'élasticité non drainés est noté $\underline{\underline{C}}$) ;
- on note respectivement $\underline{\underline{A}}^T$, $\{\underline{\underline{A}}\}_a$ et $\{\underline{\underline{A}}\}_s$ le tenseur transposé, la partie antisymétrique et la partie symétrique d'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{A}}$;
- une grandeur attachée à l'un ou l'autre des milieux continus qui constituent le milieu poreux est affectée d'un exposant "s" pour le squelette, "f" pour le fluide, "α" s'il peut s'agir de l'un ou de l'autre ;
- l'indice "m" indique que la grandeur considérée est une densité massique ;
- les indices "e" et "p" sont associés à la distinction partie élastique/partie plastique de la transformation du squelette en poroélastoplasticité. A l'exception de C_0^* au chapitre 3 (voir liste ci-après) les grandeurs portant un astérisque ($\underline{\underline{E}}^*$, $\underline{\underline{P}}^*$, $\underline{\underline{D}}_e^*$, $\underline{\underline{D}}_p^*$, $\underline{\underline{\Delta}}_e^*$, $\underline{\underline{\Delta}}_p^*$, $\underline{\underline{\epsilon}}^*$, ...) sont relatives au choix particulier de la configuration relâchée introduit au chapitre 4, §I.2.2.a ;
- les exposants "d" et "v" sont attachés à la partie déviatorique ou la partie volumique d'un tenseur de déformation. L'exposant ^d est aussi employé pour désigner des valeurs considérées comme "données" dans la définition des conditions aux limites, et d'autre part au chapitre 3, page 90, pour désigner la valeur asymptotique de ϵ ou de λ dans le problème de la consolidation.

On signale que les développements menés au chapitre 5 introduisent un certain nombre de notations supplémentaires qui ne sont pas reprises dans cette annexe.

Symboles grecs

$\gamma^\alpha, \gamma^f, \gamma^s$	accélération d'une particule matérielle de milieu continu α , de fluide, de squelette
δ	constante matérielle introduite pour caractériser le résultat d'un essai œdométrique drainé (problème de la consolidation)
$\underline{\underline{\Delta}}$	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\underline{\underline{\Delta}}_e$	tenseur de Green-Lagrange associé à la partie élastique $\underline{\underline{E}}$ de la transformation
$\underline{\underline{\Delta}}_p$	tenseur de Green-Lagrange associé à la partie plastique $\underline{\underline{P}}$ de la transformation
Δq	surcharge imposée instantanément dans le problème de la consolidation
ε	composante du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ suivant $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ (problèmes de consolidation/compaction)
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations linéarisé
$\varepsilon_1, \varepsilon_3$	valeurs propres du tenseur de déformation linéarisé dans le contexte des essais classiques de la mécanique de sols (essai triaxial, essai œdométrique)
$\varepsilon^\alpha, \varepsilon^f, \varepsilon^s$	coefficient de la force d'interaction \underline{a} ($\varepsilon^s = 1$ et $\varepsilon^f = -1$)
$\varepsilon^d, \varepsilon_e^d, \varepsilon_p^d$	déformations déviatoriques totale, élastique, plastique
$\underline{\underline{\varepsilon}}_e$	tenseur linéarisé des déformations élastiques
$\underline{\underline{\varepsilon}}_p$	tenseur linéarisé des déformations plastiques
$\varepsilon^v, \varepsilon_e^v, \varepsilon_p^v$	déformations volumiques totale, élastique, plastique
ζ	forces d'écrouissage
η	inclinaison des contraintes effectives $\eta = Q/P'$
κ	pente du diagramme $e - \ln P'$ dans un essai de compression isotrope drainé (partie réversible)
λ	dilatation dans la direction verticale (problèmes de consolidation/compaction)
λ	pente du diagramme $e - \ln P'$ dans un essai de compression isotrope drainé (partie irréversible)
λ_0, μ	coefficients de Lamé drainés (λ_0 : constante de Lamé ; μ module de cisaillement)
μ	viscosité cinématique du fluide à l'échelle microscopique
$\dot{\mu}$	multiplicateur plastique
$\underline{\underline{\xi}}$	champ de déplacement du squelette
$\underline{\underline{\pi}}$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\underline{\underline{\Pi}}^*$	notation auxiliaire pour le tenseur $\mathbb{J}_p \underline{\underline{\pi}}^*$
$\rho_a^\alpha, \rho_a^f, \rho_a^s$	masse volumique apparente du milieu continu α , du fluide, du squelette
ρ^f	masse volumique vraie du fluide
ρ^s	masse volumique vraie du solide
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes de Cauchy (pour l'ensemble des deux milieux continus)
$\underline{\underline{\sigma}}'$	tenseur des contraintes effectives : $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}}$ (Terzaghi) ou $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + bp \underline{\underline{1}}$ (Biot)
$\underline{\underline{\sigma}}^\alpha$	tenseur des contraintes partielles dans le milieu continu α

σ_1, σ_3	contraintes principales dans le contexte des essais classiques de la mécanique des sols (essai triaxial, essai œdométrique)
$\underline{\underline{\sigma}}^f$	tenseur des contraintes partielles dans le milieu continu fluide
$\underline{\underline{\sigma}}^s$	tenseur des contraintes partielles dans le squelette
$\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\sigma}}$	notation générique pour désigner une dérivée objective du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$
$\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\sigma}}_J, \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\sigma}}_{GN}$	dérivées de Jaumann et de Green-Naghdi du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$
$\underline{\underline{\Sigma}}$	notation auxiliaire pour le tenseur $J \underline{\underline{\sigma}}$
Φ	densité volumique eulérienne de dissipation
Φ_m	énergie libre massique du fluide
ϕ	porosité
ϕ_R	porosité dans la configuration relâchée (en poroélastoplasticité)
$\underline{\underline{\Phi}}$	application définissant la transformation géométrique du squelette
χ	variables d'écrouissage (variables de l'énergie bloquée U)
ψ	densité volumique eulérienne d'énergie libre du milieu poreux
Ψ	densité volumique lagrangienne d'énergie libre du milieu poreux
Ψ_f	contribution du fluide à la densité volumique lagrangienne d'énergie libre Ψ
Ψ_s	contribution du squelette à la densité volumique lagrangienne d'énergie libre Ψ
Ψ_s^{el}	partie récupérable de l'énergie libre du squelette
Ψ_s^{el*}	transformée de Legendre -Fenchel de Ψ_s^{el}
$\underline{\underline{\Omega}}$	tenseur de spin (partie antisymétrique du gradient eulérien des vitesses du squelette)
Ω_0	domaine géométrique occupé par le squelette dans la configuration de référence
Ω_t	domaine géométrique occupé par le squelette dans la configuration actuelle
$d\Omega_0, d\Omega_t$	domaine géométrique élémentaire occupé par une particule de donnée squelette dans la configuration de référence, dans la configuration actuelle
$d\Omega_t^R$	configuration relâchée d'une particule de squelette

Lettres latines :

\underline{a}	force d'interaction entre les deux milieux continus squelette et fluide (\underline{a} désigne la densité volumique de force exercée par le fluide sur le squelette)
b	coefficient de Biot (égal à $1/3 \text{ tr } \underline{B}$ dans le cas isotrope, à B_{zz} dans le contexte de la consolidation et de la compaction)
$b^{\text{fin}}, b^{\text{inf}}, b^{\text{lin}}$	composante du coefficient de Biot \underline{B} suivant $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ identifiée respectivement en transformation finie, en transformation infinitésimale, en poroélasticité linéaire
\underline{B}	coefficient de Biot
c	constante matérielle dans la loi d'élasticité non-linéaire proposée au chapitre 4
c_m	coefficient de diffusion de la masse fluide
\underline{C}	tenseur des modules d'élasticité non drainés
C_c	indice de compressibilité (pente du diagramme $e\text{-log}_{10} \sigma_{zz}$ dans un essai œdométrique drainé)
\underline{C}_o	tenseur des modules d'élasticité drainés
C_o	composante de \underline{C}_o suivant $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$
$C_o^{\text{fin}}, C_o^{\text{inf}}, C_o^{\text{lin}}$	valeur de C_o identifiée respectivement en transformation finie, en transformation infinitésimale, en poroélasticité linéaire
$\underline{C}_o^* (C_o^*)$	valeur de $\underline{C}_o (C_o)$ pour une pression de fluide nulle
d	constante matérielle dans la loi d'élasticité non-linéaire proposée au chapitre 4
\underline{d}	taux de déformation d'un milieu continu
\mathcal{D}	densité volumique lagrangienne de dissipation
\underline{D}_e	taux de déformation eulérien "élastique"
\underline{D}_p	taux de déformation eulérien "plastique"
e	indice des vides
e	densité volumique d'énergie interne du milieu poreux
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z, \underline{e}_i, \underline{e}_j$	vecteurs unitaires
\underline{e}^*	tenseur égal à $\underline{E}^* - \underline{1}$
e_o	valeur de référence de l'indice des vides
e_m^α	densité massique d'énergie interne pour le milieu continu α
\underline{e}^{*d}	déviateur de \underline{e}^*
e^d	invariant de \underline{e}^* (fonction de I_1 et I_2), nul si \underline{e}^* est un tenseur sphérique
e_p	indice des vides plastique
e^v	invariant de \underline{e}^* défini par $e^v = -1/3 I_1$
E	énergie interne d'un système matériel
E	énergie totale d'un système matériel
\underline{E}	partie élastique de la transformation du squelette (en poroélastoplasticité)
$f(\underline{\sigma}, p)$	critère de poroplasticité

$F_{\sigma p}, F_{mp}, F_{m\lambda}$	fonctions représentant les résultats d'essais expérimentaux (chapitre 3)
$\underline{\underline{F}}$	gradient de la transformation géométrique du squelette
$\underline{\underline{F}}^f$	densité massique d'efforts extérieurs s'exerçant sur le milieu continu fluide
$\underline{\underline{F}}^s$	densité massique d'efforts extérieurs s'exerçant sur le squelette
$g(\underline{\underline{\sigma}}, p)$	potentiel plastique (pour une loi d'écoulement non associée)
g_m	enthalpie libre massique du fluide (à partir du chapitre 2)
g_m^f	enthalpie libre massique du fluide (au chapitre 1)
G	module de cisaillement
h	charge hydraulique (ou surpression)
h	potentiel décrivant l'évolution des variables d'écrouissage χ
H	épaisseur de la couche poreuse considérée dans le problème de la consolidation
H	module d'élasticité dans la loi d'élasticité non-linéaire proposée pour le modèle Cam-Clay (chapitre 4), lié aux dérivées croisées de Ψ_s^{el*}
I_1, I_2	premier et deuxième invariants du tenseur $\underline{\underline{e}}^*$
J	jacobien de la transformation géométrique du squelette (égal au déterminant de $\underline{\underline{F}}$)
J_e	jacobien de la partie élastique de la transformation $\underline{\underline{F}}$ (égal au déterminant de $\underline{\underline{E}}$)
J_p	jacobien de la partie plastique de la transformation $\underline{\underline{F}}$ (égal au déterminant de $\underline{\underline{P}}$)
k	perméabilité (dans le cas isotrope)
$\underline{\underline{k}}$	tenseur de perméabilité
k_o	valeur de référence de la perméabilité (dans la formule de Koseny Carman)
K	énergie cinétique d'un système matériel
K	module de compression (élasticité du modèle Cam-Clay)
K_f	module de compression du fluide
K_o	coefficient de poussée des terres au repos
$\underline{\underline{L}}_a^*$	partie antisymétrique du tenseur $\underline{\underline{\dot{P}}}^* \underline{\underline{P}}^{*-1}$
$\underline{\underline{L}}_s^*$	partie symétrique du tenseur $\underline{\underline{\dot{P}}}^* \underline{\underline{P}}^{*-1}$
m	apport de masse fluide (densité volumique lagrangienne d'apport de masse fluide)
m_e	apport de masse fluide réversible
m_p	apport de masse fluide irréversible
M	module de Biot
M	pente de la droite d'état critique du modèle Cam-Clay
$\underline{\underline{M}}$	représentant lagrangien du vecteur courant relatif de masse fluide $\underline{\underline{w}}$
M_d	masse de sédiments déposés par unité de surface (problème de la compaction)
$M^{fin}, M^{inf}, M^{lin}$	valeur du module de Biot identifiée respectivement dans le cadre d'une modélisation en transformation finie, en transformation infinitésimale, en poroélasticité linéaire
p	pression du fluide
p_c	contrainte de préconsolidation (paramètre d'écrouissage du modèle Cam-Clay)

p_i	coefficient de la loi d'élasticité non-linéaire proposée au chapitre 4
P	contrainte totale moyenne
\underline{P}	partie plastique de la transformation du squelette (en poroélastoplasticité)
P'	contrainte effective moyenne
$-q$	densité surfacique de chaleur reçue par un système matériel
q_0	valeur initiale de la contrainte verticale appliquée dans le problème de la consolidation
Q	déviateur des contraintes
$Q(\lambda)$	fonction identifiée expérimentalement dans un essai œdométrique drainé
Q°	taux de chaleur reçue par un système matériel
R	taux de chaleur créée à l'intérieur d'un système matériel (par unité de volume)
s	densité volumique eulérienne d'entropie du milieu poreux
\underline{s}	déviateur du tenseur des contraintes
s_m^α	densité massique d'entropie pour le milieu continu α
S	densité volumique lagrangienne d'entropie du milieu poreux
S	entropie d'un système matériel
S_t	frontière du domaine Ω_t
S^{Ti}, S^{Sj}, SP, S^W	parties de la frontière du domaine étudié où sont imposées respectivement la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte, la $j^{\text{ème}}$ composante du déplacement du squelette, la valeur de la pression du fluide, et la valeur du flux de masse fluide.
T	température
\underline{T}	densité surfacique d'efforts extérieurs sur une surface matérielle (squelette + fluide)
T_0	temps caractéristique de la consolidation d'une couche poreuse dans la théorie linéaire
\underline{T}^f	densité surfacique d'efforts extérieurs sur une surface matérielle de fluide
\underline{T}^s	densité surfacique d'efforts extérieurs sur une surface matérielle de squelette
$\underline{u}^f, \underline{u}^s$	vitesse eulérienne du milieu continu fluide, du squelette
\underline{u}^f	vitesse eulérienne relative du fluide par rapport au squelette
U	énergie bloquée dans le squelette par écrouissage
\underline{U}	déplacement d'une particule de squelette entre t et t' (chapitre 5)
\underline{V}	notation générique pour désigner un tenseur de rotation
\underline{w}	vecteur courant relatif de masse fluide
W^e	puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur un système matériel
$\underline{x}(x,y,z)$	coordonnées eulériennes d'une particule de squelette
$\underline{X}(X,Y,Z)$	coordonnées lagrangiennes d'une particule de squelette

ANNEXE 2

postulat de l'état local

et non-négativité de la dissipation intrinsèque

INTRODUCTION

L'étude de la formulation du comportement poroélastique et du comportement poroélastoplastique (chapitres 2 et 4) repose sur la condition de non-négativité de la dissipation intrinsèque φ_1 (voir chapitre 1, §III.2). L'étude de la thermodynamique des milieux continus ouverts fournit une inégalité qui généralise aux milieux poreux l'inégalité de Clausius-Duhem et concerne la somme des trois dissipations $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. On montre ensuite que la dissipation intrinsèque considérée isolément est nécessairement positive ou nulle. Compte tenu de l'importance de ce résultat pour les développements des chapitres 2 et 4, il nous a paru utile de rappeler ici les grandes lignes du raisonnement suivi (Coussy, 1991) : il s'appuie sur le postulat de l'état local.

I. POSTULAT DE L'ETAT LOCAL.

I.1. VARIABLES D'ETAT.

Un système homogène est complètement caractérisé à l'équilibre par un certain nombre de variables, dites variables d'état, définies à l'échelle du système envisagé. On entend ici par caractérisation d'un système la caractérisation de ses états d'énergie autre que cinétique.

L2. POSTULAT DE L'ETAT LOCAL POUR LES SYSTEMES HOMOGENES.

Le postulat de l'état local pour les systèmes homogènes stipule que l'état actuel d'un système homogène en évolution quelconque (pas nécessairement réversible et infiniment lente) peut être caractérisé par les mêmes variables qu'à l'équilibre et qu'il est indépendant des vitesses d'évolution de ces variables.

L3. POSTULAT DE L'ETAT LOCAL POUR LES MILIEUX CONTINUS.

Dans un milieu continu, la valeur des variables d'état n'est en général pas homogène : l'état du milieu est caractérisé par des champs de variables d'état, dont les valeurs caractérisent l'état des particules matérielles constituant le milieu, considérées comme des (sous-) systèmes homogènes. Le postulat de l'état local consiste alors à admettre que les systèmes élémentaires satisfont au postulat de l'état local pour les systèmes homogènes : il en résulte en particulier que l'état d'un sous-système élémentaire ne dépend pas de l'état des systèmes élémentaires voisins.

II. NON-NEGATIVITE DE LA DISSIPATION INTRINSEQUE.

On rappelle que l'inégalité de Clausius-Duhem généralisée aux milieux poreux s'écrit :

$$(1) \quad (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) d\Omega_t \geq 0$$

avec, d'après (94)₁, (95)₁, (101)₁, (92)₁, et (93)₁ :

$$(2) \quad \varphi_1 = \frac{1}{J} \left[\underline{\pi} : \frac{d^s \underline{\Delta}}{dt} + g_m^f \frac{d^s m}{dt} - \frac{d^s \Psi}{dt} - S \frac{d^s T}{dt} \right]$$

$$(3) \quad \varphi_2 = - \frac{q}{T} \cdot \underline{\text{grad}} T$$

$$(4) \quad \varphi_3 = \frac{w}{\rho^f} \cdot (- \underline{\text{grad}} p + \rho^f (\underline{F}^f - \gamma^f))$$

Le postulat de l'état local assure que l'énergie libre Ψ dépend seulement de la valeur des variables d'état du système matériel constitué par la particule de squelette et la particule de fluide contenues dans $d\Omega_t$; il en va de même de g_m^f , (puisque l'enthalpie libre du fluide est une fonction de la pression du fluide et de sa température) et l'on fera l'hypothèse qu'il en va de même du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\pi}$. Le groupement φ_1 ne dépend alors que des variables

d'état du système élémentaire contenu dans $d\Omega_t$ (éventuellement de leur dérivée particulaire en suivant le squelette), au nombre desquelles ne figurent ni le gradient de T ni le courant relatif de masse fluide \underline{w} . Puisque $\text{grad } T$ et \underline{w} peuvent prendre des valeurs quelconques, on en déduit la non-négativité de la dissipation intrinsèque ϕ_1 séparément de la non-négativité de la dissipation totale.

Ce travail est consacré à la formulation et à la résolution des problèmes de mécanique des milieux poreux dans la situation, courante dans le domaine pétrolier, et susceptible de se produire en génie civil et en géotechnique, dans laquelle le squelette subit une transformation géométrique finie. Comme pour les milieux continus monophasiques (ou "secs"), la prise en compte des transformations finies nécessite d'utiliser un formalisme plus complexe que celui employé dans le cadre familier des petites perturbations. Sur le plan théorique, la principale difficulté réside dans la formulation du comportement, abordée ici en s'appuyant sur l'étude de la thermodynamique du milieu.

On présente d'abord (chapitre 1) la modélisation mécanique des milieux poreux due à Biot, et le cadre thermodynamique mis en place par Coussy pour l'étude des milieux continus ouverts. On étudie dans le chapitre 2 la formulation du comportement poroélastique, en portant une attention particulière aux milieux dont le constituant solide est incompressible. Le chapitre 3 compare, pour l'étude de la consolidation et de la compaction unidimensionnelles en poroélasticité les résultats obtenus en transformation finie avec les résultats d'une modélisation en transformation infinitésimale. Le chapitre 4 est consacré à la formulation du comportement poroélastoplastique en transformation finie. On propose notamment un modèle qui généralise le modèle Cam-Clay aux milieux poreux en transformation finie. Le chapitre 5 présente les principes des méthodes de résolution numérique en poroélastoplasticité finie, et la résolution d'un problème académique simple.

En pratique, l'étude des problèmes abordés dans ce travail montre que la prise en compte complète des transformations finies permet d'éviter de commettre des erreurs significatives sans augmenter sensiblement la difficulté de la résolution des problèmes.

Some problems of practical interest in civil engineering as well as in petroleum engineering involve porous media whose skeleton undergo finite strains and finite rotations. As well as for monophasic continua, a formalism more complex than that used in the familiar framework of small perturbations is needed to take into account large changes of geometry. From a theoretical point of view, the main difficulty lies in the formulation of the behaviour : the approach proposed here consists in taking advantage of the study of the thermodynamics of the porous medium.

Chapter 1 is devoted to the mechanical modelling of porous media developed by Biot, and to the framework designed by Coussy to study the thermodynamics of open continua. The formulation of the constitutive equations of an elastic porous medium is discussed in chapter 2. Special attention is paid to the case of materials whose skeleton is made of an incompressible solid. Chapter 3 compares the results obtained at finite strains with the results provided by a formulation built in the framework of infinitesimal strains, for the problems of the consolidation of a porous layer and of the compaction of sediments in poroelasticity. Chapter 4 deals with the behaviour of poroelastoplastic materials at large strains. We notably propose a model that generalizes the Cam-Clay model to porous media at large strains. Chapter 5 presents the principles of numerical solution of the equations of finite poroelastoplasticity, and the solution of a simple academic problem.

It is pointed out that, for the problems discussed here, taking into account finite strains and rotations leads to results significantly different from those obtained in infinitesimal transformation, without giving rise to greater mathematical difficulties in the determination of the solution.