

# Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire et non associée

Céline Bouby

▶ **To cite this version:**

Céline Bouby. Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire et non associée. Mécanique [physics.med-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2006. Français. NNT : . tel-00109296

**HAL Id: tel-00109296**
**https://theses.hal.science/tel-00109296**

Submitted on 24 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**No. d'ordre : 3819**

**Université des Sciences et Technologies de Lille**
**Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)**

# THÈSE

*pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR**

***de***

**L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

**Discipline : Mécanique**

*présentée par*

Céline Bouby

# Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire et non associée

*Soutenue le 12 Juillet 2006*

*devant le jury composé de*

| | |
|---|---|
| DEBORDES O. | Professeur, Université d'Aix-Marseille II, Marseille, *Président* |
| NGUYEN QUOC S. | Directeur de recherche CNRS, LMS, Palaiseau, *Rapporteur* |
| WEICHERT D. | Professeur, RWTH, Aachen, *Rapporteur* |
| HJIAJ M. | Professeur, INSA de Rennes, Rennes, *Examinateur* |
| KONDO D. | Professeur, Université de Lille I, Lille, *Examinateur* |
| LABORDE P. | Professeur, Université de Toulouse III, Toulouse, *Examinateur* |
| VALLÉE C. | Professeur, Université de Poitiers, *Examinateur* |
| TRITSCH J.-B. | Maître de Conférences, Université de Lille I, Lille, *Co-Directeur de thèse* |
| DE SAXCE G. | Professeur, Université de Lille I, Lille, *Directeur de thèse* |

*C'est avec une certaine émotion que j'aborde l'ultime étape de la rédaction de ce mémoire que sont les remerciements. Avant toute chose, je désire remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer pendant ces années de thèse, et qui ont, de près ou de loin, participé à leur bon déroulement.*

*En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude à Géry de Saxcé, mon directeur de thèse, pour ses conseils, nos discussions passionnées et la confiance qu'il m'a accordée durant ces années. Je voudrais également adresser mes sincères remerciements à Jean-Benard Tritsch, qui a co-encadré cette thèse, pour ses encouragements et son soutien. Qu'ils trouvent tout deux en ces quelques lignes, le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Messieurs Quoc Son Nguyen et Dieter Weichert qui m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je souhaite ensuite manifester ma reconnaissance à Monsieur Olivier Debordes qui a accepté de présider ce jury ainsi qu'à Messieurs Mohammed Hjiaj, Djimédo Kondo, Patrick Laborde et Claude Vallée qui ont participé à l'évaluation de ce travail.*

*Je remercie chaleureusement Guy Caignaert, directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille, de m'avoir accueillie et offert des conditions de travail particulièrement appréciables. J'exprime ma reconnaissance au Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche qui a financé ce travail.*

*Je pense ensuite à mes collègues, avec dans un premier temps Stéphane et Cosmin que je remercie pour leur soutien, leurs encouragements, leur bonne humeur et leur amitié. Je me souviendrai ensuite toujours de l'ambiance unique qui règne autour de la grande table de la cafétéria, regroupant les "permanents", les thésards et le personnel administratif, avec de grandes discussions, aussi bien scientifiques que sans aucun rapport avec la mécanique... Pour tout cela et dans le désordre, merci à Laurent (mais aussi pour ton soutien constant et sans faille), Djim (mais aussi pour ta passion communicative pour la recherche), Marie-Christine, les deux Eric, Farzam, Nathalie, les deux Vincent, Anne-Marie, Olivier, Alexandre, Anne-Lise, Emilie, Fabien, Vanessa, Florent et tous les autres...*

*Je voudrais également avoir une pensée ici pour Claude Vallée et Danielle Fortuné, qui m'ont initiée à la mécanique et qui m'ont fait le plaisir d'être présents le jour de la soutenance.*

*Je ne terminerai pas ces remerciements sans me tourner vers ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée tout au long de mes études. Enfin, je pense à Mathieu qui m'a supportée (dans les deux sens du terme) pendant ces années de thèse ; un grand merci à toi, et bien plus encore...*

# Table des matières

**Introduction générale** **1**

**Chapitre I Adaptation élastoplastique : fondements théoriques et matériaux standards implicites** **5**

I.1 Comportement d'une structure élastoplastique sous chargements variables . . . . 6

I.1.1 Cadre de travail . . . . . 6

I.1.2 Réponse élastique . . . . . 7

I.1.3 Effondrement instantané par écoulement illimité . . . . . 7

I.1.4 Effondrement par accumulation de déformations plastiques . . . . . 8

I.1.5 Plasticité alternée et fatigue oligocyclique . . . . . 8

I.1.6 Adaptation par stabilisation des déformations plastiques . . . . . 9

I.2 Les théorèmes de base de la théorie de l'adaptation élastoplastique . . . . . 10

I.2.1 Cadre de travail classique en plasticité . . . . . 10

I.2.2 Théorème d'adaptation statique de Melan . . . . . 17

I.2.3 Coefficient de sécurité à l'adaptation . . . . . 19

I.2.4 Les théorèmes de bornes de Koiter . . . . . 19

I.3 Introduction de l'écrouissage dans les théories de l'adaptation élastoplastique . . 21
I.3.1 Concept de Matériaux Standards Généralisés . . . . . 22
I.3.2 Introduction de l'écrouissage dans le cadre des Matériaux Standards Généralisés . . . . . 23
I.4 Adaptation élastoplastique et lois non associées . . . . . 25
I.4.1 Présentation du concept de lois non associées . . . . . 25
I.4.2 Un exemple de loi non associée : la règle d'écrouissage cinématique non linéaire . . . . . 26
I.4.3 Traitement des lois non associées dans les études d'adaptation élastoplastique 28
I.5 Les Matériaux Standards Implicites . . . . . 28
I.5.1 Le concept de bipotentiel . . . . . 29
I.5.2 Le cas particulier des matériaux standards généralisés . . . . . 30
I.5.3 Un exemple de bipotentiel : le cas de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire . . . . . 30
I.6 Application du concept de matériaux standards implicites à l'adaptation élastoplastique . . . . . 33
I.6.1 Cadre de travail . . . . . 33
I.6.2 Formulation variationnelle pour le problème d'adaptation élastoplastique 35
I.6.3 Une extension des théorèmes de bornes aux matériaux standards implicites 37
I.7 Bilan du chapitre . . . . . 41

**Chapitre II Implémentation de la méthode pas à pas classique pour un état de traction constante et torsion alternée homogène 43**

II.1 Description du problème . . . . . 44
II.1.1 Cadre de travail . . . . . 44
II.1.2 Notations et hypothèses . . . . . 45
II.1.3 Relation incrémentale contraintes-déformations . . . . . 46
II.1.4 Premiers résultats numériques : courbes contraintes-déformations . . . . . 51
II.2 Méthode de détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique . . . . 54
II.2.1 Procédure proposée pour la détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique . . . . . 55
II.2.2 Résultats des simulations pour la charge d'adaptation . . . . . 56
II.2.3 Comparaison des résultats obtenus avec le modèle à écrouissage cinématique linéaire limité . . . . . 58
II.2.4 Evolution des contraintes internes en fonction du temps . . . . . 59
II.2.5 Influence de l'initialisation des contraintes internes . . . . . 62
II.3 Bilan du chapitre . . . . . 64

**Chapitre III Approche du bipotentiel pour un état de traction constante et torsion alternée homogène** **65**

III.1 Solution analytique par la méthode du bipotentiel . . . . . 66
III.1.1 Un bipotentiel pour la règle d'écrouissage cinématique non linéaire . . . . 66
III.1.2 Notations et hypothèses . . . . . 70
III.1.3 Calcul du facteur d'adaptation . . . . . 72
III.1.4 Démonstration de l'exactitude de la solution analytique . . . . . 75
III.1.5 Comparaison avec les résultats de la méthode pas à pas . . . . . 77
III.2 Matériaux standards implicites et programmation mathématique . . . . . 80
III.2.1 Adaptation élastoplastique et programmation mathématique . . . . . 80
III.2.2 Formulation du problème de borne statique . . . . . 81
III.2.3 Application au cas où les variables cinématiques sont connues . . . . . 83
III.2.4 Application au cas où les variables cinématiques sont inconnues . . . . . 85
III.3 Bilan du chapitre . . . . . 99

**Chapitre IV Adaptation élastoplastique pour les structures de type coques minces avec écrouissage** **101**

IV.1 Cadre de travail . . . . . 102
IV.1.1 Modélisation géométrique des coques minces . . . . . 102
IV.1.2 Modélisation mécanique des coques minces . . . . . 103
IV.2 Sur l'implémentation du modèle à deux surfaces . . . . . 106
IV.2.1 Formulation du modèle à deux surfaces . . . . . 107
IV.2.2 Formulations éléments finis dans le cas des coques minces . . . . . 109
IV.2.3 Résultats numériques pour une coque cylindrique soumise à une pression interne et à une charge annulaire . . . . . 114
IV.3 Ecrouissage cinématique linéaire limité par l'approche du bipotentiel . . . . . 121
IV.3.1 Formulation des problèmes de bornes cinématique et statique . . . . . 121
IV.3.2 Sur l'implémentation des conditions d'admissibilité cinématiques . . . . . 127
IV.3.3 Résultats numériques . . . . . 131
IV.4 Matériaux standards implicites pour les structures de type coques minces . . . . 134
IV.4.1 Construction d'une règle d'écrouissage cinématique non linéaire pour les coques minces . . . . . 135
IV.4.2 Construction d'un bipotentiel pour les coques minces avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire . . . . . 137
IV.4.3 Formulation des problèmes de bornes . . . . . 141
IV.4.4 Sur l'implémentation de ce modèle . . . . . 143
IV.5 Bilan du chapitre . . . . . 145

**Conclusion générale** **147**

**Bibliographie** **151**

**Annexes** **159**

**Annexe A Compléments sur les théorèmes de base de l'adaptation élastoplastique** **159**

A.1 Démonstration des théorèmes de bornes de Koiter . . . . . 159

A.1.1 Principe de Markov sur un cycle . . . . . 159

A.1.2 Principe de Hill sur un cycle . . . . . 160

A.1.3 Théorème de borne cinématique . . . . . 161

A.1.4 Théorème de borne statique . . . . . 163

A.2 Théorème de Halphen . . . . . 165

**Annexe B Quelques résultats d'analyse convexe** **167**

B.1 Ensembles et fonctions convexes . . . . . 167

B.2 Sous-différentiels . . . . . 168

B.3 Transformée de Legendre-Fenchel . . . . . 169

**Annexe C Compléments sur les discrétisations en éléments finis** **171**

C.1 Compléments sur la discrétisation en éléments statiquement admissibles . . . . . 171

C.1.1 Discrétisation du champ de contraintes . . . . . 171

C.1.2 Matrices de connexions statiques . . . . . 173

C.1.3 Matrices complémentaires pour le calcul de la solution élastique . . . . . 174

C.2 Compléments sur la discrétisation en éléments cinématiquement admissibles . . . 175

**Annexe D Calcul des fonctions de dissipation pour les coques minces** **177**

D.1 Calcul de la fonction de dissipation pour les coques minces en plasticité parfaite . 177

D.2 Calcul de la fonction de dissipation pour les coques minces avec la règle d'écrouissage cinématique linéaire limité . . . . . 180

# Introduction générale

Dans beaucoup de situations couramment rencontrées en ingénierie, les structures ou éléments de structures sont soumis à des chargements mécaniques et/ou thermiques cycliques -ou simplement variables dans le temps. Pour ces types de sollicitations, la charge limite, dont la détermination est basée sur un chargement proportionnel, n'assure pas la sauvegarde de la structure. En effet, les tests expérimentaux mettent en évidence que même en dessous de cette charge limite, les structures soumises à des chargements cycliques peuvent évoluer vers trois types d'états limites, dont deux conduisent à la ruine. Le premier d'entre eux, désigné par le terme *rochet*, conduit à la ruine de la structure par excès de déformations plastiques accumulées. La structure peut aussi périr par formation d'un cycle plastique stabilisé qui conduit par fatigue à faible nombre de cycles à la rupture. Ce phénomène est appelé *accommodation* ou *fatigue plastique*. Toutefois, la structure peut aussi endurer un grand nombre de cycles. Dans ce dernier cas, les déformations plastiques se stabilisent et le comportement cyclique redevient purement élastique avec apparition de contraintes résiduelles. On parle alors d'*adaptation élastoplastique*. Ce dernier comportement est à la base de phénomènes de fatigue à grand nombre de cycles. Ces différences de comportement ont motivé l'introduction de la théorie dite de l'adaptation élastoplastique qui consiste à déterminer le seuil en dessous duquel la structure s'adapte. L'intérêt majeur de la théorie de l'adaptation élastoplastique provient du fait que c'est une méthode directe, ne nécessitant pas une connaissance précise de l'histoire du chargement mais simplement le domaine de variations de celui-ci.

Les premiers développements de la théorie de l'adaptation, dus à Melan (1936, 1938) et Koiter (1960), sont restreints aux matériaux élastiques parfaitement plastiques. Cependant, pour les applications pratiques, l'utilisation du modèle des matériaux parfaitement plastiques n'est pas réaliste, en particulier dans le contexte actuel d'utilisation de métaux à haute résistance à la rupture. De fait, ceux-ci nécessitent la prise en compte de l'écrouissage. De nombreux travaux de recherche concernant l'introduction de l'écrouissage cinématique ou isotrope dans la théorie de l'adaptation ont ainsi été menés dans les années qui suivirent l'énoncé du théorème de Melan (voir, par exemple, les revues de Maier et al. (2000) ou Nguyen Quoc Son (2003)). La règle d'écrouissage cinématique linéaire de Prager est la plus simple d'utilisation de par sa linéarité. Malheureusement, elle ne permet pas de prédire la non-adaptation par déformations plastiques cumulées sous chargements variables et répétés (voir notamment Ponter (1975)). Ainsi, son utilisation est restreinte à certaines applications particulières pour lesquelles seul l'effondrement par plasticité alternée est à considérer. C'est l'une des raisons pour lesquelles l'écrouissage cinématique linéaire limité a été introduit par Weichert et Gross-Weege (1988). Ce modèle permet, au moyen d'une condition simplifiée à deux surfaces, de prendre également en compte la ruine par plasticité accumulée et de fournir ainsi un outil particulièrement intéressant pour l'adaptation. Néanmoins, l'écrouissage demeurant linéaire, le modèle de Weichert et Gross-Weege (1988) conduit à une idéalisation des cycles stabilisés observés expérimentalement. De nombreux expérimentateurs proposent donc de modéliser la boucle stabilisée par une règle d'écrouissage cinématique non linéaire, comme, par exemple la loi de Armstrong et Frederick (1966). Le caractère non associé de ce type de loi, constitue cependant un obstacle à son application directe dans le cadre de la théorie de l'adaptation.

Une approche alternative pour la modélisation des lois non associées est fournie par le cadre des matériaux standards implicites introduit par de Saxcé (1992). Par analogie avec le modèle des matériaux standards généralisés de Halphen et Nguyen Quoc Son (1975), ce modèle a été introduit de manière à restituer la loi de normalité sous la forme affaiblie d'une relation implicite (au sens du théorème des fonctions implicites) entre contraintes et vitesses de déformations généralisées. L'utilisation de ce modèle a permis de montrer que de nombreuses lois de dissipation non standards peuvent être simplement représentées par un pseudo-potentiel, appelé bipotentiel, dépendant des contraintes et vitesses de déformations généralisées. Les propriétés de ce bipotentiel sont basées sur une extension de l'inégalité de Fenchel (1949) et permettent, dans le cadre de l'analyse convexe, la généralisation du surpotentiel de Moreau (1966)[1]. Concernant plus particulièrement la théorie de l'adaptation élastoplastique, sous la condition d'existence d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps, une généralisation des théorèmes de bornes de Koiter aux matériaux standards implicites a été proposée par de Saxcé et al. (2000).

Ce contexte justifie notre étude qui concerne l'introduction de l'écrouissage dans l'étude de l'adaptation élastoplastique, et plus particulièrement lorsque celle-ci impose de se placer dans le cadre de la plasticité non associée. Nous nous intéresserons en particulier à l'examen d'exemples

[1]Des domaines divers tels que la mécanique du contact, la géomécanique et la plasticité des métaux sont autant d'exemples d'utilisation de modèles dits non associés et donc de cadres possibles d'application du concept de bipotentiel.

caractéristiques en adaptation élastoplastique par le modèle des matériaux standards implicites, notamment en terme d'implémentation numérique, que nous comparerons avec des méthodes classiques, telles que la méthode incrémentale, en vue d'une validation de cette théorie.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation du concept d'adaptation élastoplastique. Pour cela, les différents types de comportement d'une structure sous chargements variables sont présentés. Les théorèmes de base de la théorie de l'adaptation élastoplastique sont ensuite rappelés. Puis nous décrivons les aspects concernant l'introduction de l'écrouissage dans les théories de l'adaptation élastoplastique pour ensuite considérer plus spécifiquement les lois non associées. Le chapitre s'achève alors sur la présentation du concept de matériaux standards implicites et son application à l'adaptation élastoplastique.

Dans le deuxième chapitre, nous débutons l'étude d'un premier exemple portant sur un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane avec une règle d'écrouissage cinématique non linéaire. De manière à avoir un moyen de comparaison des résultats qui seront obtenus par l'approche du bipotentiel, l'implémentation de la méthode pas à pas classique est d'abord considérée. Une technique de détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique est alors développée ce qui permet une comparaison avec les résultats provenant du modèle avec écrouissage cinématique linéaire limité.

L'exemple d'un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane avec la règle d'écrouissage cinématique non linéaire est de nouveau considéré, mais du point de vue des matériaux standards implicites dans le troisième chapitre. Une solution théorique est ainsi déterminée par l'approche du bipotentiel, puis comparée aux résultats issus de la méthode pas à pas développée au deuxième chapitre. Dans un second temps, nous nous intéressons à l'utilisation de la programmation mathématique dans le cadre des matériaux standards implicites. La nature fortement couplée du problème de borne statique nécessite la détermination simultanée des champs de contraintes et de déformations généralisées et donc la résolution simultanée des problèmes de bornes statique et cinématique. Enfin, les résultats obtenus dans ce cas sont comparés à la solution théorique.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des structures de type coques minces pour lesquelles les études d'adaptation élastoplastique revêtent une grande importance. Les deux manières d'implémenter le problème de borne statique pour le modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988) sont étudiées et discutées. L'approche du bipotentiel est ensuite utilisée pour construire un problème de borne cinématique pour l'écrouissage cinématique linéaire. Les résultats numériques des approches statique et cinématique sont alors comparés. Finalement, l'introduction de l'écrouissage cinématique non linéaire pour l'adaptation des coques minces sera envisagée dans le cadre des matériaux standards implicites. Les problèmes de bornes statique et cinématique sont construits et leur mise en œuvre numérique commentée.

# Chapitre I

# Adaptation élastoplastique : fondements théoriques et matériaux standards implicites

Dans ce premier chapitre, on se propose de présenter le phénomène d'adaptation élastoplastique. Pour cela, les différentes réponses d'une structure élastoplastique soumise à un chargement variable seront examinées. Ensuite, les fondements de la théorie de l'adaptation seront rappelés, en particulier le théorème d'adaptation statique de Melan (1936) et les théorèmes de bornes de Koiter (1960). On s'intéressera alors aux premières introductions de la notion d'écrouissage dans les théories de l'adaptation, puisque cela sera notre principale préoccupation dans les chapitres suivants. Dans ce cadre, on évoquera le concept de modèle des matériaux standards généralisés qui a fourni un cadre mathématique rigoureux et favorisé l'extension des théorèmes classiques aux situations incluant l'écrouisssage en plasticité associée. Cependant, de nombreux modèles de comportement ne vérifiant pas la normalité de la loi d'écoulement à la surface seuil de plasticité, et donc ne rentrant pas dans le cadre des matériaux standards généralisés, sont nécessaires pour décrire le comportement de matériaux auxquels est confronté l'ingénieur. Des exemples typiques de ces modèles dits non associés, peuvent être trouvés en mécanique du contact, géomécanique et dans le domaine de la plasticité des métaux. La troisième partie de ce chapitre sera donc consacrée à l'introduction de ces modèles en théorie de l'adaptation élastoplastique. Nous évoquerons d'abord le concept de lois non associées et les traitements existants de ces lois dans la

théorie de l'adaptation. Puis nous exposerons alors l'alternative développée par de Saxcé (1992) en introduisant le concept de matériaux standards implicites et en formulant une extension possible des théorèmes de bornes de l'adaptation élastoplastique pour ces matériaux (de Saxcé et al. (2000), Bousshine et al. (2003)).

## I.1 Comportement d'une structure élastoplastique sous chargements variables

Pour introduire cette étude, il est d'abord nécessaire de préciser les conditions dans lesquelles se produit le phénomène d'adaptation élastoplastique. C'est dans l'étude du comportement de structures sous chargements variables que ce phénomène a été notamment mis en évidence, mais ce n'est pas le seul comportement qui peut se produire dans ce cas. Nous rappellerons donc dans un premier temps, après avoir situé le cadre du travail, les différents types de comportements observés pour ce type de chargements.

### I.1.1 Cadre de travail

Considérons un corps (ou une structure) constitué d'un matériau élastoplastique, occupant un domaine ouvert $\Omega$ (figure I.1) de $\mathbb{R}^3$, que l'on munit d'une base orthonormée directe $\{x_1, x_2, x_3\}$. On note $\partial\Omega$ la frontière de $\Omega$.

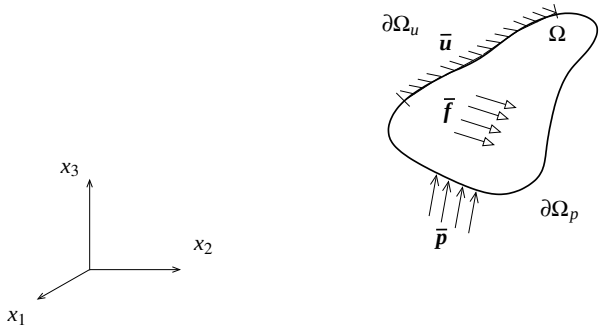



*Figure I.1 - Milieu continu 3D et sollicitations*

De façon générale, la structure est soumise à des sollicitations extérieures comprenant :

- des forces volumiques $\overline{\boldsymbol{f}}$, qui s'exercent dans $\Omega$,
- des forces surfaciques $\overline{\boldsymbol{p}}$, qui s'exercent sur une partie $\partial\Omega_p$ de $\partial\Omega$,
- des déplacements $\overline{\boldsymbol{u}}$, imposés sur une partie $\partial\Omega_u$ de $\partial\Omega$.

On suppose la partition suivante de la surface $\partial\Omega$ : $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_p \cap \partial\Omega_u = \emptyset$. Le champ de déplacements $\boldsymbol{u}$, le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dépendent du vecteur position $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et de la variable de temps $t \in [0, +\infty[$. Les sollicitations varient indépendamment les unes des autres mais dans des limites prescrites.

Dans toute la suite, on considère que la structure est soumise à un chargement variable noté $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$. Ce chargement peut représenter une seule des sollicitations énoncées ci-dessus ou toute

combinaison de ces sollicitations. Comme celles-ci varient dans des limites prescrites, le chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$ évolue au cours du temps mais reste à l'intérieur d'un domaine bien déterminé $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ dit domaine de chargement. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u$ le chargement limite (au sens de l'analyse limite[2]). Comme cela a été souligné par König (1987) à partir de résultats expérimentaux, une structure soumise à un tel chargement peut évoluer vers cinq types de réponses que nous allons développer dans les paragraphes suivants.

### I.1.2 Réponse élastique

Si l'intensité du chargement imposé reste suffisamment faible, au sens où la limite d'élasticité (ou le seuil de plasticité) n'est dépassée en aucun point de la structure, alors les seules déformations qui se développent dans la structure sont des déformations élastiques. Elles sont donc complètement réversibles, dérivant de déplacements eux-mêmes réversibles (figure I.2). Il n'y a dans ce cas particulier aucune altération de la structure, celle-ci reste fiable mais ses capacités de résistance ne sont pas exploitées au mieux.

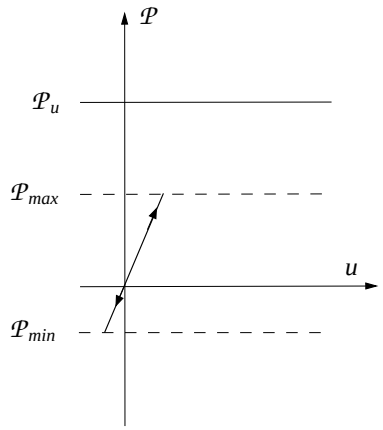



*Figure I.2 - Réponse purement élastique*

### I.1.3 Effondrement instantané par écoulement illimité

Le deuxième type de réponse est obtenu dans le cas où les sollicitations extérieures atteignent, de manière monotone, la valeur critique, communément appelée *charge limite* ou *chargement limite* et notée $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u$. Dans ce cas, la capacité de résistance de la structure est instantanément dépassée et un mécanisme se forme dans la structure, ce qui se traduit par le déclenchement d'un écoulement plastique illimité sous charge constante conduisant inévitablement à la ruine plastique de la structure (figure I.3). C'est par la théorie de l'analyse limite et donc sous ses hypothèses restrictives (matériau parfaitement plastique ou à écrouissage cinématique limité, petites perturbations, chargements proportionnels entre autres), que l'on étudie ce type de réponse afin de déterminer le chargement limite.

[2] $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u$ désigne donc le chargement proportionnel ultime que peut supporter la structure.

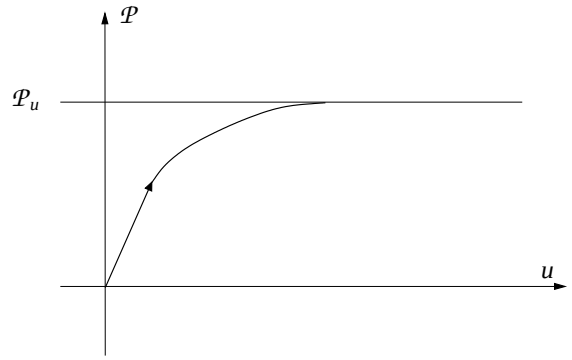



*Figure I.3 - Ruine plastique instantanée*

### I.1.4 Effondrement par accumulation de déformations plastiques

Lorsqu'on considère un chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ variable et répété dépassant la limite d'élasticité, la charge limite $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u$ n'est plus le seul paramètre caractérisant la fiabilité de la structure. En effet, même en se plaçant en dessous de celle-ci, on peut observer des comportements menant à la ruine de la structure. Par exemple, le phénomène connu sous le nom de *rochet* conduit à une ruine incrémentale de la structure. Dans ce cas, il existe au moins un point de la structure pour lequel les incréments de déformations plastiques, de même signe, s'accumulent au cours du chargement (figure I.4). Le comportement ne se stabilisant pas au cours du temps, l'énergie dissipée plastiquement augmente donc sans limite, ce qui conduit à des déformations structurelles excessives et ainsi à la ruine incrémentale.

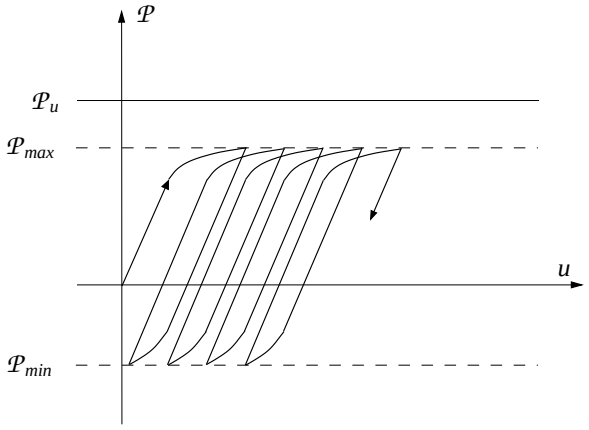



*Figure I.4 - Phénomène de rochet : ruine plastique incrémentale*

### I.1.5 Plasticité alternée et fatigue oligocyclique

Le quatrième type de réponse est un autre exemple de phénomène, appelé *accommodation* (ou encore *plasticité alternée*), conduisant à la ruine de la structure lorsque le chargement dépasse la limité d'élasticité mais n'atteint pas la charge limite. Mais dans ce cas, après un nombre de

cycles fini (généralement faible), les incréments de déformations plastiques sur un cycle s'annulent en certains points de la structure. La déformation totale reste donc petite, mais l'écoulement plastique ne cesse pas pour autant. La réponse finale se stabilise, mais en un cycle élastoplastique d'aire non nulle (figure I.5), ce qui implique une énergie dissipée plastiquement non bornée. Suivant la loi de Manson-Coffin (Manson (1953), Coffin (1953)), la structure va alors rompre par plasticité alternée, ce qui est désigné par le terme de fatigue à faible nombre de cycles (ou fatigue oligocyclique).

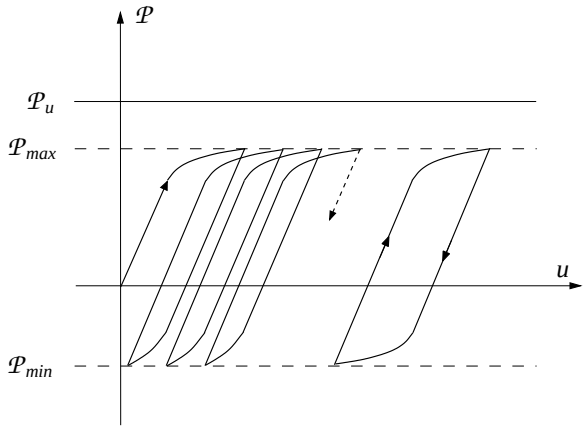



*Figure I.5 - Plasticité alternée : ruine par fatigue oligocyclique*

### I.1.6 Adaptation par stabilisation des déformations plastiques

Enfin, le dernier type de réponse, auquel nous nous intéresserons plus particulièrement dans la suite, est le phénomène d'*adaptation élastoplastique*. Outre les quatre premiers cas de figure, il se peut qu'après un certain nombre de cycles, les déformations plastiques se stabilisent (i.e. qu'elles cessent d'évoluer) dans la structure. Après une phase élastoplastique transitoire, la réponse de la structure devient alors purement élastique (figure I.6).

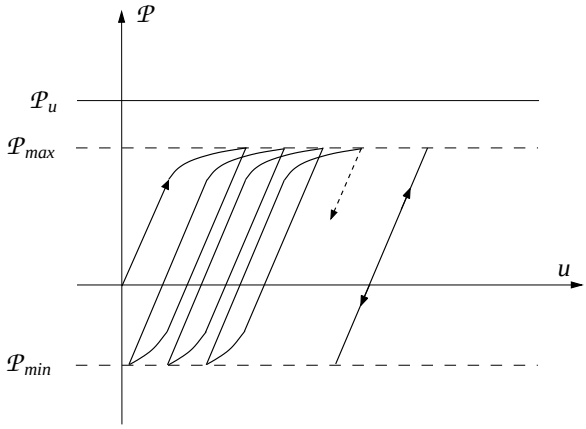



*Figure I.6 - Phénomène d'adaptation*

L'énergie dissipée pendant la phase plastique est alors bornée, ce qui assure une fiabilité plus longue de la structure. C'est dans ce type de cas de figure que la rupture de la structure intervient par amorçage puis propagation de fissures. On étudie alors la fatigue à grand nombre de cycles (ou fatigue polycyclique) pour connaître la durée de vie de la structure, par exemple avec le critère de Dang Van (Dang Van et Papadopoulos (1999)). Ce comportement semble donc être un bon compromis entre l'exploitation des capacités de résistance de la structure et la préservation la plus longue possible de sa fiabilité. C'est tout l'intérêt des nombreux travaux concernant la théorie de l'adaptation qui permet de déterminer le domaine de chargement pour lequel la structure s'adapte sans nécessiter la connaissance complète de l'histoire de chargement.

## I.2 Les théorèmes de base de la théorie de l'adaptation élastoplastique

Maintenant que le phénomène d'adaptation élastoplastique a été succinctement présenté, il apparaît comme particulièrement important pour la préservation de la structure de savoir déterminer quel niveau de chargement permet d'aboutir au phénomène d'adaptation. Dans cette section, on se propose de rappeler les premiers développements théoriques effectués sur ce sujet. Pour cela, nous rappellerons d'abord les hypothèses classiquement considérées en plasticité, puis nous évoquerons les premiers travaux dédiés à la détermination des domaines de charges pour lesquels la structure évolue vers un comportement adapté.

### I.2.1 Cadre de travail classique en plasticité

Rappelons tout d'abord que les champs mécaniques (champ de déplacements $\boldsymbol{u}$, champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$) ainsi que les sollicitations extérieures (introduites au paragraphe I.1.1) dépendent du vecteur position $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et de la variable de temps $t \in [0, +\infty[$. De manière à alléger l'écriture, pour un champ désigné par le symbole $\boldsymbol{v}$, on notera $\boldsymbol{v}$ pour $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$.

#### I.2.1.a Evolution quasi-statique

La structure étudiée est soumise, dans son état initial d'équilibre pris comme référence, à des efforts extérieurs nuls en tout point. A partir de cet état on engendre une évolution du système en lui imposant des forces surfaciques, des forces volumiques, des déplacements sur le contour, et des sollicitations thermiques, fonctions du temps. On suppose qu'au cours de cette évolution les variations des sollicitations données $\overline{\boldsymbol{f}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{u}}$ sont suffisamment lentes (en particulier, dans le cas de sollicitations thermiques, il est supposé que les taux de variation d'écart de température sont suffisamment faibles) pour que l'évolution puisse être considérée comme quasi-statique.

#### I.2.1.b Equations de compatibilité et d'équilibre

Dans tout le mémoire, on considère que les transformations sont infiniment petites. Le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est alors relié au champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ par les équations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \forall i, j = 1, 2, 3 \text{ dans } \Omega$$

ce qui peut s'écrire de manière équivalente, en utilisant les notations intrinsèques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}_s \boldsymbol{u} \text{ dans } \Omega$$

où $\mathbf{grad}_s \boldsymbol{u}$ est le gradient symétrique du déplacement. On définit alors la notion de champ de déplacement cinématiquement admissible :

**Champ de déplacements cinématiquement admissible :**
Un champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ sera dit *cinématiquement admissible* s'il satisfait les conditions aux limites cinématiques et s'il existe un champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ associé à $\boldsymbol{u}$ par les conditions de compatibilité[a] :

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u \tag{I.1a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}_s \boldsymbol{u} \text{ dans } \Omega \tag{I.1b}$$

[a] De manière équivalente, on peut définir un champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ comme *cinématiquement admissible* s'il est continu, continûment différentiable et s'il satisfait les conditions aux limites cinématiques.

On désignera, de manière similaire, un champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ comme *cinématiquement admissible à zéro*, s'il satisfait les équations de compatibilité (I.1b) et les conditions aux limites cinématiques nulles :

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_u \tag{I.2}$$

D'autre part, le champ de contraintes doit satisfaire les équations d'équilibre interne :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f}_i = 0 \text{ dans } \Omega$$

soit en notations intrinsèques :

$$\boldsymbol{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \overline{\boldsymbol{f}} = 0 \text{ dans } \Omega$$

Il doit aussi vérifier les conditions aux limites en efforts :

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{p}}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne le champ de normales extérieures unitaires à la surface $\partial\Omega_p$.

De la même manière que pour le champ de déplacements, on définit la notion de champ de contraintes *statiquement admissible* :

**Champ de contraintes statiquement admissible :**
Un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sera dit *statiquement admissible* s'il satisfait :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \overline{\boldsymbol{f}} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{p}} \text{ sur } \partial\Omega_p \end{cases} \tag{I.3}$$

On dira, de manière similaire, d'un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ qu'il est *statiquement admissible à zéro* (ou auto-équilibré), s'il vérifie les équations d'équilibre dans $\Omega$ pour des forces volumiques nulles et les conditions aux limites en efforts pour des forces surfaciques nulles sur $\partial\Omega_p$, i.e.

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_p \end{cases} \tag{I.4}$$

Les tenseurs du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant symétriques, ils sont définis sur deux espaces vectoriels de dimension 6 qui seront désignés respectivement par $S$ pour les contraintes et $E$ pour les déformations. Ces deux espaces sont mis en dualité par la forme bilinéaire suivante :

$$S \times E \to \mathbb{R} : (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \mapsto \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

représentant le travail par unité de volume, où « : » désigne le double produit contracté. Il est maintenant facile de montrer que pour tout champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ cinématiquement admissible et pour tout champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ statiquement admissible, le théorème du travail, obtenu à l'aide de la formule de Green, est vérifié :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\; d\Omega = \int_\Omega \overline{\boldsymbol{f}}.\boldsymbol{u}\; d\Omega + \int_{\partial\Omega_p} \overline{\boldsymbol{p}}.\boldsymbol{u}\; d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_u} \boldsymbol{p}.\overline{\boldsymbol{u}}\; d\partial\Omega \tag{I.5}$$

où « . » désigne le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^3$.

#### I.2.1.c Convexité du domaine élastique et loi d'écoulement normale

Après avoir rappelé ces hypothèses plutôt générales, intéressons nous maintenant aux hypothèses classiques de la théorie de la plasticité.

*Convexité du domaine élastique*
L'hypothèse essentielle est la convexité du domaine élastique. Au sens de la définition (B.1) donnée en annexe B, on suppose l'existence d'un sous-ensemble K de S, convexe, non vide et fermé, appelé *domaine élastique*, défini en chaque point de la structure $\Omega$ (figure I.7).

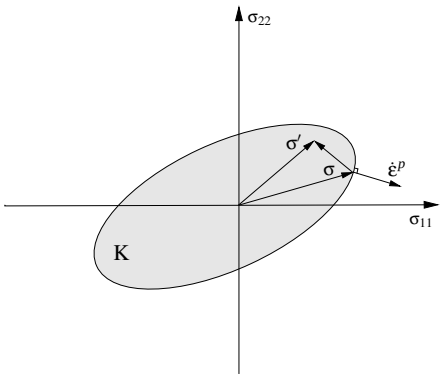



*Figure I.7 - Domaine élastique et loi de normalité*

*Partition de la déformation*
On suppose ensuite que la décomposition de la déformation est additive ce qui est en grande partie lié à l'hypothèse de petites transformations. Dans ce cas, la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ est divisée en deux parties, une partie élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et l'autre plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{I.6}$$

La partie élastique de la déformation est alors donnée par la loi de Hooke inverse faisant intervenir le tenseur $\boldsymbol{S}$ de souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\sigma}$$

*Règle d'écoulement normale*
La troisième hypothèse fondamentale est la normalité de la règle d'écoulement plastique. La terminologie de *plasticité associée* est alors utilisée pour désigner le comportement plastique dans lequel l'écoulement plastique satisfait la règle de normalité. En d'autres termes, le champ de vitesses de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ associé au champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ par la règle d'écoulement satisfait le *principe du travail maximum de Hill* (figure I.7). On a alors :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}' \in \mathrm{K},\ (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq 0 \tag{I.7}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ est dit plastiquement admissible, i.e., soit $\boldsymbol{\sigma}'$ est à l'intérieur de K, on dit alors que c'est un champ de contraintes sûr (puisqu'il n'implique aucun changement de l'état de déformations plastiques associé), soit $\boldsymbol{\sigma}'$ se trouve sur la frontière du domaine élastique, appelée alors surface seuil de plasticité. Ainsi, la dissipation est définie par :

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sup\{\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p;\ \boldsymbol{\sigma}' \in \mathrm{K}\} \tag{I.8}$$

Deux propriétés fondamentales résultent immédiatement de cette définition.

- Tout d'abord, on peut établir le *principe de dissipation maximum* de Hill (1948) :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}' \in \mathrm{K},\ D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{I.9}$$

Des considérations thermodynamiques conduisent à la non négativité de la dissipation[3]. Avec les conventions classiques de la mécanique des milieux continus, on a :

$$\forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\ D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq 0$$

En utilisant les inégalités (I.7) et (I.9), si $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est associé à $\boldsymbol{\sigma}$, il vient :

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{I.10}$$

Signalons aussi que la dissipation est une fonction convexe (comme enveloppe supérieure de fonctions linéaires en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), ce qui s'avérera particulièrement utile dans la suite.

[3]Il est équivalent d'imposer que le domaine élastique K contient zéro.

• Ensuite, si l'on désigne par $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ la surface frontière du domaine élastique $K$, appelée surface seuil de plasticité, les déformations plastiques s'expriment par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\zeta}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{I.11}$$

où $\dot{\zeta}$ est le *multiplicateur plastique* satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = 0 \text{ si } \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \text{ ou si } \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\sigma}) < 0\right) \\ \dot{\zeta} \geq 0 \text{ si } \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

La règle d'écoulement (I.11) est donc *associée* au critère, c'est pourquoi on parle de *plasticité associée*.

#### I.2.1.d La notion de contraintes résiduelles

Introduisons maintenant la notion de champ de contraintes résiduelles qui est fortement liée au phénomène d'adaptation élastoplastique, présenté dans la section I.1.6. En effet, c'est l'établissement progressif dans la structure d'un champ de contraintes résiduelles qui provoque essentiellement la cessation de l'évolution des déformations plastiques. Notons $(\overline{\boldsymbol{f}}^{\,0}, \overline{\boldsymbol{p}}^{\,0})$ le chargement initial, appelé *chargement de référence*. On suppose que ce chargement appartient à un domaine de chargement de référence noté $\boldsymbol{\mathcal{D}}_0$ et qu'il peut être décrit, par exemple, par une combinaison arbitraire de charges élémentaires variant entre des limites prescrites :

$$\overline{\boldsymbol{f}}^{\,0}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha(t)\overline{f}^{\,0}_{\alpha}(\boldsymbol{x}), \;\; \overline{\boldsymbol{p}}^{\,0}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha(t)\overline{p}^{\,0}_{\alpha}(\boldsymbol{x}), \;\; \text{avec } \underline{\mu}_{\,\alpha} \leq \mu_\alpha(t) \leq \overline{\mu}_\alpha$$

Désignons par $\lambda$ un nombre réel positif, appelé facteur de charge. Le chargement $(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{\boldsymbol{p}})$ appartient alors à un domaine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, homothétique de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_0$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \lambda\boldsymbol{\mathcal{D}}_0$ (figure I.8).

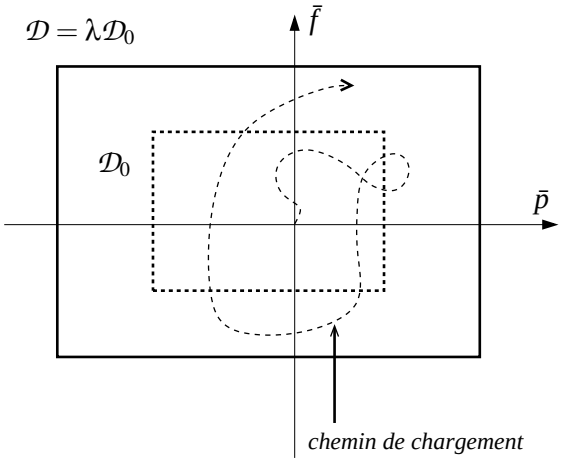



*Figure I.8 - Domaine de chargement*

Nous introduisons maintenant un milieu de référence fictif parfaitement élastique, noté $\Omega^e$, possédant les mêmes caractéristiques géométriques et élastiques que le milieu $\Omega$ et se comportant de manière purement élastique (figure I.9).

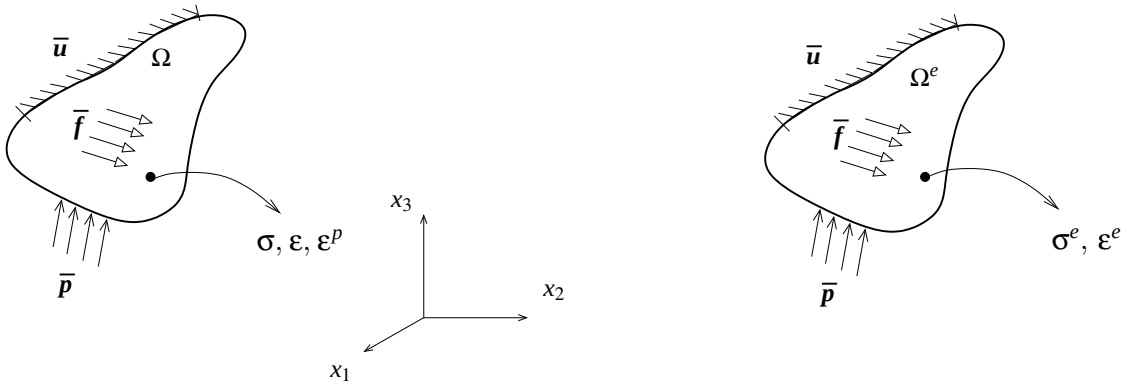



*Figure I.9 - Milieu réel $\Omega$ et milieu de référence $\Omega^e$*

Pour le chargement $(\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{\boldsymbol{p}})$ défini ci-dessus, les réponses élastiques de $\Omega^e$ seront désignées par $\boldsymbol{u}^e$ pour le champ de déplacements, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ pour le champ de déformations et $\boldsymbol{\sigma}^e$ pour le champ de contraintes. Comme $\Omega^e$ a un comportement parfaitement élastique, les champs de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^e$ sont reliés par la loi de Hooke inverse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\sigma}^e$$

où $\boldsymbol{S}$ est le tenseur de souplesse.

De plus, la réponse élastique étant linéaire, le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^e$ appartient à un domaine convexe polyèdral $\Sigma = \lambda\Sigma^0$, homothétique au domaine de référence $\Sigma^0$ associé au champ de contraintes élastiques de référence $\boldsymbol{\sigma}^{e0}$ et correspondant au domaine de chargement $\boldsymbol{\mathcal{D}}_0$. Il s'en suit que le champ défini par :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma^e} \tag{I.12}$$

appartient à l'ensemble des champs de contraintes résiduelles définis par[4] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div\rho} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\rho.n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_p \end{cases} \tag{I.13}$$

De plus, le champ défini par :

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

appartient à l'ensemble des champs de déformations résiduelles définis par :

$$\exists\, \boldsymbol{\nu} \text{ tel que } \begin{cases} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{grad}_s\boldsymbol{\nu} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \tag{I.14}$$

[4]Il est équivalent de dire que $\boldsymbol{\rho}$ est statiquement admissible à zéro ou encore, qu'il est auto-équilibré.

En appliquant la formule de Green à $\boldsymbol{\rho}$, statiquement admissible à zéro, et $\boldsymbol{\eta}$, cinématiquement admissible à zéro, on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{\eta} \, d\Omega = 0 \tag{I.15}$$

pour tout $\boldsymbol{\rho}$ vérifiant (I.13) et pour tout $\boldsymbol{\eta}$ vérifiant (I.14). L'égalité (I.15) sera désignée dans la suite par *principe des puissances virtuelles*. En outre, on peut remarquer que :

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{S} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^e) + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ce qui souligne que la déformation résiduelle $\boldsymbol{\eta}$ se décompose sous la forme :

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^e + \boldsymbol{\eta}^p \tag{I.16}$$

en posant :

$$\boldsymbol{\eta}^e = \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^e) = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\rho}$$
$$\boldsymbol{\eta}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

La déformation résiduelle comporte donc une composante $\boldsymbol{\eta}^e$ que l'on peut qualifier d'élastique puisque qu'elle est reliée à la contrainte résiduelle $\boldsymbol{\rho}$ par la loi de Hooke inverse. Soulignons que $\boldsymbol{\eta}$ est d'une grande importance, puisque c'est elle d'après (I.14) et non $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ qui est cinématiquement admissible à zéro.

#### I.2.1.e Matériau élastique parfaitement plastique

Après ces hypothèses classiques de la théorie de la plasticité, il importe de souligner que les travaux à l'origine de la théorie de l'adaptation, comportent une hypothèse supplémentaire : le matériau constituant le milieu $\Omega$ est élastique parfaitement plastique. En accord avec cette hypothèse, on ne prendra donc pas en compte les effets de l'écrouissage dans ce paragraphe et dans la suite de la section I.2. Les matériaux à comportement élastoplastique parfait ne sont pas en mesure de supporter une contrainte excédant leur limite d'élasticité (*contrainte seuil*) notée $\sigma_Y$. L'allure de la courbe contraintes-déformations correspondant à cette classe de matériaux est représentée sur la figure I.10 dans le cas d'un chargement uniaxial.

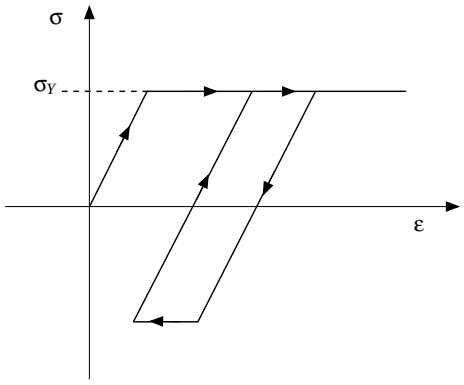



*Figure I.10 - Modèle élastique parfaitement plastique en chargement uniaxial*

Comme on peut l'observer sur la figure I.10, avec ce modèle, le déclenchement de la phase

de plasticité s'effectue lorsque la contrainte $\sigma$ atteint la contrainte seuil $\sigma_Y$. Le comportement plastique est alors caractérisé par une augmentation de la déformation plastique tant que la contrainte $\sigma$ reste au niveau de la contrainte seuil $\sigma_Y$.

### I.2.2 Théorème d'adaptation statique de Melan

On considère à présent une structure constituée de matériaux élastiques parfaitement plastiques, soumise à un chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}} : t \mapsto \boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$, combinaison de chargements variant indépendamment les uns des autres mais dans des limites prescrites, i.e. variant dans un domaine borné $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. On suppose que les transformations sont isothermes, i.e. que les sollicitations appliquées à la structure ne sont pas de type thermique : l'influence de la température sera négligée ; les chargements considérés seront donc purement mécaniques. Le théorème de Melan (1936) -ou théorème d'adaptation statique de Melan- peut être énoncé sous la forme suivante :

> **Théorème de Melan.**
> S'il existe un champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ indépendant du temps et tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un état de contrainte sûr (i.e. un état de contrainte strictement inclus dans le domaine élastique) en tout point de la structure et pour tout trajet de chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ inclus dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, alors la structure s'adapte.

**Preuve :**
Définissons tout d'abord la notion de champ de contraintes résiduelles admissible (au sens de Melan). On dira que le champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})$, correspondant au domaine de chargement $\Sigma$, est admissible si :

- $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ est indépendant du temps,
- $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles au sens de (I.13),
- $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ est plastiquement admissible, i.e. pour tout $\boldsymbol{\sigma}^e$ dans le convexe polyèdral $\Sigma(=\lambda\Sigma^0)$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^e + \overline{\boldsymbol{\rho}}$ appartient au domaine élastique K en tout point de $\Omega$ et à chaque instant.

De plus, si $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ appartient à l'intérieur de l'ensemble fermé K, en tout point de $\Omega$ et à chaque instant, on dira que $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles strictement admissible.

Supposons qu'il existe un champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ admissible et considérons l'énergie de déformation élastique fictive, associée à la différence de contraintes $(\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}})$ :

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}})\ d\Omega$$

La différence de contraintes $(\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}})$ est associée à la différence de déformations $(\boldsymbol{\eta}^e - \overline{\boldsymbol{\eta}}^e)$ par la loi de Hooke, et comme $\overline{\boldsymbol{\eta}}^e$ est indépendant du temps, la dérivée première de l'énergie par rapport au temps est égale à :

$$\dot{J}(t) = \int_\Omega (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\eta}}^e\ d\Omega$$

En utilisant la décomposition de la déformation $\boldsymbol{\eta}^e$ (I.16), il vient :

$$\dot{J}(t) = \int_\Omega (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\eta}}\ d\Omega - \int_\Omega (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\ d\Omega$$

Le champ de contraintes $(\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}})$ étant un champ de contraintes résiduelles et le champ de déformations $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ étant un champ de déformations résiduelles, l'application du principe des travaux virtuels (I.15) fournit :

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\eta}} \; d\Omega = 0$$

En s'appuyant sur la définition des champs de contraintes résiduelles (I.12) :

$$\boldsymbol{\rho} - \overline{\boldsymbol{\rho}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^e) - (\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^e) = \boldsymbol{\sigma} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

on obtient :

$$\dot{J}(t) = -\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \; d\Omega$$

En combinant ce dernier résultat avec l'expression (I.10) de la dissipation $D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$, il vient :

$$\dot{J}(t) = -\int_\Omega (D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \; d\Omega$$

Comme $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ est plastiquement admissible, le principe de dissipation maximum (I.9) implique que l'expression précédente de $\dot{J}$ ne peut être que négative dès que des déformations plastiques se développent dans la structure au cours du trajet de chargement. L'énergie de déformation élastique $J$ est donc décroissante. De plus, comme c'est une forme quadratique de la déformation, elle ne peut être que positive. On a donc :

$$0 \leq J(t) \leq J(0) \;\; \forall t \geq 0$$

A partir de ce point, la démonstration première de Melan (Melan (1936)) se base sur l'affirmation suivante : l'énergie $J$ étant décroissante et ne pouvant devenir négative, elle doit donc s'annuler au bout d'un certain temps T, ce qui entraîne l'annulation de $\dot{J}$ pour tout temps supérieur au temps T. Finalement, $\dot{J}$ résultant du produit entre le champ non nul $\boldsymbol{\sigma} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et le champ des vitesses de déformations $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, ce dernier s'annule nécessairement après le temps T en question. Ceci signifie donc que, dès que la structure s'adapte, les déformations plastiques cessent d'évoluer et la réponse à tout chargement supplémentaire redevient alors purement élastique.

Cependant, comme l'ont fait remarquer Debordes et Nayroles (1976), la fin de la preuve prise d'un point de vue strictement mathématique est mise en défaut. En effet, il suffit pour cela que l'énergie $J$ tende asymptotiquement vers une valeur constante positive, notée $c$ par exemple, au bout d'un certain temps T. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \mapsto \infty} \dot{J}(t) = 0 \;\; \text{et} \;\; \dot{J}(t) < 0 \;\; \forall t \geq 0 \\ \lim\limits_{t \mapsto \infty} J(t) = c \;\; \text{et} \;\; J(t) \geq 0 \;\; \forall t \geq 0 \\ \text{et donc} \; \lim\limits_{t \mapsto \infty} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0} \; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \end{array} \right.$$

qui aboutit à un état adapté de la structure, sans pour autant que l'énergie s'annule. Cette idée de démonstration néanmoins ingénieuse justifie l'introduction de la notion de coefficient de sécurité due à Koiter, que nous exposons maintenant.

### I.2.3 Coefficient de sécurité à l'adaptation

Le coefficient de sécurité introduit par Koiter (1960) permet de préciser de manière décisive que les déformations plastiques cessent d'évoluer après une durée déterminée, puisqu'il permet de borner l'énergie dissipée plastiquement durant le trajet de chargement. En remarquant que 0 et $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ appartiennent à l'intérieur du domaine élastique K, on peut supposer qu'il existe un scalaire $m > 1$ tel que l'état de contraintes $m\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ soit plastiquement admissible en tout point $\boldsymbol{x}$ de $\Omega$ et pour tout chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$ inclus dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. En utilisant alors le principe du travail maximum de Hill (I.7), il vient :

$$m(\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (m-1)\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (m\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq 0$$

Par conséquent, on a :

$$\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, d\Omega \, dt \leq \frac{m}{m-1} \int_0^t \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, d\Omega \, dt = -\frac{m}{m-1} \int_0^t \dot{J} \, dt$$

Soit :

$$\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, d\Omega \, dt \leq \frac{m}{m-1}(J(0) - J(t))$$

Comme $J(t)$ est non négatif par définition, il vient :

$$J(0) - J(t) \leq J(0)$$

ce qui mène finalement à :

$$\forall t \geq 0, \ \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, d\Omega \, dt \leq \frac{m}{m-1} J(0)$$

Le membre de droite étant indépendant du temps et de valeur finie, l'énergie dissipée plastiquement est bornée. Ce coefficient de sécurité à l'adaptation permet donc, non seulement d'affirmer que les déformations plastiques cessent d'évoluer dans la structure lorsque celle-ci s'est adaptée, mais également de borner l'énergie dissipée plastiquement avant d'atteindre cet état adapté.

### I.2.4 Les théorèmes de bornes de Koiter

Parallèlement à l'introduction du coefficient de sécurité à l'adaptation, Koiter (1960) a remarqué que l'analyse d'adaptation était une généralisation de l'analyse limite classique. Cette remarque suggère de suivre la même approche pour l'étude de l'adaptation que celle initialement proposée par Mandel (1966) dans le cadre de l'analyse limite. Dans cette approche initiale, les théorèmes de bornes statique et cinématique de l'analyse limite sont déduits des principes variationnels de Hill (1948) et Markov (1947). Suivant cette démarche, de Saxcé (1986, 1995) a établi et prouvé de nouveaux principes variationnels, pour l'analyse d'adaptation, correspondant à ceux de Markov et Hill. Nous ne rappellerons pas ces principes que l'on trouvera dans l'annexe A, mais donnerons simplement la formulation des théorèmes de bornes statique et cinématique qu'ils permettent de démontrer. Pour ce faire, on introduit, au préalable, la notion de cycle admissible de déformations plastiques. Au sens de Koiter (1960), un cycle de déformations plastiques, noté $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$, défini par

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \oint \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \tag{I.17}$$

est admissible si $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est compatible avec les incréments de déplacements $\Delta\boldsymbol{u}$, i.e. est cinématiquement admissible à zéro :

$$\begin{cases} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{grad}_s \Delta\boldsymbol{u} \text{ dans } \Omega \\ \Delta\boldsymbol{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \tag{I.18}$$

et s'il est plastiquement admissible :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, dt \, d\Omega > 0 \tag{I.19}$$

#### I.2.4.a Approche statique

Commençons par énoncer le théorème de borne statique de Koiter.

> **Théorème de borne statique de Koiter.**
> Si on peut trouver un champ de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ admissible et un champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ admissible tels que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $(\boldsymbol{\sigma}^e + \overline{\boldsymbol{\rho}})$ soient associés par une loi de normalité dans $\Omega$ à chaque instant pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$, le principe de Hill sur un cycle a une solution pour $\Sigma = \lambda^s \Sigma^0$ si et seulement si $\lambda^s \leq \lambda^a$. De plus si $\lambda^s < \lambda^a$, la structure s'adapte pour le facteur de charge $\lambda^s$.

La démonstration de ce théorème pourra être trouvée dans l'annexe A, paragraphe A.1.4. Ce théorème de borne statique de Koiter conduit à la résolution du problème de borne statique suivant pour la détermination du facteur de charge d'adaptation dit statique.

> **Problème de borne statique.**
> Le facteur de charge d'adaptation $\lambda^a$ est le plus grand des multiplicateurs $\lambda^s$ tels que $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ soit un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps et tels que $\boldsymbol{\sigma}^e + \overline{\boldsymbol{\rho}} = \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}}$ appartienne au domaine élastique dans $\Omega$ et à chaque instant.

L'avantage de cette dernière formulation est qu'elle aboutit à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes et qu'elle permet de déterminer un minorant du facteur de charge d'adaptation.

#### I.2.4.b Approche cinématique

Passons maintenant au théorème de borne cinématique de Koiter.

> **Théorème de borne cinématique de Koiter.**
> Si on peut trouver un champ de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ admissible et un champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ admissible tels que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $(\boldsymbol{\sigma}^e + \overline{\boldsymbol{\rho}})$ soient associés par une loi de normalité dans $\Omega$ à chaque instant pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$, alors $\lambda^a$ est la borne inférieure des facteurs cinématiques $\lambda^k$ : $\lambda^a \leq \lambda^k$

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra se reporter à l'annexe A, paragraphe A.1.3.

De la même manière que pour l'approche statique, le théorème de borne cinématique de Koiter conduit à la résolution du problème de borne cinématique suivant pour la détermination du facteur de charge d'adaptation dit cinématique.

**Problème de borne cinématique.**
Le facteur de charge d'adaptation $\lambda^a$ correspondant à un champ de déformations plastiques admissible au sens de Koiter est le plus petit des $\lambda^k$ définis par :

$$\lambda^k = \oint \int_\Omega D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\, d\Omega\, dt \tag{I.20}$$

avec la condition de normalisation (annexe A, paragraphe A.1.3) :

$$\oint \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\, d\Omega\, dt = 1 \tag{I.21}$$

Comme pour l'approche statique, le problème de borne cinématique se met sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Sa résolution permettra alors de déterminer un majorant du facteur de charge d'adaptation. C'est donc principalement aux problèmes de bornes statique et cinématique que le mécanicien va s'intéresser puisque son objectif est de déterminer pour quels domaines de chargements la structure s'adapte. En particulier, s'il parvient à résoudre les deux problèmes, il aura un encadrement (que l'on espère le plus resserré possible) du facteur de charge d'adaptation, voire dans certains cas, si les majorant et minorant sont confondus, le facteur de charge lui-même.

Avant de terminer cette partie sur les théorèmes de base de l'adaptation, on peut ajouter la contribution de Halphen (1978) qui a énoncé et démontré le théorème dual du théorème de Melan, constituant une approche cinématique :

**Théorème de Halphen.**
Si la structure ne s'adapte pas, le champ de vitesses de déformations plastiques tend vers un champ admissible.

La démonstration de ce théorème peut être retrouvée dans l'annexe A, paragraphe A.2.

## I.3 Introduction de l'écrouissage dans les théories de l'adaptation élastoplastique

Les années qui suivirent l'énoncé du théorème de Melan donnèrent lieu à de très nombreuses recherches, visant à analyser l'influence de l'écrouissage, qu'il soit cinématique, isotrope ou une combinaison des deux. L'introduction du concept de Matériaux Standards Généralisés (MSG) par Halphen et Nguyen Quoc Son (1975) a fourni un cadre mathématique rigoureux pour l'étude de l'adaptation élastoplastique et en particulier pour l'introduction de l'écrouissage dans l'étude de ce phénomène. C'est pourquoi nous rappelons ici le concept de MSG ainsi que les principaux

travaux reliés à celui-ci.

### I.3.1 Concept de Matériaux Standards Généralisés

Lorsqu'on étudie le comportement plastique, le concept de potentiel n'est plus applicable. En effet, la correspondance entre les champs de vitesses de déformations plastiques et les champs de contraintes n'est plus unique ; la règle d'écoulement définit une relation multivoque, puisque par exemple, tous les champs de contraintes appartenant au domaine élastique sont reliés à un champ de déformations plastiques nul. En d'autres termes, un élément de l'espace des champs de vitesses de déformations plastiques peut être relié à une infinité de champs de l'espace des contraintes.

Les premiers travaux sur ce sujet sont dus à Moreau (1966, 1968), qui se place dans le cadre de l'analyse convexe, et introduit le concept de surpotentiel (ou pseudo-potentiel). Soit $V$ l'espace des vitesses généralisées, notées $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$, incluant la vitesse de déformation plastique et des variables internes additionnelles caractérisant l'écrouissage, et $F$ l'espace des contraintes généralisées associées, dual de $V$. Moreau (1966) définit le surpotentiel comme une fonction $\varphi$, convexe, définie sur $V$ :

$$\varphi : V \to [-\infty, +\infty] : \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})$$

et semi-continue inférieurement (définition (B.5) de l'annexe B). La fonction polaire $\chi$ de $\varphi$, elle-même surpotentiel, est déterminée par le calcul de la transformée de Legendre-Fenchel (Fenchel (1949) et définition (B.8) de l'annexe B), ce qui a comme conséquence la relation suivante (appelée inégalité de Fenchel) :

$$\forall \dot{\boldsymbol{\kappa}}' \in V,\ \forall \boldsymbol{\pi}' \in F,\ \varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}') + \chi(\boldsymbol{\pi}') \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}'.\boldsymbol{\pi}' \tag{I.22}$$

Les couples $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ reliés par la loi de comportement choisie (la règle d'écoulement par exemple) seront qualifiés d'extrémaux au sens où l'égalité est vérifiée dans la relation précédente :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) + \chi(\boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi} \tag{I.23}$$

En prenant $\dot{\boldsymbol{\kappa}}' = \dot{\boldsymbol{\kappa}}$ dans l'inégalité (I.22) et en soustrayant membre à membre de (I.23), on peut déduire que :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \in F,\ \chi(\boldsymbol{\pi}') - \chi(\boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.(\boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi})$$

Cette dernière inégalité signifie que $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ est un sous-gradient (définition (B.6) de l'annexe B) de $\chi$ en $\boldsymbol{\pi}$. La loi de comportement multivoque ainsi que sa loi inverse peuvent donc s'écrire sous la forme d'une loi de normalité multivoque :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial\chi(\boldsymbol{\pi})\ ,\ \boldsymbol{\pi} \in \partial\varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) \tag{I.24}$$

où $\partial\chi(\boldsymbol{\pi})$ désigne le sous différentiel de $\chi$ en $\boldsymbol{\pi}$ et $\partial\varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}})$ le sous différentiel de $\varphi$ en $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$.

Les matériaux dont le comportement peut être représenté par de telles lois sont appelés *Matériaux Standards Généralisés* (Halphen et Nguyen Quoc Son (1975)).

**Exemple de matériau standard généralisé :**
La règle d'écoulement du modèle parfaitement plastique peut être formulée par l'inégalité suivante (principe de Hill (I.7)) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in K \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \ \forall \boldsymbol{\sigma}' \in K \end{cases} \tag{I.25}$$

En introduisant la fonction indicatrice $\Psi_K$ du domaine élastique $K$ :

$$\Psi_K(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \boldsymbol{\sigma} \in K \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est convexe et semi-continue inférieurement, comme fonction indicatrice d'un ensemble convexe et fermé, mais non différentiable par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$, on peut remplacer la relation (I.25) par l'inclusion différentielle :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial \Psi_K(\boldsymbol{\sigma}) \tag{I.26}$$

La transformée de Legendre-Fenchel fournit alors :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}} [\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \Psi_K(\boldsymbol{\sigma})] = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in K} [\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

et l'inversion de la loi d'écoulement est terminée :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \tag{I.27}$$

### I.3.2 Introduction de l'écrouissage dans le cadre des Matériaux Standards Généralisés

Le concept de matériaux standards généralisés étant rappelé, intéressons nous maintenant à l'introduction de l'écrouissage dans ce cadre.

#### I.3.2.a Ecrouissage cinématique linéaire illimité

En utilisant ce concept de matériaux standards généralisés, Ponter (1975) et Mandel (1976) étendirent le théorème de Melan au cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité (voir figure I.11). Pour ce modèle, le théorème de Melan prend la forme suivante :

> **Théorème de Melan avec écrouissage cinématique linéaire illimité.**
> S'il existe un champ de contraintes internes $\boldsymbol{X}$ indépendant du temps et un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}$ appartienne au domaine élastique $K$, i.e. :
>
> $$(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X}) \in K$$
>
> en tout point de la structure $\Omega$ et pour tout trajet de chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ inclus dans le domaine de chargement $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, alors la structure s'adapte.

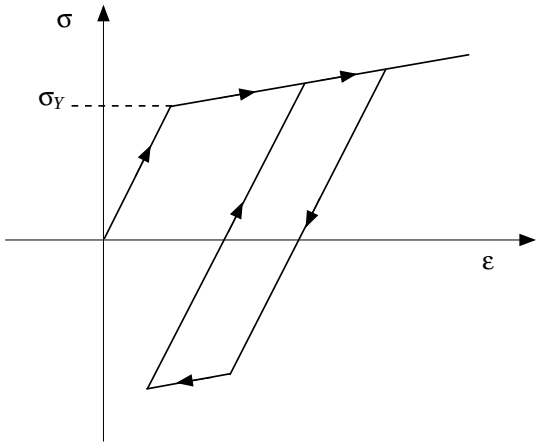



*Figure I.11 - Modèle d'écrouissage linéaire illimité en chargement uniaxial*

Mais Ponter (1975), Zarka et Casier (1981) et König (1987) constatèrent que l'hypothèse d'écrouissage illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non-adaptation par déformations plastiques cumulées et que seul l'effondrement de la structure par plasticité alternée peut être modélisé. C'est donc ce qui a motivé l'introduction de l'écrouissage cinématique linéaire limité.

#### I.3.2.b Ecrouissage cinématique linéaire limité

L'écrouissage cinématique linéaire limité a donc été pris en compte par Weichert et Gross-Weege (1988) pour pallier ce problème. En utilisant le modèle des matériaux standards généralisés, ces derniers proposèrent une limite d'évolution du paramètre d'écrouissage cinématique linéaire au moyen d'une condition simplifiée de deux surfaces : une surface d'écoulement et une surface limite au delà de laquelle la surface d'écoulement ne peut aller (figure I.12).

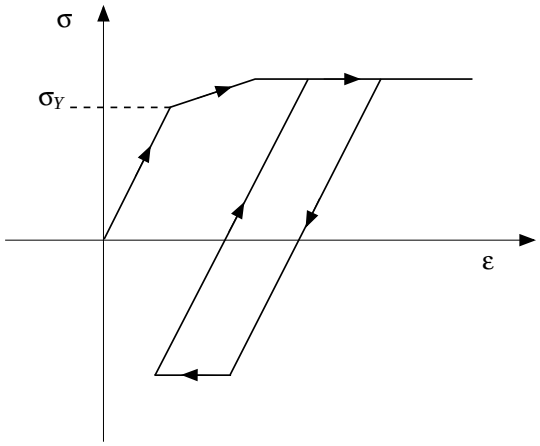



*Figure I.12 - Modèle d'écrouissage linéaire limité en chargement uniaxial*

Pour ce modèle de comportement, ils établirent une extension du théorème de Melan qui peut

être énoncée comme suit :

> **Théorème de Melan avec écrouissage cinématique linéaire limité.**
> S'il existe un champ de contraintes internes $\boldsymbol{X}$ indépendant du temps tel que celui-ci appartienne au domaine limitant les contraintes internes, noté $K_\infty$ :
>
> $$\boldsymbol{X} \in K_\infty$$
>
> et un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}$ appartienne au domaine élastique $K$, i.e. :
>
> $$(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X}) \in K$$
>
> en tout point de la structure $\Omega$ et pour tout trajet de chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ inclus dans le domaine de chargement $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, alors la structure s'adapte.

Le lecteur pourra aussi se reporter à Nguyen Quoc Son (2003) qui a récemment proposé une revue des extensions des théorèmes de l'adaptation à la plasticité avec écrouissage, en utilisant le cadre des matériaux standards généralisés, dans l'esprit de Koiter (1960).

## I.4 Adaptation élastoplastique et lois non associées

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, un nombre important de modèles élastoplastiques ne peuvent être qualifiés d'associés et donc ne rentrent pas dans le cadre des matériaux standards généralisés. Il s'avère nécessaire de développer une alternative aux MSG en théorie de l'adaptation élastoplastique. Dans cette section, après avoir introduit le concept de lois dites non associées et cité quelques exemples significatifs dont celui de l'écrouissage cinématique non linéaire sur lequel nous nous attarderons plus longuement, puisque nous l'utiliserons dans les chapitres suivants, nous rappellerons les principaux travaux sur ce type de lois en théorie de l'adaptation élastoplastique.

### I.4.1 Présentation du concept de lois non associées

On désigne par loi non associée une loi de comportement qui ne vérifie pas la loi de normalité. Autrement dit, l'écoulement ne se produit pas dans la direction normale à la surface seuil de plasticité (figure I.13). On ne peut donc plus écrire la loi d'écoulement sous la forme (I.11) donnée au paragraphe précédent. De manière plus précise, si l'on introduit la fonction indicatrice $\Psi_K$ du domaine élastique $K$ :

$$\Psi_K(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \boldsymbol{\sigma} \in K \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

on ne peut plus écrire la règle d'écoulement sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial \Psi_K(\boldsymbol{\sigma})$$

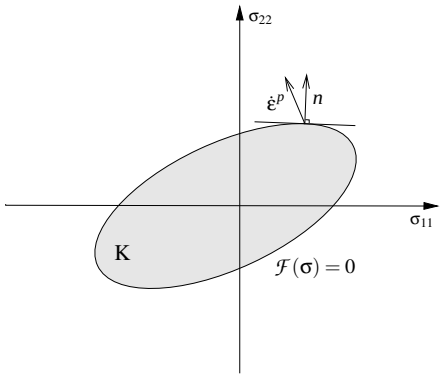



*Figure I.13 - Loi d'écoulement non associée*

La formulation classique de la loi de normalité dans ce cas est basée sur l'introduction d'un potentiel plastique $\boldsymbol{\mathcal{G}}$, différent du critère de plasticité $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, tel que l'on puisse écrire la loi d'écoulement sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\zeta}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{I.28}$$

où $\dot{\zeta}$ est le *multiplicateur plastique* satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = 0 \text{ si } \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \text{ ou si } \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\sigma}) < 0\right) \\ \dot{\zeta} \geq 0 \text{ si } \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

On peut noter que, contrairement au critère de plasticité $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, le potentiel plastique $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ peut être arbitrairement modifié par une constante additive.

A titre d'exemple de lois non associées, on peut citer, entre autres, en mécanique du contact, la loi de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb ; en géomécanique (sols, roches), le modèle de Drücker-Prager non associé et en plasticité des métaux les modèles avec règles d'écrouissage dites cinématiques non linéaires. C'est précisément ces dernières qui nous intéresserons dans la suite, ce qui justifie leur étude dans le paragraphe qui suit.

### I.4.2 Un exemple de loi non associée : la règle d'écrouissage cinématique non linéaire

Selon de nombreuses études expérimentales, une représentation plus réaliste de la plasticité cyclique des métaux est donnée par les règles d'écrouissage dites cinématiques non linéaires. Une de ces règles, simple et représentant bien le cycle stabilisé (figure I.14), a été proposée par Armstrong et Frederick (1966) et popularisée par Marquis (1979), Lemaitre et Chaboche (1990) (voir également Chaboche (1991)).

Pour cette loi de comportement, les variables additionnelles de vitesses de déformations, caractérisant l'écrouissage, sont $(-\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p})$, où $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\dot{p}$ sont respectivement les vitesses des variables

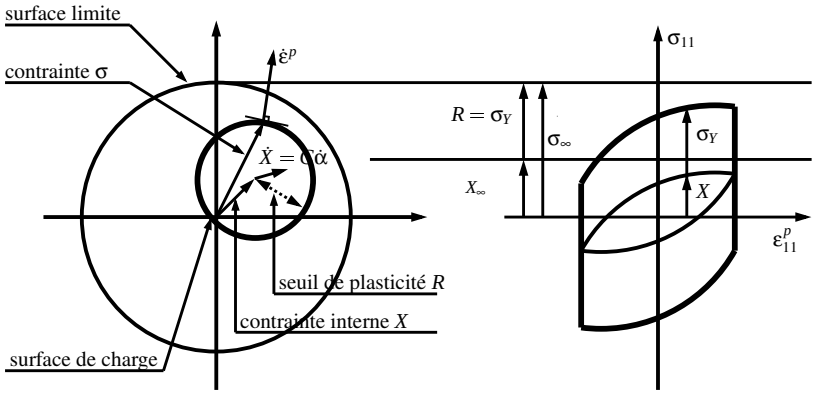



*Figure I.14 - Règle d'écrouissage cinématique non linéaire*

d'écrouissage cinématique et isotrope. Les variables associées correspondantes sont respectivement notées $(\boldsymbol{X}, R)$ et sont identifiées pour la première, aux contraintes internes et pour la seconde, au seuil d'écoulement courant.
De manière classique, le domaine élastique $K$ est défini par :

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) \text{ tel que } \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) - R \leq 0\} \tag{I.29}$$

où

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X} \| = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})'' : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})''}$$

et $(...)''$ signifie la partie déviatorique.

Comme le seuil d'écoulement $R > 0$, la règle d'écrouissage isotrope qu'il introduit implique :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{p} \tag{I.30}$$

où

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \|^* = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$

La règle d'écrouissage peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \tag{I.31}$$

sachant que les contraintes internes dépendent linéairement des variables cinématiques :

$$\boldsymbol{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha} \tag{I.32}$$

$C$ étant une constante.
Soit $\Psi_K$ la fonction indicatrice du domaine élastique $K$ :

$$\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) = \begin{cases} 0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \in K \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On constate ainsi que la forme de la règle d'écrouissage présentée conduit à une règle d'écoulement non normale puisque :

$$-\dot{\boldsymbol{\alpha}} \ \in \partial_{\boldsymbol{X}} \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

La présence du terme de rappel $\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$ dans la règle d'écrouissage cinématique non linéaire impose donc de se placer dans le cadre de la plasticité non associée. La théorie de l'adaptation élastoplastique développée dans les sections précédentes doit donc être modifiée pour son application à ce type de lois de comportement.

### I.4.3 Traitement des lois non associées dans les études d'adaptation élastoplastique

Les premiers travaux sur ce sujet sont dus à Maier (1969) et concernent la plasticité parfaite avec des fonctions d'écoulement linéaires par morceaux. Ils sont basés sur la construction d'un « domaine élastique réduit » et l'utilisation d'un potentiel plastique différent du critère de plasticité. Celui-ci reformule des théorèmes de bornes statique et cinématique, qui sont analogues aux théorèmes de Melan (1936) et Koiter (1960) en dehors du fait que le domaine élastique considéré est le domaine élastique réduit. C'est donc le concept de domaine élastique réduit qui sert de base pour trouver une condition suffisante d'adaptation. Ce concept a été réexaminé, dans un cadre plus général par Nayroles et Weichert (1993). Ils rebaptisent ce domaine « sanctuaire d'élasticité » et proposent une extension des théorèmes d'adaptation élastoplastique pour les matériaux à sanctuaire élastique, mais suggèrent en conclusion une confirmation expérimentale de ce concept de matériaux à sanctuaire élastique.

Plus récemment, cette extension des théorèmes d'adaptation élastoplastique aux lois non associées a été reformulée par Pycko et Maier (1995) pour les matériaux élastoplastiques. Deux exemples d'application sont donnés, l'un avec le modèle de Drücker-Prager (Drücker et Prager (1952)) et l'autre avec la règle d'écrouissage cinématique non linéaire, introduite par Armstrong et Frederick (1966). Pour cette dernière loi, en prenant l'exemple d'un tube mince sous traction constante et torsion alternée en état plan de contrainte, Pycko et Maier (1995) obtiennent, par simulation numérique, un encadrement de la solution analytique déterminée par Lemaitre et Chaboche (1990). Enfin, dans le même esprit, Corigliano et al. (1995) et Boulbibane et Weichert (1997) poursuivent dans cette voie, respectivement sur l'aspect dynamique et en mécanique des sols. Remarquons que toutes ces extensions, que nous venons de citer, sont fondées sur l'existence et la connaissance d'un potentiel plastique, construit de telle manière que l'on retrouve les lois de comportement par (I.28). Une alternative pour aborder ce comportement non associé se trouve dans l'introduction du concept des matériaux standards implicites (MSI) (de Saxcé (1992)).

## I.5 Les Matériaux Standards Implicites

Le concept de matériaux standards implicites, que nous allons rappeler dans ce paragraphe, a été introduit par analogie avec le concept des matériaux standards généralisés, et permet

de retrouver la règle de normalité, sous la forme d'une relation implicite. Un exemple de son application sera ensuite présenté.

### I.5.1 Le concept de bipotentiel

L'idée fondatrice de ce concept est la suivante : puisqu'on ne peut définir un potentiel de dissipation pour relier, de manière générale, les vitesses de déformations aux variables associées correspondantes, on définit un *bipotentiel de dissipation*, dépendant à la fois des vitesses de déformations et des variables associées. La manière de construire ce bipotentiel de dissipation permet alors de relier les vitesses de déformations aux variables associées, mais sous la forme d'une relation implicite. Indiquons maintenant la définition de ce bipotentiel.

Soient $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')$ les vitesses généralisées appartenant à $V$, l'espace des vitesses, incluant les vitesses des variables internes additionnelles $\dot{\boldsymbol{\kappa}}'$ (écrouissage, endommagement,...) et les variables associées correspondantes $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}')$ appartenant à $F$ l'espace des contraintes. Les espaces $V$ et $F$ sont munis de topologies localement convexes compatibles avec la dualité exprimée par la forme bilinéaire $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \mapsto \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$.

Un bipotentiel est une fonction $b$ de $V \times F$ dans $]-\infty, \infty]$, séparément convexe, satisfaisant l'inégalité fondamentale généralisant l'inégalité de Fenchel (Fenchel (1949)) :

$$\forall(\dot{\boldsymbol{\kappa}}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \in V \times F,\ b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}^*.\boldsymbol{\pi}^* \tag{I.33}$$

Les couples $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$, pour lesquels les variables sont reliées par la loi de comportement, sont qualifiés d'extrémaux au sens où l'égalité est atteinte dans la relation précédente :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi} \tag{I.34}$$

De (I.33) et (I.34), on déduit les inégalités suivantes qui doivent être satisfaites par les couples extrémaux :

$$\forall \boldsymbol{\pi}^* \in F, b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}^*) - b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.(\boldsymbol{\pi}^* - \boldsymbol{\pi}) \tag{I.35a}$$

$$\forall \dot{\boldsymbol{\kappa}}^* \in V, b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}^*, \boldsymbol{\pi}) - b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq (\dot{\boldsymbol{\kappa}}^* - \dot{\boldsymbol{\kappa}}).\boldsymbol{\pi} \tag{I.35b}$$

De manière concise, les couples extrémaux sont caractérisés par les inclusions différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\kappa}} &\in \partial_{\boldsymbol{\pi}} b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \\ \boldsymbol{\pi} &\in \partial_{\dot{\boldsymbol{\kappa}}} b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \end{aligned} \tag{I.36}$$

où $\partial_{\boldsymbol{\pi}}$ (respectivement $\partial_{\dot{\boldsymbol{\kappa}}}$) désigne le sous différentiel lorsqu'on dérive partiellement par rapport à $\boldsymbol{\pi}$ (respectivement $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$)[5]. Pour les lois de comportement élastoplastique, l'ensemble des couples extrémaux est équivalent aux états du matériau satisfaisant la règle d'écoulement. Physiquement, le bipotentiel tient lieu de puissance de dissipation plastique et ainsi est supposé positif. Il peut se voir comme une extension du concept de matériaux standards généralisés, il apparaît donc comme intéressant d'examiner comment se comporte le bipotentiel dans ce cas particulier.

[5]On aurait pu écrire : $\dot{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, .)(\boldsymbol{\pi})$ et $\boldsymbol{\pi} \in \partial b(., \boldsymbol{\pi})(\dot{\boldsymbol{\kappa}})$.

### I.5.2 Le cas particulier des matériaux standards généralisés

Replaçons nous dans le cas particulier des matériaux standards généralisés et conservons les notations qui ont été introduites au paragraphe I.3.1. Les surpotentiels $\varphi$ et $\chi$ vérifient l'inégalité de Fenchel :

$$\forall \dot{\boldsymbol{\kappa}}' \in V,\ \forall \boldsymbol{\pi}' \in F,\ \varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}') + \chi(\boldsymbol{\pi}') \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}'.\boldsymbol{\pi}'$$

On peut donc construire un bipotentiel avec la somme de $\varphi$ et $\chi$ :

$$\forall \dot{\boldsymbol{\kappa}} \in V,\ \forall \boldsymbol{\pi} \in F,\ b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) + \chi(\boldsymbol{\pi})$$

Le bipotentiel $b$ est donc un bipotentiel séparé dont les couples extrémaux vérifient les inclusions différentielles :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial\chi(\boldsymbol{\pi})\ ,\ \boldsymbol{\pi} \in \partial\varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}})$$

Les matériaux standards généralisés peuvent donc être vus comme une sous classe des matériaux standards implicites.

### I.5.3 Un exemple de bipotentiel : le cas de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire

Le concept de bipotentiel a apporté un nouvel éclairage sur certaines lois non associées connues : la loi de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb (de Saxcé (1992), de Saxcé et Feng (1998), Fortin et al. (2002)), le modèle de Drücker-Prager (Hjiaj et al. (2003), Bousshine et al. (2001, 2003)) et le modèle d'endommagement de Lemaitre (Bodovillé (1999)). Comme dans la suite, nous nous intéresserons à la règle d'écrouissage cinématique non linéaire, on se propose de rappeler la construction du bipotentiel dans ce cas particulier (de Saxcé (1992), Bodovillé et de Saxcé (2001), de Saxcé dans Maier et Weichert (2002)).

Reprenons les notations de la section I.4.2. Le cône polaire $K^*$ de $K$ est défini par :

$$K^* = \{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \text{ tels que } \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \dot{p} \leq 0\} \tag{I.37}$$

Dans ce cas, la loi d'écoulement plastique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \end{cases} \tag{I.38}$$

Introduisons les variables $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p})$, $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R)$ et la fonction :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) + \Psi_{K^*}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}\right) + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \tag{I.39}$$

**Proposition.**
La fonction $b$ définie par (I.39) est un bipotentiel.

**Preuve :**
La démonstration de cette proposition a été proposée dans de Saxcé (1992). Pour prouver que la fonction $b$ définie par (I.39) est un bipotentiel, il suffit de montrer que

$$\forall(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \in V \times F,\ b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

Cela revient à montrer que si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in K^*$

(ii) $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \in K$

(iii) $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$

alors on a :

$$\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p}$$

En effet, si au moins une des conditions (i), (ii) ou (iii) n'est pas vérifiée, le bipotentiel prend la valeur $+\infty$ et l'inégalité est trivialement satisfaite.

Dans le cas où les conditions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées, comme (i) est vérifiée, on peut écrire :

$$R\dot{p} \geq R\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Ensuite, comme (ii) est vérifiée, il vient :

$$R\dot{p} \geq R\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$R\dot{p} \geq \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X} \| \, \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \|^* \geq (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

soit :

$$R\dot{p} \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

En réinjectant l'égalité (iii) dans cette dernière inégalité, on aboutit à :

$$\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p}$$

ce qui montre que la fonction $b$ est bien un bipotentiel. Il reste maintenant à montrer que $b$ permet de formuler la règle d'écoulement.

**Proposition.**
Les couples extrémaux pour le bipotentiel (I.39) vérifient (I.38) et réciproquement.

**Preuve :**
Supposons que $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est un couple extrémal pour le bipotentiel, i.e.

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

Le bipotentiel doit donc prendre des valeurs finies, ce qui implique nécessairement que :

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in K^* \\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \in K \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \end{cases}$$

Il s'agit alors de montrer que :

$$(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R)$$

Comme $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est un couple extrémal pour le bipotentiel, on a aussi :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial b_{\boldsymbol{\pi}}(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$$

c'est-à-dire :

$$\forall \boldsymbol{\pi}',\ b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}') - b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.(\boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi})$$

Appliquons cette propriété au cas considéré :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}', R') \in K \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\dot{p}\,,$$
$$\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty} - \frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\dot{p} \geq (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - (R' - R)\,\dot{p}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}', R') \in K \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\dot{p}\,,$$
$$\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty} - \frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\dot{p} \geq \left[(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - (R' - R)\,\dot{p}$$

Comme

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\dot{p} \end{cases}$$

on obtient :

$$-(\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty}\dot{p} - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

D'où finalement :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}', R') \in K,\ \ 0 \geq \left[(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (R' - R)\dot{p}$$

ce qui est équivalent, d'après les définitions B.6 et B.7 de l'annexe B, à :

$$(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R)$$

Ainsi la première partie de la démonstration est achevée.

Réciproquement, montrons que si

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \end{cases}$$

alors le couple $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est extrémal pour le bipotentiel $b$. Comme $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \in K$, $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in K^*$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$ le bipotentiel prend une valeur finie :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

D'autre part, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$ ce qui fournit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - R\dot{p} + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

Tenant compte de $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R)$, le couple $((\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}), (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R))$ est extrémal pour les fonctions indicatrices de $K$ et $K^*$, polaires l'une de l'autre. La somme des deux premiers termes du second membre s'annule, ce qui achève la démonstration.

## I.6 Application du concept de matériaux standards implicites à l'adaptation élastoplastique

Le concept de matériaux standards implicites a été appliqué en premier lieu à l'analyse limite. En particulier, une généralisation des théorèmes de l'analyse limite a été proposée dans de Saxcé et Bousshine (1998). Considérant, comme Koiter (1960) l'avait déjà signalé, que l'analyse limite est un cas particulier de la théorie de l'adaptation élastoplastique, une extension des théorèmes de bornes de Koiter (1960) pour les matériaux standards implicites a pu être envisagée et présentée dans de Saxcé et al. (2000) et dans Bousshine et al. (2003). Dans cette section, nous rappellerons les principales étapes conduisant à cette extension.

### I.6.1 Cadre de travail

Soit $\Omega$ un corps solide constitué de matériaux élastoplastiques admettant un bipotentiel :

$$\forall(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}') \in V,\ \forall(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}') \in F,\ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'), (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}')] \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\pi}'.\dot{\boldsymbol{\kappa}}' \tag{I.40}$$

Comme précédemment, il est soumis à un chargement variable, variant entre des limites prescrites. On suppose qu'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps et qu'il caractérise la solution du problème d'adaptation élastoplastique. Cette hypothèse cruciale pour la suite n'a pas été rigoureusement prouvée pour la classe des matériaux standards implicites, mais nous l'adoptons comme hypothèse de travail, avant de la vérifier sur un exemple détaillé dans le chapitre suivant. Elle nous paraît raisonnable, d'autant qu'elle a déjà été utilisée avec succès par Chaaba et al. (1998) pour une règle non associée admettant un bipotentiel en mécanique des sols.

Pour une réponse en contraintes donnée $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}(\boldsymbol{x},t)$, sous un chargement variable répété (variant entre des limites prescrites), définie pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\Omega$ et pour tout $t$ positif ou nul, avec des conditions initiales sur le champ de contraintes résiduelles, $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{\rho}_0(\boldsymbol{x})$, et sur les variables associées $\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{\pi}'_0(\boldsymbol{x})$, l'évolution élastoplastique de la structure est définie par les champs $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t)$, $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{x},t)$, $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\boldsymbol{x},t)$, $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \dot{\boldsymbol{\kappa}}'(\boldsymbol{x},t)$, pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\Omega$ et pour tout $t$ positif ou nul. Après une phase de transition, les champs $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\pi}'$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}'$ tendent vers des champs asymptotiques périodiques. Si l'adaptation a lieu, les déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et les autres variables internes $\boldsymbol{\kappa}'$ se stabilisent et la dissipation totale est bornée. Ainsi, on suppose que la solution asymptotique est caractérisée par les champs indépendants du temps $\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{\pi}}'(\boldsymbol{x})$. Ceci permet de définir des champs de contraintes généralisées admissibles :

**Champs de contraintes généralisées admissibles :**
On dira que $\overline{\boldsymbol{\pi}} = (\overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')$ est un champ de contraintes généralisées admissible s'il vérifie les conditions suivantes :
- $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles,
- $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}'$ sont indépendants du temps et plastiquement admissibles quand on ajoute la réponse en contrainte $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}$ dans le corps élastique fictif :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \forall t, (\boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{x},t) + \overline{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}), \overline{\boldsymbol{\pi}}'(\boldsymbol{x})) = (\lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}(\boldsymbol{x},t) + \overline{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}), \overline{\boldsymbol{\pi}}'(\boldsymbol{x})) \in K \qquad \text{(I.41)}$$

Suivant le concept de « mécanisme d'accumulation plastique » introduit par Polizzotto et al. (Polizzotto et al. (1991)), on définit ensuite des champs de vitesses généralisées admissibles :

**Champs de vitesses généralisées admissibles :**
On dira que $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')$ est un champ de vitesses généralisées admissible s'il vérifie les conditions suivantes :
- l'incrément de déformation plastique sur un cycle

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \oint \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\boldsymbol{x},t)dt \qquad \text{(I.42)}$$

  est cinématiquement admissible,
- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est plastiquement admissible :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \, d\Omega > 0 \qquad \text{(I.43)}$$

- l'incrément des variables internes sur un cycle

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}' = \oint \dot{\boldsymbol{\kappa}}'(\boldsymbol{x},t)dt \qquad \text{(I.44)}$$

  est nul.

Cette définition généralise aux modèles avec des variables internes le concept de « cycle de déformation plastique cinématiquement admissible » de Koiter (Koiter (1960)).

A l'aide de ces notions de champs de contraintes et vitesses généralisées admissibles, on peut alors construire une formulation variationnelle pour le problème d'adaptation élastoplastique dans le cadre des matériaux standards implicites.

### I.6.2 Formulation variationnelle pour le problème d'adaptation élastoplastique

Le problème d'adaptation élastoplastique peut être caractérisé par le problème aux limites suivant :

Trouver le couple $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(P)\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\kappa}} \text{ est un champ de vitesses généralisées admissible} \\ \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ est un champ de contraintes généralisées admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \text{ et } (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\sigma}^e, \overline{\boldsymbol{\pi}}') \text{ sont reliés par la loi de normalité implicite dans } \Omega \end{cases}$$

Avec la définition des notions de champs de contraintes et de déformations généralisées admissibles, la construction d'une formulation variationnelle du problème d'adaptation élastoplastique $(P)$ est possible par l'introduction de la bifonctionnelle suivante :

$$\beta_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}', \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}', \lambda) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'), (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')] - \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \tag{I.45}$$

Comme le bipotentiel $b$ satisfait l'inégalité (I.40) généralisant celle de Fenchel, pour des champs $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^* = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*)$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}^* = (\overline{\boldsymbol{\rho}}^*, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^*)$ admissibles on a :

$$b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*), (\overline{\boldsymbol{\rho}}^* + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^*)] \geq (\overline{\boldsymbol{\rho}}^* + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} + \overline{\boldsymbol{\pi}}'^* . \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*$$

Il vient alors, pour tout couple de champs $(\overline{\boldsymbol{\pi}}^*, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^*)$ admissibles :

$$\int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*), (\overline{\boldsymbol{\rho}}^* + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^*)] \right\} dt \; d\Omega \geq \int_\Omega \oint \left\{ (\overline{\boldsymbol{\rho}}^* + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} + \overline{\boldsymbol{\pi}}'^* . \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^* \right\} dt \; d\Omega$$

De plus, en appliquant le principe des puissances virtuelles (I.15), on obtient :

$$\int_\Omega \oint \overline{\boldsymbol{\rho}}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} dt \; d\Omega = \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\rho}}^* : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*} d\Omega = 0$$

Enfin, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^*$ étant admissible, cela implique :

$$\int_\Omega \oint \overline{\boldsymbol{\pi}}'^* . \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^* dt \; d\Omega = \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\pi}}'^* : \Delta \boldsymbol{\kappa}'^* d\Omega = 0$$

Il en résulte, pour tout couple de champs $(\overline{\boldsymbol{\pi}}^*, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^*)$ admissibles :

$$\beta_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*, \overline{\boldsymbol{\rho}}^*, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^*, \lambda) \geq 0 \tag{I.46}$$

#### I.6.2.a Facteur de charge d'adaptation élastoplastique

En particulier, pour la solution exacte du problème aux valeurs limites $(P)$, la loi de comportement est exactement satisfaite en tout point de $\Omega$ et à chaque instant. D'après (I.34), en notant $\lambda^a$ le facteur de charge d'adaptation, on a donc :

$$b((\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'), (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')) = (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \overline{\boldsymbol{\pi}}' . \dot{\boldsymbol{\kappa}}' \tag{I.47}$$

ce qui implique pour la bifonctionnelle :

$$\beta_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}', \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}', \lambda^a) = 0 \tag{I.48}$$

Cette dernière relation permet alors de définir le facteur de charge d'adaptation $\lambda^a$ comme suit :

$$\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt \, d\Omega = \lambda^a \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \, d\Omega \tag{I.49}$$

ou encore, en combinant avec la condition de normalisation classique (I.21) :

$$\lambda^a = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt \, d\Omega \tag{I.50}$$

**Propriété :**
Si une solution $\lambda^a$ de (I.50) est obtenue, alors pour tout $\lambda < \lambda^a$, la structure s'adapte.
En effet, si $\lambda^a$ est solution de (I.50), alors $(\lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}') \in K$. Comme $0 \in K$ et $K$ est convexe, pour tout $0 \leq \alpha < 1$ :

$$\alpha(\lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}') \in K$$

ce qui signifie, pour tout $\lambda = \alpha \lambda^a$ :

$$\left( \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \frac{\lambda}{\lambda^a} \overline{\boldsymbol{\rho}}, \frac{\lambda}{\lambda^a} \overline{\boldsymbol{\pi}}' \right) \in \overset{o}{K}$$

où $\overset{o}{K}$ désigne l'intérieur de $K$, correspondant à un état de contrainte sans écoulement plastique.

#### I.6.2.b Cas particulier des matériaux standards généralisés

Replaçons nous dans le cadre des matériaux standards généralisés. Si la loi de comportement est associée, elle peut être représentée par un bipotentiel séparé :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) + \Psi_K(\boldsymbol{\pi})$$

où $\Psi_K$ est la fonction indicatrice du domaine élastique $K$, i.e. $\Psi_K(\boldsymbol{\pi}) = 0$ si $\boldsymbol{\pi} \in K$ et $\Psi_K(\boldsymbol{\pi}) = +\infty$ sinon, tandis que $\varphi$ est la fonction d'appui de $K$ :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) = \sup_{\boldsymbol{\pi} \in K} (\boldsymbol{\pi} . \dot{\boldsymbol{\kappa}})$$

qui n'est autre que la fonction de dissipation.

Pour le cas classique du modèle élastique parfaitement plastique, les variables internes additionnelles $\boldsymbol{\kappa}'$ n'ont pas à être considérées. Alors la bifonctionnelle se sépare en deux parties :

$$\beta_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \lambda) = \phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \lambda) + \Pi_s(\overline{\boldsymbol{\rho}}, \lambda) \tag{I.51}$$

où

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \lambda) = \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) dt \; d\Omega - \lambda \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega \tag{I.52}$$

est la fonctionnelle de Markov sur un cycle (équation (A.1) de l'annexe A) et

$$\Pi_s(\overline{\boldsymbol{\rho}}, \lambda) = \int_\Omega \oint \Psi_K(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}}) dt \; d\Omega \tag{I.53}$$

est la fonctionnelle de Hill sur un cycle (équation (A.2) de l'annexe A).

### I.6.3 Une extension des théorèmes de bornes aux matériaux standards implicites

On peut constater avec le cas particulier des matériaux standards généralisés que la formulation variationnelle introduite semble correspondre à une généralisation aux matériaux standards implicites des principes utilisés pour démontrer les théorèmes de bornes de Koiter (1960). De ce point de vue, notre objectif va donc être d'établir des théorèmes de bornes similaires à ceux de Koiter pour les matériaux standards implicites.

#### I.6.3.a Problème cinématique

Par analogie avec (I.49), le facteur de charge cinématique, noté $\lambda^k$, associé à un champ de vitesses généralisées admissible $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)$ est défini par la relation suivante :

$$\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)] \right\} dt \; d\Omega = \lambda^k \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega \tag{I.54}$$

Considérons la bifonctionnelle :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k, \lambda^k) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)] \right\} dt \; d\Omega - \lambda^k \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt \; d\Omega$$

La proposition suivante peut alors être prouvée :

**Proposition.**
Si un couple $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ est solution du problème $(P)$, avec $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}$, et si la structure ne s'adapte pas pour la charge limite $\lambda^a$, alors $\lambda^a$ est la borne inférieure des facteurs cinématiques : $\lambda^k \geq \lambda^a$.

De plus, le problème suivant :

$$\inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k \\ \text{admissible}}} \beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k, \lambda^k) \tag{I.55}$$

n'a pas de solution quand $\lambda^k > \lambda^a$.

**Preuve :**
Tout d'abord, montrons que $\lambda^k \geq \lambda^a$. Comme la solution exacte $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ du problème aux limites $(P)$ satisfait l'égalité (I.47) et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k$ est admissible, en appliquant l'inégalité (I.35b), on obtient :

$$b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0},\overline{\boldsymbol{\pi}}'),(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk},\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)]-b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0},\overline{\boldsymbol{\pi}}'),(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p},\dot{\boldsymbol{\kappa}}')]\geq(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0}):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p})+\overline{\boldsymbol{\pi}}'.(\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k-\dot{\boldsymbol{\kappa}}')$$

Remarquons que chaque terme du membre de gauche a une valeur finie puisque $\overline{\boldsymbol{\pi}}$, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k$ sont admissibles et les couples $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ et $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k)$ sont extrémaux pour le bipotentiel.
En intégrant sur le domaine $\Omega$ et le cycle de chargement, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega\oint\left\{b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0},\overline{\boldsymbol{\pi}}'),(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk},\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)]-b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0},\overline{\boldsymbol{\pi}}'),(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p},\dot{\boldsymbol{\kappa}}')]\right\}dt\;d\Omega\geq\\ \int_\Omega\oint\left\{(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0}):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p})+\overline{\boldsymbol{\pi}}'.(\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k-\dot{\boldsymbol{\kappa}}')\right\}dt\;d\Omega\end{aligned}\tag{I.56}$$

En appliquant le principe des puissances virtuelles (I.15), on obtient :

$$\int_\Omega\oint\overline{\boldsymbol{\rho}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}dt\;d\Omega=0$$
$$\int_\Omega\oint\overline{\boldsymbol{\rho}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}dt\;d\Omega=0$$

En utilisant ensuite le fait que $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k$ sont admissibles, on a :

$$\int_\Omega\oint\overline{\boldsymbol{\pi}}'.\dot{\boldsymbol{\kappa}}'dt\;d\Omega=0$$
$$\int_\Omega\oint\overline{\boldsymbol{\pi}}'.\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^kdt\;d\Omega=0$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes de l'intégrale dans l'inégalité (I.56) :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k,\lambda^a)\geq\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}},\lambda^a)\tag{I.57}$$

où

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k,\lambda^a)=\int_\Omega\oint\left\{b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}+\lambda^a\boldsymbol{\sigma}^{e0},\overline{\boldsymbol{\pi}}'),(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk},\dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)]\right\}dt\;d\Omega-\lambda^a\int_\Omega\oint\boldsymbol{\sigma}^{e0}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}dt\;d\Omega$$

Pour la solution exacte $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ du problème aux limites $(P)$, l'égalité (I.47) est vérifiée, ce qui entraîne :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}},\lambda^a)=0$$

L'inégalité (I.57) devient alors :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k,\lambda^a)\geq 0$$

D'après la définition (I.54) du facteur de charge cinématique $\lambda^k$, on obtient alors :

$$(\lambda^k-\lambda^a)\int_\Omega\oint(\boldsymbol{\sigma}^{e0}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk})dt\;d\Omega\geq 0$$

Soit, en appliquant la condition de normalisation (I.21) : $\lambda^k \geq \lambda^a$.

Maintenant, montrons que le problème suivant :

$$\inf_{\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k\ \text{admissible}}\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}},\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k,\lambda^k)$$

n'a pas de solution pour $\lambda^k > \lambda^a$.

Pour cela, on s'intéresse à :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k, \lambda^k) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt \; d\Omega - \lambda^k \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega$$

Comme $\lambda^k > \lambda^a$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ est admissible, il vient l'inégalité suivante :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k, \lambda^k) = (\lambda^a - \lambda^k) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega < 0$$

Maintenant, en choisissant une suite minimisante (Ekeland et Temam (1974)) $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_n = n\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ où $n$ est un nombre naturel, on obtient l'inégalité suivante[6] :

$$\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}_n, \lambda^k) = \beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, n\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \lambda^k) = n\beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \lambda^k) < 0$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \beta_s^a(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}_n, \lambda^k) = -\infty$. Par conséquent, le problème n'est pas coercif (Ekeland et Temam (1974)). Il s'en suit alors que le problème (I.55) n'a pas de solution pour $\lambda^k > \lambda^a$.

**Remarque :**
Avec la condition de normalisation (I.21), le problème de borne cinématique suivant peut être établi (voir Bodovillé (2002)) :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k}{\text{Inf}} \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)] \right\} dt \; d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{I.58}$$

### I.6.3.b Problème statique

Soit $\overline{\boldsymbol{\pi}}^s = (\overline{\boldsymbol{\rho}}^s, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s)$ un champ de contraintes généralisées admissible correspondant au facteur de charge statique $\lambda^s$. Alors, en ce qui concerne le problème statique, la proposition suivante peut être prouvée :

**Proposition.**
Si un couple $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$ est solution du problème $(P)$, avec $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}$, et la condition de normalisation satisfaite alors le facteur $\lambda^a$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{c} \lambda^a - \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt \; d\Omega \geq \\ \lambda^s - \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt \; d\Omega \end{array} \tag{I.59}$$

[6] Le bipotentiel, représentant la puissance de dissipation est supposé être une fonction homogène d'ordre 1 par rapport à la vitesse généralisée $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ :

$$\forall \alpha > 0, \;\; b(\boldsymbol{\pi}, \alpha\dot{\boldsymbol{\kappa}}) = \alpha b(\boldsymbol{\pi}, \dot{\boldsymbol{\kappa}})$$

**Preuve :**
Considérons les champs de contraintes asymptotiques $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}^s$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^s = \overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}$$

Avec la convexité du bipotentiel et en appliquant l'inégalité (I.35a), on a :

$$b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] - b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \geq (\boldsymbol{\sigma}^s - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (\overline{\boldsymbol{\pi}}'^s - \overline{\boldsymbol{\pi}}').\dot{\boldsymbol{\kappa}}'$$

où chaque terme du membre de gauche a une valeur finie car $\overline{\boldsymbol{\pi}}^s$, $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ sont admissibles et reliés par la loi de normalité implicite. En intégrant sur le volume $\Omega$ et sur l'intervalle de temps, on a :

$$\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] - b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt\ d\Omega \geq$$
$$\int_\Omega \oint (\overline{\boldsymbol{\rho}}^s - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\ d\Omega + (\lambda^s - \lambda^a) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\ d\Omega + \int_\Omega \oint (\overline{\boldsymbol{\pi}}'^s - \overline{\boldsymbol{\pi}}').\dot{\boldsymbol{\kappa}}'\ dt\ d\Omega$$

Le principe de puissances virtuelles (I.15) fournit alors :

$$\int_\Omega \oint (\overline{\boldsymbol{\rho}}^s - \overline{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\ d\Omega = 0 \tag{I.60}$$

De plus, l'admissibilité de $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ donne :

$$\int_\Omega \oint (\overline{\boldsymbol{\pi}}'^s - \overline{\boldsymbol{\pi}}').\dot{\boldsymbol{\kappa}}' dt\ d\Omega = 0$$

Finalement, avec la condition de normalisation (I.21), on obtient bien (I.59).

**Remarque :**
On peut ainsi établir un problème de borne statique :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\pi}}^s, \lambda^s}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda^s - \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt\ d\Omega \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\pi}}^s \text{ admissible} \\ \lambda^s \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}}^s \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{I.61}$$

### I.6.3.c Cas particulier des matériaux standards généralisés

En reprenant le cas particulier des matériaux standards généralisés pour l'exemple du modèle élastique parfaitement plastique, on rappelle que :

$$\beta_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \lambda) = \phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \lambda) + \Pi_s(\overline{\boldsymbol{\rho}}, \lambda)$$

Le problème de borne cinématique (I.58) dégénère alors en :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}) dt\ d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt\ d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En ce qui concerne le problème de borne statique (I.61), on a :

$$\lambda^a - \int_\Omega \oint \Psi_K(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}) dt \; d\Omega \geq \lambda^s - \int_\Omega \oint \Psi_K(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}) dt \; d\Omega$$

Or, pour des champs de contraintes admissibles, la fonction indicatrice de $K$ s'annule, on obtient donc :

$$\lambda^a \geq \lambda^s$$

Le problème de borne statique dégénère alors en :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\rho}}^s, \lambda^s}{\text{Sup}} \quad \{\lambda^s\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\rho}}^s \text{ admissible} \\ \lambda^s \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\rho}}^s \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour ce cas particulier, on retrouve alors les expressions classiques des théorèmes de bornes de Koiter (1960) de la théorie de l'adaptation élastoplastique. Les problèmes de bornes proposés pour les matériaux standards implicites représentent donc bien une extension des problèmes de bornes classiques, mais sous une forme affaiblie puisque les champs statiques et cinématiques doivent être déterminés simultanément. En d'autres termes, les problèmes cinématiques et statiques pour les matériaux standards implicites ne peuvent être résolus indépendamment l'un de l'autre mais sont couplés.

## I.7 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le phénomène de l'adaptation élastoplastique. Pour cela, nous avons détaillé les différents phénomènes qui sont susceptibles d'apparaître dans une structure soumise à des chargements variables, ce qui permet de constater rapidement l'intérêt de la théorie de l'adaptation élastoplastique. Dans un second temps, nous avons rappelé les fondements mathématiques de cette théorie. Ensuite, dans la perspective des développements dans les chapitres suivants, nous avons rappelé les premières introductions de l'écrouissage dans l'étude de ce phénomène, tout en restant dans le cadre de la plasticité associée.
Du point de vue de la modélisation en mécanique, les lois non associées jouent un rôle important. Il est donc apparu comme nécessaire de proposer des extensions de la théorie de l'adaptation élastoplastique à ces lois. Après avoir effectué une revue non exhaustive des résultats existants dans la littérature, nous avons présenté le concept de matériaux standards implicites qui permet une généralisation de celui des matériaux standards généralisés aux matériaux dont le comportement est non associé. Dans ce cadre, bien que la généralisation du théorème de Melan (1936) n'ait pu être prouvée jusqu'à maintenant, les théorèmes de bornes ont pu être étendus.
Le contexte des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse étant défini, nous pouvons en préciser les objectifs : l'étude d'exemples caractéristiques en adaptation élastoplastique par le modèle des matériaux standards implicites, notamment en terme d'implémentation numérique, comparée avec des méthodes classiques, telles que la méthode incrémentale dont les coûts de calculs sont prohibitifs, en vue d'une validation de cette théorie.

# Chapitre II

# Implémentation de la méthode pas à pas classique pour un état de traction constante et torsion alternée homogène

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les fondements de l'adaptation élastoplastique. Nous avons constaté que pour certaines lois, le formalisme des matériaux standards généralisés n'était plus applicable ; c'est la raison pour laquelle le modèle des matériaux standards implicites a été introduit. Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement à l'une de ces lois : la loi d'écrouissage cinématique non linéaire (Armstrong et Frederick (1966)). Avec le modèle des matériaux standards implicites et pour cette loi, une solution analytique pour la charge d'adaptation élastoplastique a déjà été proposée dans le cas de l'étude d'un tube mince sous traction constante et torsion alternée en état plan de contrainte dans de Saxcé et al. (2000). La solution alors obtenue est exactement la même que celle proposée par Lemaitre et Chaboche (1990). Ce résultat semble prometteur mais la cohérence de la solution n'est pas complètement prouvée. Nous avons donc décidé de considérer un nouvel exemple, l'étude d'un état de traction constante et torsion alternée homogène, mais en déformation plane. Pour avoir un moyen de comparer les résultats qui seront obtenus au chapitre III par l'approche du bipotentiel, dans ce chapitre, nous débuterons l'étude de cet exemple par l'implémentation de la méthode pas à pas

classique. Après avoir décrit le problème étudié et établit les relations contraintes-déformations pour l'implémentation, nous développerons une technique de détection de la charge d'adaptation numérique. Les résultats obtenus seront comparés aux résultats provenant du modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988). Enfin, de manière à mieux cerner les différences de comportement de la structure (adaptation ou non-adaptation), nous nous intéresserons à l'évolution des contraintes internes en fonction du temps ainsi qu'aux effets de leur initialisation.

## II.1 Description du problème

Dans cette première section, on se propose de préciser le cadre de notre étude. Après avoir rappelé les notations utilisées, on construit les relations contraintes-déformations incrémentales qui nous permettront d'obtenir les courbes représentant l'évolution des déformations totales ou plastiques en fonction des contraintes.

### II.1.1 Cadre de travail

Dans ce chapitre, pour simplifier l'analyse, considérons un état de traction constante et torsion alternée homogène, générant une contrainte de traction $\sigma_{11}$ et un cisaillement $\sigma_{12}$, en déformation plane[7].

Comme auparavant, notons respectivement $\boldsymbol{X}$ et $R$ le tenseur des contraintes internes et le seuil d'écoulement plastique. On définit le domaine élastique en utilisant le critère de Von-Mises :

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) \text{ tel que } \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) - R \leq 0\}$$

où

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})'' : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})''}$$

et $(...)''$ désigne la partie déviatorique. Comme le seuil d'écoulement plastique $R$ est strictement positif, la règle d'écrouissage isotrope s'écrit :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{p} \tag{II.1}$$

où

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$

Prenons comme hypothèse supplémentaire que le comportement du matériau considéré est régi par la règle d'écrouissage cinématique non linéaire. Bien que les équations décrivant ce modèle aient été rappelées dans le chapitre précédent, nous préférons les citer de nouveau ici dans un souci de confort de lecture. Les vitesses des variables d'écrouissage cinématique $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et isotrope $\dot{p}$

[7] Notons que cet état de traction constante et torsion alternée homogène peut être obtenu expérimentalement en étudiant un tube mince sous traction constante et torsion alternée. La condition de déformation plane peut être assurée par application d'une pression interne et d'une pression externe judicieusement choisies. On se rapprocherait alors des phénomènes mis en jeu lors de la mise en forme par extrusion.

sont reliées aux vitesses de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et au tenseur des contraintes internes $\boldsymbol{X}$ par la relation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \tag{II.2}$$

dite règle d'écrouissage cinématique non linéaire où $X_\infty = \sigma_\infty - \sigma_Y$. De plus, les contraintes internes sont reliées linéairement aux variables cinématiques par :

$$\boldsymbol{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}$$

### II.1.2 Notations et hypothèses

En considérant seulement le cycle stabilisé, c'est-à-dire en ne considérant pas les phénomènes d'adoucissement et de durcissement, le seuil d'écoulement plastique $R$ est supposé constant et égal à la valeur $\sigma_Y$ : $R = \sigma_Y$. Comme on se place en état plan de déformation, le tenseur des contraintes se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes internes $\boldsymbol{X}$ est réduit à sa partie déviatorique :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & -(X_{11}+X_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la partie déviatorique de $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})$ a pour matrice de composantes :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})'' = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11}-\sigma_{33}}{3} - X_{11} & \sigma_{12} - X_{12} & 0 \\ \sigma_{12} - X_{12} & -\frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{3} + X_{11} + X_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_{33}-\sigma_{11}}{3} - X_{33} \end{bmatrix}$$

La contrainte équivalente $\sigma_{eq}$ s'écrit alors :

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{X}) = (\sigma_{11}-X_{11})^2+(\sigma_{33}-X_{33})^2+3(\sigma_{12}-X_{12})^2+2(X_{11}+X_{33})^2-(\sigma_{11}+X_{33})(\sigma_{33}+X_{11})$$

et ainsi la surface limite d'élasticité (qui est en même temps la surface d'écoulement ou encore surface de charge) peut s'écrire comme suit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{X}) = (\sigma_{11}-X_{11})^2+(\sigma_{33}-X_{33})^2+3(\sigma_{12}-X_{12})^2+2(X_{11}+X_{33})^2-(\sigma_{11}+X_{33})(\sigma_{33}+X_{11})-\sigma_Y^2$$

Le critère d'écoulement plastique devient alors :

$$(\sigma_{11}-X_{11})^2+(\sigma_{33}-X_{33})^2+3(\sigma_{12}-X_{12})^2+2(X_{11}+X_{33})^2-(\sigma_{11}+X_{33})(\sigma_{33}+X_{11}) \leq \sigma_Y^2 \tag{II.3}$$

En raison de l'incompressibilité des déformations plastiques, le tenseur des incréments de déformations plastiques est :

$$\boldsymbol{d\varepsilon}^p = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^p & d\varepsilon_{12}^p & 0 \\ d\varepsilon_{12}^p & -(d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{33}^p) & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_{33}^p \end{bmatrix}$$

Le tenseur des incréments des variables internes cinématiques a la même forme, soit :

$$\boldsymbol{d\alpha} = \begin{bmatrix} d\alpha_{11} & d\alpha_{12} & 0 \\ d\alpha_{12} & -(d\alpha_{11} + d\alpha_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & d\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

### II.1.3 Relation incrémentale contraintes-déformations

Dans cette section, on se propose d'établir la forme incrémentale de la loi de comportement. Pour cela nous rappellerons dans un premier temps le principe utilisé pour la construire. Une application à l'exemple étudié ainsi que les premières courbes de comportement obtenues numériquement seront présentées.

#### II.1.3.a Principe de construction

De manière classique, on suppose que l'incrément de déformation totale $\boldsymbol{d\varepsilon}$ se décompose en la somme de l'incrément de déformation élastique $\boldsymbol{d\varepsilon}^e$ et de l'incrément de déformation plastique $\boldsymbol{d\varepsilon}^p$ :

$$\boldsymbol{d\varepsilon} = \boldsymbol{d\varepsilon}^e + \boldsymbol{d\varepsilon}^p$$

La partie élastique satisfait la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{d\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{d\sigma} - \frac{\nu}{E}(tr\ \boldsymbol{d\sigma})\boldsymbol{I}$$

La partie plastique de l'incrément de déformation totale est donnée par la formulation de Prager de la règle d'écoulement :

- si $f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) < 0$ alors — *comportement élastique*
  $\boldsymbol{d\varepsilon}^p = 0$
- si $f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = 0$ et $df(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = 0$ alors — *écoulement plastique*
  il existe $d\zeta \geq 0$ tel que $\boldsymbol{d\varepsilon}^p = d\zeta \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- si $f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = 0$ et $df(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) < 0$ alors — *décharge élastique*
  $\boldsymbol{d\varepsilon}^p = 0$

Il reste alors à déterminer l'expression du multiplicateur plastique $d\zeta$. Celle-ci est fournie par la condition de cohérence $df = 0$. En effet, imposer cette condition signifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} : \boldsymbol{dX} = 0 \tag{II.4}$$

La forme incrémentale de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire (II.2) fournit :

$$\boldsymbol{dX} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{d\varepsilon}^p - \frac{C}{X_\infty}\boldsymbol{X}dp$$

En utilisant ensuite la règle d'écoulement :

$$\boldsymbol{d\varepsilon}^p = d\zeta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

et la règle d'écrouissage isotrope (II.1) :

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{d\varepsilon}^p : \boldsymbol{d\varepsilon}^p} = d\zeta \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

on obtient ($d\zeta$ étant positif) :

$$\boldsymbol{dX} = \frac{2}{3} C d\zeta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{C}{X_\infty} \boldsymbol{X} d\zeta \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \tag{II.5}$$

La condition de cohérence (II.4) devient donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} : \left\{ \frac{2}{3} C d\zeta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{C}{X_\infty} \boldsymbol{X} d\zeta \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right\} = 0 \tag{II.6}$$

Enfin, la forme du critère d'écoulement plastique (II.3) entraîne :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{II.7}$$

ce qui permet finalement d'obtenir à partir de (II.6) l'expression du multiplicateur plastique en fonction uniquement des contraintes :

$$d\zeta = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d\sigma}}{\dfrac{2}{3} C \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \dfrac{C}{X_\infty} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{X} \sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}} \tag{II.8}$$

#### II.1.3.b Application à l'exemple étudié

Intéressons nous maintenant en particulier au cas de l'état de traction constante et torsion alternée homogène. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} - \sigma_{33} - 3X_{11} & 3(\sigma_{12} - X_{12}) & 0 \\ 3(\sigma_{12} - X_{12}) & -\sigma_{11} - \sigma_{33} + 3X_{11} + 3X_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} - \sigma_{11} - 3X_{33} \end{bmatrix}$$

En posant

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma \ , \ X_{11} = X \\ \sigma_{12} = \dfrac{\tau}{\sqrt{3}} \ , \ X_{12} = \dfrac{Y}{\sqrt{3}} \\ \sigma_{33} = \nu\sigma \ , \ X_{33} = Z \end{cases}$$

où $\nu$ désigne le coefficient de Poisson du matériau, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} (2-\nu)\sigma - 3X & \sqrt{3}(\tau - Y) & 0 \\ \sqrt{3}(\tau - Y) & -(1+\nu)\sigma + 3X + 3Z & 0 \\ 0 & 0 & (2\nu - 1)\sigma - 3Z \end{bmatrix}$$

Le calcul du multiplicateur incrémental $d\zeta$ par (II.8) nécessite aussi les expressions de $\boldsymbol{d\sigma}$ :

$$\boldsymbol{d\sigma} = \begin{bmatrix} d\sigma & \frac{d\tau}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{d\tau}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu d\sigma \end{bmatrix}$$

et du tenseur $\boldsymbol{X}$ :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X & \frac{Y}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{Y}{\sqrt{3}} & -(X+Z) & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} &= [2(\nu^2 - \nu + 1)\sigma - 3X - 3\nu Z]d\sigma + 2(\tau - Y)d\tau \\ \frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 4[\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})]^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{X} &= 2Y(\tau - Y) + 3\sigma(X + \nu Z) - 6(X^2 + Z^2 + XZ) \end{aligned}$$

Remarquons que comme le calcul du multiplicateur plastique n'intervient que lorsque le critère d'écoulement est nul, i.e. lorsque $f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = 0$, on a nécessairement $[\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})]^2 = \sigma_Y^2$. Ainsi

$$\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 4\sigma_Y^2$$

et puisque $\sigma_Y$ et $\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})$ sont positifs :

$$\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} = 2\sigma_Y$$

Finalement, dans le cas de l'état de traction constante et torsion alternée homogène, on obtient :

$$d\zeta = \frac{[2(\nu^2 - \nu + 1)\sigma - 3X - 3\nu Z]d\sigma + 2(\tau - Y)d\tau}{h} \tag{II.9}$$

où $h$, généralement appelé module d'écrouissage, prend la forme :

$$h = 4C\sigma_Y^2 - \frac{2\sigma_Y C}{X_\infty}\left(2Y(\tau - Y) + 3\sigma(X + \nu Z) - 6(X^2 + Z^2 + XZ)\right) \tag{II.10}$$

Maintenant que la forme des équations reliant les déformations aux contraintes a été établie, intéressons nous plus spécifiquement à l'allure du trajet de chargement que nous allons imposer lors des simulations. Ce trajet sera constitué de deux phases distinctes : dans un premier temps, un chargement en traction jusqu'à la valeur maximale choisie $\sigma_{\max}$ (chemin OA sur la figure II.1) puis, un chargement en torsion alternée répété entre les valeurs maximales choisies $\tau_{\max}$ et $-\tau_{\max}$ (chemin ABACA sur la figure II.1). L'allure de l'évolution du chargement pendant

la phase de torsion alternée en fonction du temps est précisée sur la figure II.2. Suivant la phase du chargement (phase de traction ou phase de torsion) dans laquelle nous nous trouvons, les relations contraintes-déformations prennent des formes différentes. Il faut donc maintenant distinguer les deux cas de figures suivants.

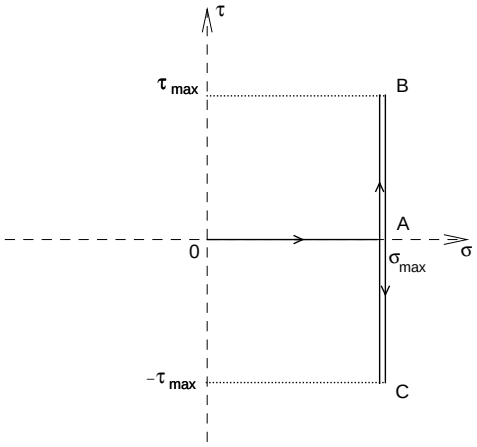



*Figure II.1 - Description du chargement*

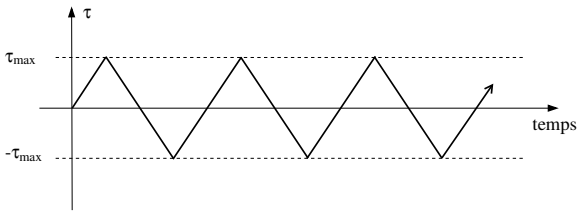



*Figure II.2 - Trajet de chargement suivi pendant la phase de torsion alternée*

**Phase de chargement en traction**

Pendant cette première phase, le chargement en torsion est complètement inexistant, ce qui signifie : $\tau = 0$, $d\tau = 0$ et $Y = 0$. L'expression précédente (II.9) du multiplicateur plastique se simplifie donc en :

$$d\zeta_{traction} = \frac{[2(\nu^2 - \nu + 1)\sigma - 3X - 3\nu Z]d\sigma}{h_{traction}}$$

avec

$$h_{traction} = 4C\sigma_Y^2 - \frac{2\sigma_Y C}{X_\infty}\left(3\sigma(X + \nu Z) - 6(X^2 + Z^2 + XZ)\right)$$

d'où

$$\frac{d\zeta_{traction}}{d\sigma} = \frac{[2(\nu^2 - \nu + 1)\sigma - 3X - 3\nu Z]}{h_{traction}}$$

De manière à alléger les expressions, posons :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_{11}^p \\ \eta = \varepsilon_{33}^p \end{cases}$$

Les déformations plastiques et les contraintes internes peuvent alors être calculées par intégration numérique de la règle de normalité :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{d\sigma} = \dfrac{d\zeta_{traction}}{d\sigma}((2-\nu)\sigma - 3X) \\ \dfrac{d\eta}{d\sigma} = \dfrac{d\zeta_{traction}}{d\sigma}((2\nu-1)\sigma - 3Z) \end{cases}$$

et de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\sigma} = \dfrac{2C}{3}\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma} - 2\sigma_Y \dfrac{C}{X_\infty} X \dfrac{d\zeta_{traction}}{d\sigma} \\ \dfrac{dZ}{d\sigma} = \dfrac{2C}{3}\dfrac{d\eta}{d\sigma} - 2\sigma_Y \dfrac{C}{X_\infty} Z \dfrac{d\zeta_{traction}}{d\sigma} \end{cases}$$

**Phase de chargement en torsion**

Pendant cette seconde phase de chargement, la contrainte de traction n'est pas nulle mais reste constante. L'incrément $d\sigma$ est donc nul pendant cette phase. L'expression précédente (II.9) du multiplicateur plastique se simplifie donc en :

$$d\zeta_{torsion} = \frac{2(\tau - Y)d\tau}{h_{torsion}}$$

avec :

$$h_{torsion} = 4C\sigma_Y^2 - \frac{2\sigma_Y C}{X_\infty}\left(2Y(\tau - Y) + 3\sigma(X + \nu Z) - 6(X^2 + Z^2 + XZ)\right)$$

d'où

$$\frac{d\zeta_{torsion}}{d\tau} = \frac{2(\tau - Y)}{h_{torsion}}$$

Comme précédemment, de manière à alléger les expressions, nous posons :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_{11}^p \\ \gamma = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\varepsilon_{12}^p \\ \eta = \varepsilon_{33}^p \end{cases}$$

Les déformations plastiques et les contraintes internes peuvent alors être calculées par intégration numérique de la règle de normalité :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{d\tau} = \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau}((2-\nu)\sigma - 3X) \\ \dfrac{d\gamma}{d\tau} = \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau}(2(\tau - Y)) \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau}((2\nu-1)\sigma - 3Z) \end{cases}$$

et de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \dfrac{2C}{3}\dfrac{d\varepsilon}{d\tau} - 2\sigma_Y \dfrac{C}{X_\infty} X \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau} \\ \dfrac{dY}{d\tau} = C\dfrac{d\gamma}{d\tau} - 2\sigma_Y \dfrac{C}{X_\infty} Y \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau} \\ \dfrac{dZ}{d\tau} = \dfrac{2C}{3}\dfrac{d\eta}{d\tau} - 2\sigma_Y \dfrac{C}{X_\infty} Z \dfrac{d\zeta_{torsion}}{d\tau} \end{cases}$$

### II.1.4 Premiers résultats numériques : courbes contraintes-déformations

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux courbes contraintes-déformations afin d'examiner de quelle manière se comporte la structure en fonction des amplitudes de chargements appliqués. Nous sélectionnons comme matériau pour procéder aux simulations numériques l'acier 316L. Nous utilisons les paramètres (constantes) de ce matériau identifiés par Choteau (1999) en traction-compression cyclique :

$$\begin{cases} C = 13230MPa \\ \gamma = 85MPa \\ \sigma_Y = 228MPa \end{cases}$$

La constante désignée par $X_\infty$ dans les équations est calculée à partir des constantes $C$ et $\gamma$ :

$$X_\infty = \frac{C}{\gamma} \tag{II.11}$$

Les incréments de contraintes sont fixés à $1MPa$ pour la phase de chargement en traction et à $\pm 1MPa$ pour la phase de chargement en torsion alternée. Ils ont été choisis de manière à ce que les temps de calcul ne soient pas trop importants mais aussi et surtout pour que le critère de plasticité ne soit jamais violé. Pour ces premières simulations, nous fixons la contrainte de traction maximum à $225MPa$. Pour cette contrainte, on teste plusieurs amplitudes de torsion $\tau_{\max}$ de manière à observer s'il existe des différences de comportement. Nous avons ainsi pu constater une différence de comportement sur les courbes contraintes-déformations entre les simulations effectuées pour une contrainte de torsion maximale de $\tau_{\max} = 190MPa$ et une contrainte de torsion maximale de $\tau_{\max} = 200MPa$.

Commençons par comparer l'évolution de la déformation plastique axiale en fonction de la contrainte de cisaillement pour ces deux cas de figure. On peut voir clairement sur les figures II.3 et II.4 la différence de comportement : pour $\tau_{\max} = 190MPa$, on constate qu'après une phase élastoplastique, la courbe contrainte-déformation plastique tend vers une réponse linéaire (figure II.3), alors que pour $\tau_{\max} = 200MPa$, il ne semble pas qu'une stabilisation s'amorce sur les quarante premiers cycles effectués (figure II.4). Le comportement observé pour $\tau_{\max} = 190MPa$ laisserait penser que l'on se trouve dans un cas où l'adaptation élastoplastique a lieu, tandis que celui observé pour $\tau_{\max} = 200MPa$ serait plutôt caractéristique d'un comportement de type rochet.

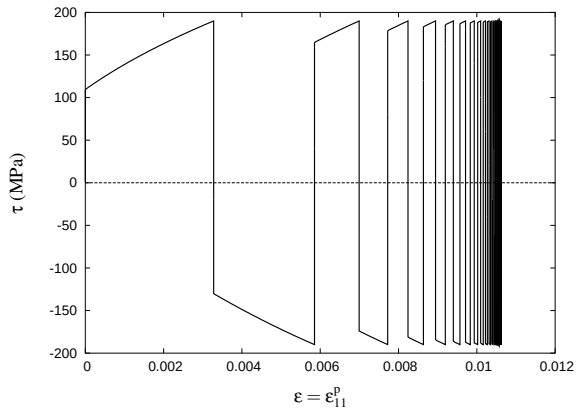



*Figure II.3 - Déformation plastique axiale en fonction de la contrainte de cisaillement pour* $\sigma = 225MPa$ *et* $\tau_{\max} = 190MPa$

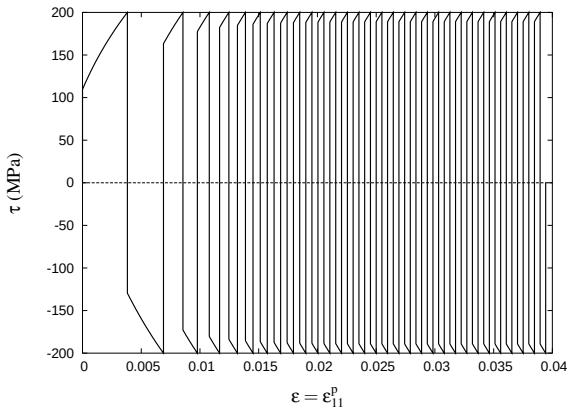



*Figure II.4 - Déformation plastique axiale en fonction de la contrainte de cisaillement pour* $\sigma = 225MPa$ *et* $\tau_{\max} = 200MPa$

Si l'on observe ensuite l'évolution de la déformation plastique transversale en fonction de la contrainte de cisaillement pour ces deux cas de chargement (voir figures II.5 et II.6), on peut constater que les comportements obtenus sont similaires à ceux constatés pour l'évolution de la déformation plastique axiale.

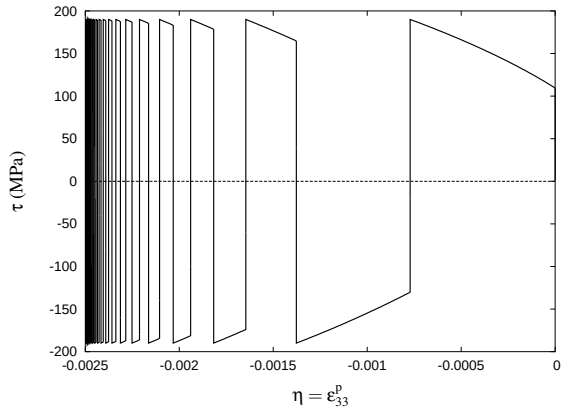



*Figure II.5 - Déformation plastique transversale en fonction de la contrainte de cisaillement pour* $\sigma = 225MPa$ *et* $\tau_{\max} = 190MPa$

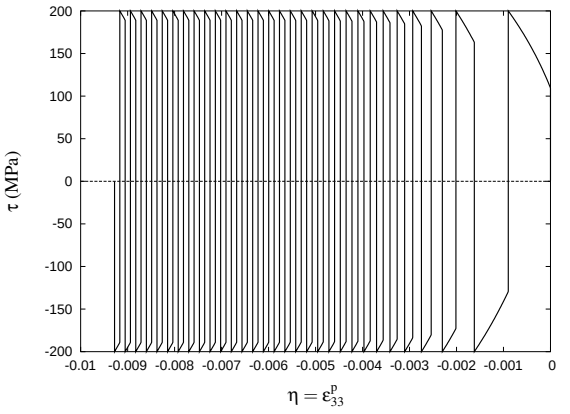



*Figure II.6 - Déformation plastique transversale en fonction de la contrainte de cisaillement pour* $\sigma = 225MPa$ *et* $\tau_{\max} = 200MPa$

L'évolution du glissement plastique $\varepsilon^p_{12}$ est par contre clairement différente. On observe bien une stabilisation linéaire de la déformation pour $\tau_{\max} = 190MPa$ après un certain nombre de cycles (figure II.7), tandis que pour $\tau_{\max} = 200MPa$ on a l'impression que la réponse se stabilise en un cycle élastoplastique d'aire non nulle, soit un comportement de type accommodation (figure II.8).

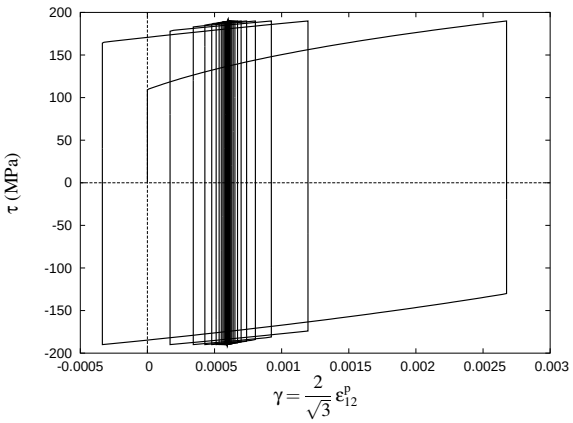



*Figure II.7 - Déformation plastique en cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement pour $\sigma = 225MPa$ et $\tau_{\max} = 190MPa$*

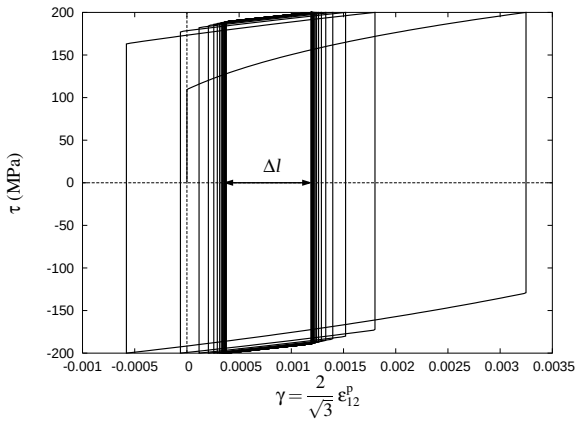



*Figure II.8 - Déformation plastique en cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement pour $\sigma = 225MPa$ et $\tau_{\max} = 200MPa$*

Pour confirmer ces premières observations, on peut aussi analyser les évolutions des trois composantes de la déformation plastique en fonction du temps (figure II.9 et II.10). A titre indicatif, la vitesse de chargement prise est de $1.10^{-2}MPa/s$. Dans le cas où la torsion maximale est de $190MPa$, la figure II.9 confirme bien qu'il y a une stabilisation des déformations plastiques au bout des quarante premiers cycles, ce qui correspond bien au phénomène d'adaptation élasto-plastique : le comportement de la structure tend à redevenir purement élastique.

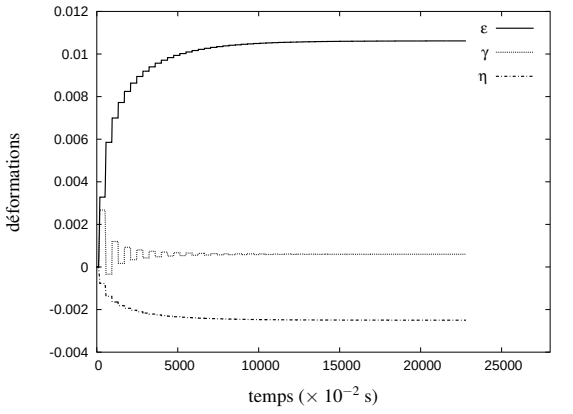



*Figure II.9 - Evolution des déformations en fonction du temps pour $\sigma = 225MPa$ et $\tau_{\max} = 190MPa$*

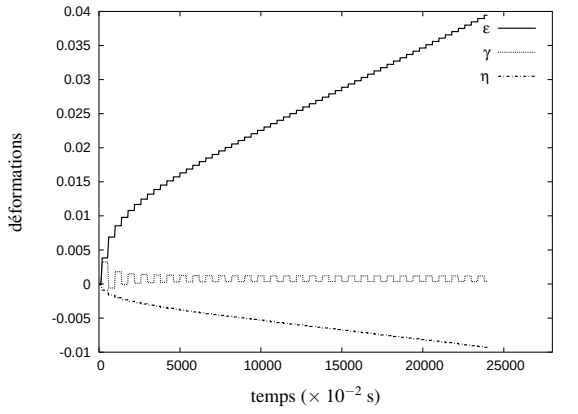



*Figure II.10 - Evolution des déformations en fonction du temps pour $\sigma = 225MPa$ et $\tau_{\max} = 200MPa$*

Au contraire, dans le cas où la torsion maximale est de $200MPa$, la figure II.10 montre que la déformation plastique $\varepsilon$ ne cesse d'augmenter tandis que la déformation plastique $\eta$ ne cesse de diminuer. Aucune stabilisation n'est observée pour celles-ci. Le cas de la déformation en ci-

saillement $\gamma$ est différent. En effet, elle ne se stabilise pas au sens où elle tend vers une valeur asymptotique, mais elle semble osciller entre une valeur maximale et une valeur minimale. Cela peut s'expliquer en observant le schéma représentant les domaine élastique et limite dans le plan $(\sigma, \tau)$ dans le cas du phénomène de rochet en traction constante et torsion alternée (figure II.11).

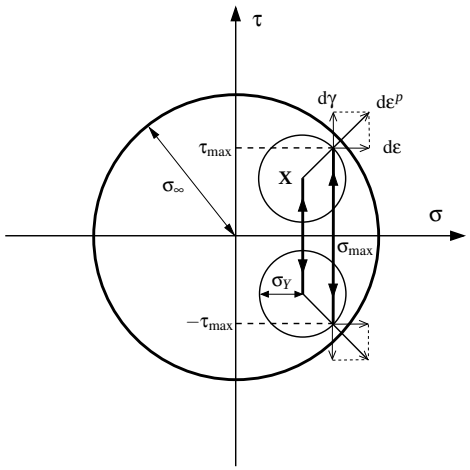



*Figure II.11 - Rochet en traction constante et torsion alternée*

En effet, on peut constater sur cette figure que, pour une traction $\sigma_{\max}$ fixée, les incréments de déformations en $\tau_{\max}$ et $-\tau_{\max}$ dans la direction de la traction, notés d$\varepsilon$, vont se cumuler tandis que les incréments de déformations de cisaillement, notés d$\gamma$, vont se compenser. Ceci est à l'origine du comportement à la ruine de type rochet pour les composantes $\varepsilon$ et $\eta$ de la déformation, et du comportement de type accommodation pour la composante $\gamma$. De ce fait, puisqu'il existe au moins une direction de chargement dans laquelle les déformations plastiques s'accumulent, la structure périra par ruine incrémentale.

## II.2 Méthode de détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique

Maintenant que nous avons pu constater qu'il existait une différence de comportement suivant l'amplitude maximum du chargement en torsion, nous souhaiterions déterminer numériquement l'amplitude pour laquelle le changement s'opère. Cela revient à déterminer l'amplitude maximale de torsion pour laquelle le phénomène d'adaptation élastoplastique a lieu, c'est à dire de trouver le facteur d'adaptation ou la charge d'adaptation. Ceci fait l'objet du présent paragraphe.

La véritable difficulté est de trouver un critère numérique fiable pour la détermination de ce facteur, prenant en compte le fait que la solution asymptotique ne peut pas être atteinte en un nombre fini de cycles. Dans ce but, on s'intéresse d'abord aux investigations expérimentales et incrémentales déjà menées sur ce sujet. Celles-ci sont généralement basées sur la constatation suivante : dans le cas de comportements de type plasticité alternée ou rochet, l'incrément de déformations plastiques sur un cycle de chargement ne s'annule pas, tandis que pour un

comportement de type adaptation élastoplastique, les déformations plastiques tendent vers un comportement stationnaire. Les procédures de calcul incrémental (voir par exemple Borkowski et Kleiber (1980), Kleiber et König (1984) et plus récemment Goh et al. (2003)) et d'essais expérimentaux (voir par exemple Heitzer et al. (2003)) consistent alors à tester, pour un trajet de chargement s'il y a ou non une stabilisation des déformations plastiques. Notre objectif est de proposer une méthode de détection plus systématique pour l'exemple étudié : pour une valeur fixée de la contrainte de traction, déterminer automatiquement l'amplitude de torsion correspondant à la charge d'adaptation. De ce point de vue, une investigation expérimentale due à Leers et al. (1985) a retenu plus particulièrement notre attention. Ces auteurs ont étudié des tubes sous chargements thermo-mécaniques et présentent une méthodologie expérimentale basée sur la mesure du déplacement radial en fonction du chargement pour déterminer la charge d'adaptation. Ils la détectent alors par un point d'inflexion sur la courbe représentant le déplacement en fonction du chargement. Comme nous n'avons pas observé ce type de comportement, nous avons choisi de développer notre propre critère de détection ce qui fera l'objet de cette section.

### II.2.1 Procédure proposée pour la détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique

En observant les courbes contraintes-déformations plastiques, on constate que lorsque la structure s'adapte, la largeur du cycle pour la déformation plastique de cisaillement $\gamma$ tend vers zéro (figure II.7), théoriquement après un nombre infini de cycles. En pratique, nous décidons de stopper les calculs lorsque la largeur du cycle, représentée par $\Delta l$ sur la figure II.8, atteint une tolérance fixée, ce qui correspond au fait que la structure se soit adaptée, ou lorsque le nombre de cycles devient supérieur à un nombre maximum fixé, ce qui sera considéré comme une non-adaptation de la structure. Dans ce dernier cas, le fait que la structure ne s'adapte pas pour un nombre important de cycles (en pratique, nous avons considéré 1000 cycles) signifie pour nous qu'elle ne s'adaptera pas. Lorsque cette procédure est terminée, on retient la valeur du maximum de la déformation de cisaillement $\gamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{max}}$ correspondant.

Pour une valeur fixée de la contrainte de traction, on applique alors cette procédure pour chaque valeur entière de $\tau_{max}$ depuis $\tau_{max} = 0MPa$ jusqu'à ce que l'on trouve 10 valeurs de $\tau_{max}$ successives pour lesquelles la non-adaptation est détectée. En traçant alors l'évolution des valeurs de la déformation $\gamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{max}}$ en fonction de la contrainte de cisaillement maximum $\tau_{max}$, par exemple pour une contrainte de traction $\sigma$ de $25MPa$, on obtient la figure II.12. Il semble alors que la modification soudaine de la pente se produise pour la charge d'adaptation plastique. Nous avons donc calculé et tracé la courbure de la courbe représentant la déformation $\gamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{max}}$ en fonction de la contrainte de cisaillement pour connaître plus précisément l'amplitude de la contrainte de cisaillement qui lui correspond (voir figure II.13). On observe que le changement de courbure s'opère pour une torsion $\tau$ de $228MPa$.

Vérifions la cohérence de ce résultat. En effectuant une simulation avec une amplitude de torsion inférieure à $228MPa$, soit par exemple $226MPa$, on constate que la largeur du cycle devient bien inférieure à la tolérance choisie puisque le comportement demeure purement élastique (figure II.14). Si l'on choisit une amplitude de torsion supérieure à $228MPa$, soit par exemple $230MPa$,

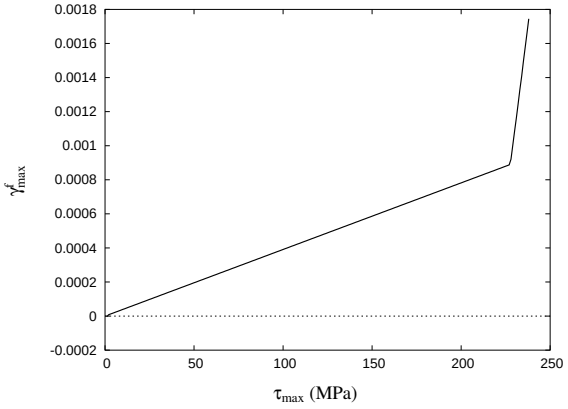



*Figure II.12 - Déformation de cisaillement maximum en fonction de la contrainte de cisaillement maximum pour $\sigma = 25MPa$*

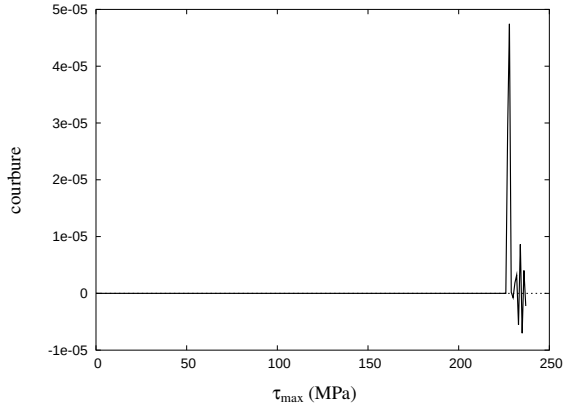



*Figure II.13 - Courbure de la courbe déformation de cisaillement maximum en fonction de la contrainte de cisaillement maximum pour $\sigma = 25MPa$*

la simulation s'arrête à 1000 cycles, ce qui signifie que la largeur du cycle ne devient pas inférieure à la tolérance (figure II.15). Dans ce cas, la structure ne s'adapte donc pas. La procédure de calcul pas à pas mise en place semble bien permettre de détecter la charge d'adaptation.

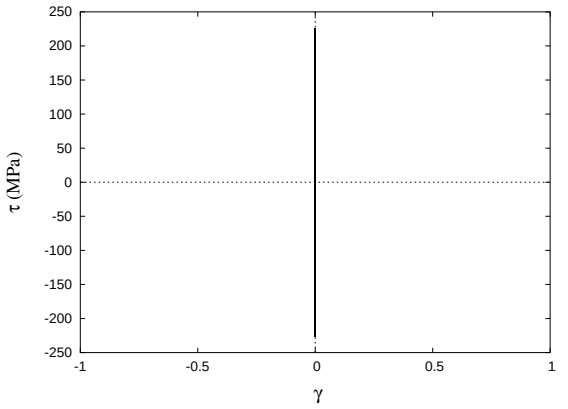



*Figure II.14 - Déformation en cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement pour $\sigma = 25MPa$ et $\tau_{\max} = 226MPa$ (noter que le cycle est élastique)*

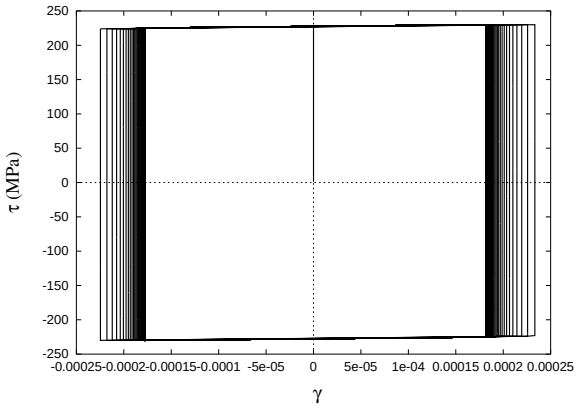



*Figure II.15 - Déformation en cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement pour $\sigma = 25MPa$ et $\tau_{\max} = 230MPa$*

### II.2.2 Résultats des simulations pour la charge d'adaptation

La procédure de détermination étant maintenant mise en place, des simulations sont effectuées pour des valeurs différentes de la contrainte en traction. On ne détaillera dans ce paragraphe que les exemples les plus significatifs, i.e. ceux pour lesquels on observe des différences de com-

portement. Pour une intensité de traction de $200MPa$, sur la figure montrant la courbure de la courbe représentant la déformation en cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement, deux pics d'intensité moindre apparaissent (figure II.16).

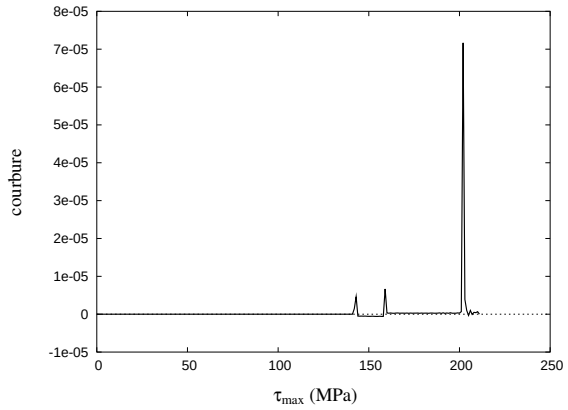



*Figure II.16 - Courbure de la courbe déformation de cisaillement maximum en fonction de la contrainte de cisaillement maximum pour $\sigma = 200MPa$*

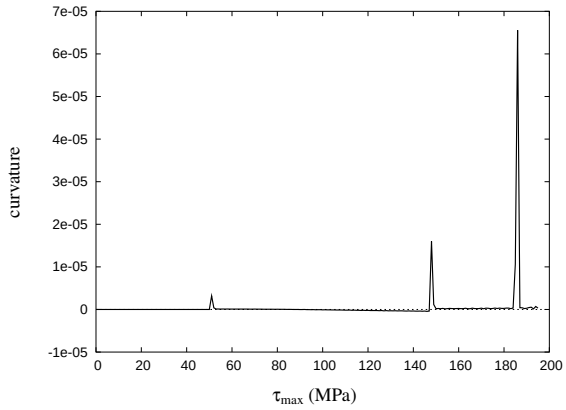



*Figure II.17 - Courbure de la courbe déformation de cisaillement maximum en fonction de la contrainte de cisaillement maximum pour $\sigma = 250MPa$*

Le premier de ces deux pics correspond au début de l'écoulement plastique ; avant celui-ci le comportement est donc purement élastique. La vérification théorique de ce résultat est immédiate. En effet, en utilisant la forme du critère d'écoulement (II.3) avec des contraintes internes nulles puisque la phase de plasticité n'a pas commencé, pour une traction $\sigma$ de $200MPa$, le début de l'écoulement plastique se produit pour une amplitude de torsion $\tau$ d'environ $142,77MPa$. Numériquement, le premier pic est détecté pour $\tau = 143MPa$, ce qui correspond bien au début de l'écoulement plastique. Entre ce premier pic et le second, l'adaptation élastoplastique de la structure est atteinte numériquement en seulement deux cycles. L'amplitude de torsion est suffisamment importante pour que des phases de plasticité aient lieu, mais aussi suffisamment petite pour que le comportement tende numériquement très rapidement vers un état adapté. Les mêmes phénomènes sont observés pour une amplitude de traction $\sigma$ de $250MPa$ (figure II.17).

Ces deux pics n'apparaissent pas sur la figure précédente (figure II.13) représentant la courbure car dans ce cas la transition entre le comportement purement élastique et le comportement élastoplastique et donc l'adaptation élastoplastique s'effectue très rapidement. Un seul et même pic détecte alors le début de la phase de plasticité et la charge d'adaptation plastique, ce qui signifie que l'amplitude de torsion associée à ces deux phénomènes est alors la même.

Pour une amplitude de traction $\sigma$ de $275MPa$, seul un des deux pics d'intensité moindre subsiste (figure II.18). Ceci peut être expliqué par le fait que l'écoulement plastique commence pendant la phase de traction. Dans ce cas, le premier des deux pics d'intensité moindre n'a plus de raison d'apparaître lors du tracé de la courbure.

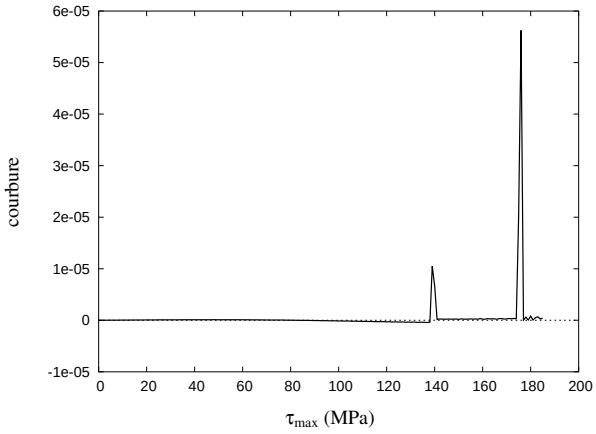



*Figure II.18 - Courbure de la courbe déformation de cisaillement maximum en fonction de la contrainte de cisaillement maximum pour $\sigma = 275MPa$*

Les résultats obtenus pour les différentes intensités de traction testées sont résumés dans le tableau II.1.

*Tableau II.1 - Valeurs numériques de la charge d'adaptation $\tau_a$ pour l'acier 316L en fonction de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma\ (MPa)$ | $\tau_a\ (MPa)$ | $\sigma\ (MPa)$ | $\tau_a\ (MPa)$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 228 | 250 | 186 |
| 50 | 227 | 275 | 176 |
| 75 | 225 | 300 | 164 |
| 100 | 222 | 325 | 150 |
| 125 | 218 | 350 | 133 |
| 150 | 214 | 375 | 113 |
| 175 | 208 | 400 | 86 |
| 200 | 202 | 425 | 40 |
| 225 | 195 | 430 | 19 |

### II.2.3 Comparaison des résultats obtenus avec le modèle à écrouissage cinématique linéaire limité

Grâce aux résultats obtenus, nous pouvons esquisser la courbe d'interaction, limitant le domaine d'adaptation (figure II.19).

Sur cette courbe, nous avons choisi de reporter le domaine d'adaptation obtenu en utilisant l'écrouissage cinématique linéaire limité (ou modèle à deux surfaces développé par Weichert et Gross-Weege (1988)) et déjà comparé à une solution analytique en état plan de contrainte avec écrouissage cinématique non linéaire dans Heitzer et al. (2003). Ces derniers précisent qu'il n'y a qu'une petite différence entre les domaines d'adaptation construits avec l'écrouissage cinéma-

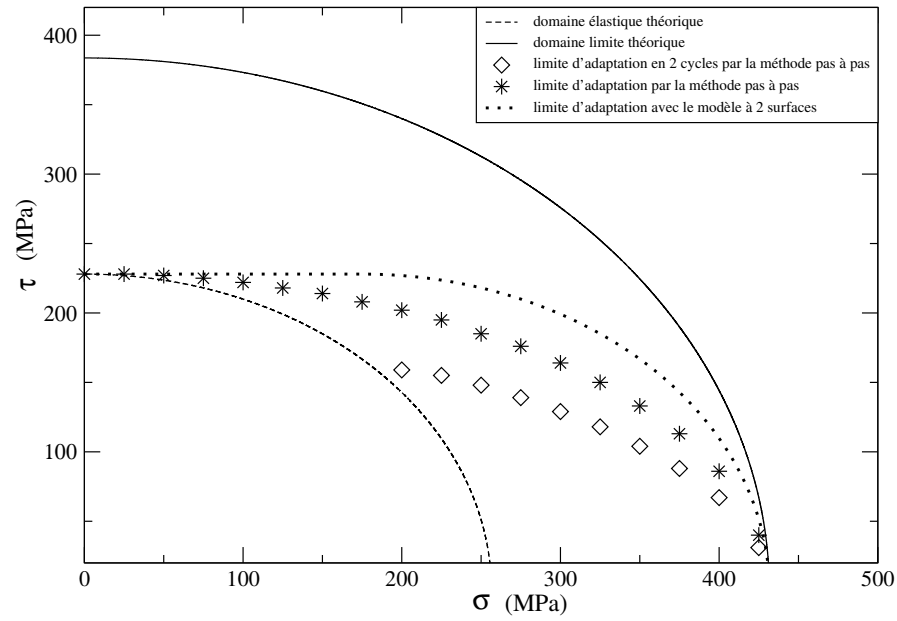



*Figure II.19 - Courbe d'interaction pour l'acier 316L*

tique linéaire limité et l'écrouissage cinématique non linéaire. Dans la présente étude, soit pour un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane, la comparaison des charges d'adaptation conduit à une différence relative qui peut atteindre 20% entre les deux domaines, ce qui selon nous semble non négligeable.

Notons aussi que l'utilisation de l'écrouissage cinématique non linéaire permet de prédire que la nature de la non adaptation est le rochet, ce qui est cohérent avec la théorie (voir les commentaires de la figure II.11) tandis que la modélisation avec l'écrouissage cinématique linéaire limité conduit à une non adaptation par plasticité alternée lorsque la contrainte de traction en inférieure à 175MPa.

Remarquons enfin que les points limitant la zone où l'adaptation élastoplastique a lieu en moins de deux cycles définissent une zone qui pourrait garantir une meilleure sauvegarde de la structure que la zone où a lieu l'adaptation élastoplastique. Une formulation théorique des limites de cette zone pourrait être d'un grand intérêt pratique.

### II.2.4 Evolution des contraintes internes en fonction du temps

Les contraintes internes jouent un rôle majeur dans le phénomène d'adaptation élastoplastique. Il est donc intéressant d'étudier l'évolution de celles-ci en fonction du temps et en fonction du comportement de la structure (adaptation ou non adaptation). Fixons l'intensité de la traction à $\sigma = 225MPa$. Dans ce cas, d'après ce qui précède (tableau II.1), la charge d'adaptation numérique est $\tau_a = 195MPa$. Pour pouvoir comparer les différents cas de figure, nous traçons l'évolution des contraintes internes pour une amplitude maximale de torsion inférieure à la charge d'adaptation numérique (par exemple $\tau = 190MPa$), pour la charge d'adaptation numérique

(dans le cas présent $\tau = 195MPa$), et pour une amplitude maximale de torsion supérieure à la charge d'adaptation numérique (par exemple $\tau = 200MPa$).

Commençons par examiner l'évolution de la composante $X = X_{11}$ des contraintes internes en fonction du temps. On peut constater sur les figures II.20 et II.21 que dans les trois cas, cette

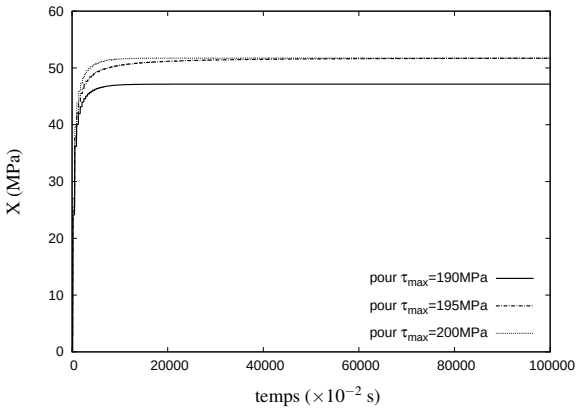



*Figure II.20 - Evolution de la contrainte interne X en fonction du temps pour $\sigma = 225MPa$*

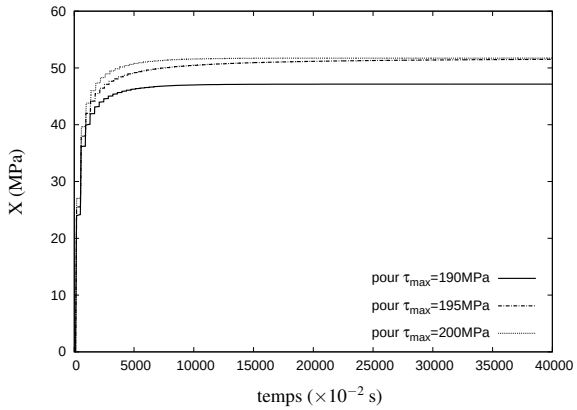



*Figure II.21 - Zoom sur l'évolution de la contrainte interne X en fonction du temps pour $\sigma = 225MPa$*

composante évolue dans un premier temps de manière croissante, par paliers, et semble ensuite tendre vers une valeur asymptotique. L'évolution par paliers est due à l'alternance de phases d'élasticité, pendant lesquelles les contraintes internes ne sont pas modifiées, et de plasticité, pendant lesquelles elles le sont. On peut remarquer ensuite que la valeur asymptotique vers laquelle tend la composante $X$ des contraintes internes dans le cas où l'amplitude maximale de la torsion est la charge d'adaptation numérique est la même que lorsque celle-ci est dépassée, i.e. dans le cas où il y a non-adaptation. Cela paraît signifier que la valeur asymptotique atteinte par cette composante $X$ de la contrainte interne lorsque l'on se place à la charge d'adaptation ne sera jamais dépassée, même si l'on dépasse cette charge. Quant à l'évolution de la contrainte interne $X$ pour une amplitude de torsion maximale en dessous de la charge d'adaptation, elle semble tendre vers une valeur asymptotique inférieure à la valeur asymptotique commune à la charge d'adaptation et à une charge supérieure.

Si maintenant on s'intéresse à la composante $Z = X_{33}$ des contraintes internes, on peut remarquer sur les figures II.22 et II.23 que l'analogie avec les phénomènes notés pour la composante $X$ est complète. En particulier, la convergence vers la même valeur asymptotique pour la charge d'adaptation numérique et une charge supérieure est aussi constatée pour cette composante.

En ce qui concerne la composante $Y = \sqrt{3}X_{12}$ du tenseur des contraintes internes, les constatations sont complètement différentes (figures II.24 et II.25). Pour le cas où l'amplitude de la torsion est inférieure à la charge d'adaptation numérique, on peut noter que la contrainte interne $Y$ tend vers zéro après quelques cycles. Pour ce qui est du cas où l'amplitude maximale

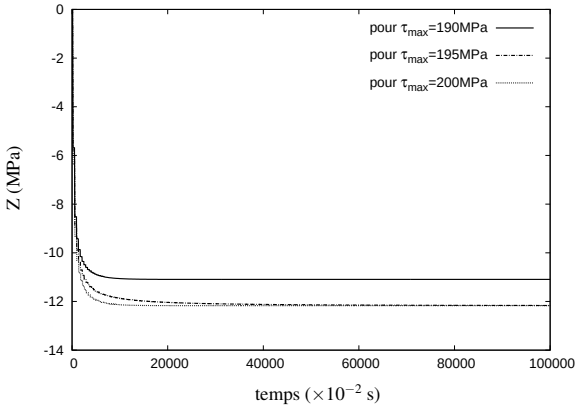



*Figure II.22 - Evolution de la contrainte interne Z en fonction du temps pour* $\sigma = 225MPa$

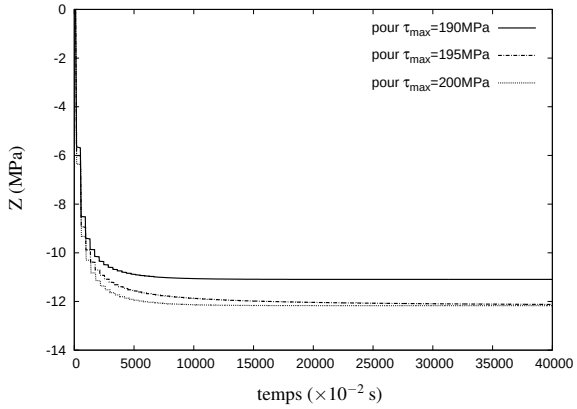



*Figure II.23 - Zoom sur l'évolution de la contrainte interne Z en fonction du temps pour* $\sigma = 225MPa$

de torsion est égale à la charge d'adaptation numérique, l'évolution de $Y$ oscille autour de zéro, i.e. semble tendre vers zéro mais n'adopte pas le même comportement que dans le cas précédent. Il est possible que la charge limite d'adaptation numérique soit légèrement surévaluée ce qui provoquerait cette oscillation retrouvée dans le cas où l'on obtient un comportement de non-adaptation. En effet, dans ce dernier cas, la contrainte $Y$ oscille entre deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, a priori de manière symétrique autour de zéro après quelques cycles. Dans les trois cas de chargement, on observe donc une stabilisation, mais contrairement aux deux autres composantes des contraintes internes, elle n'est pas de la même nature pour une amplitude supérieure à la charge d'adaptation limite : la composante $Y$, qui est la composante des contraintes internes associée au cisaillement, et donc au chargement qui est alterné, ne tend pas vers une valeur asymptotique, mais oscille autour de zéro.

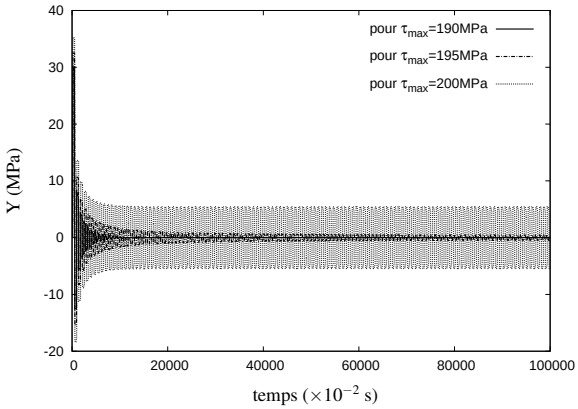



*Figure II.24 - Evolution de la contrainte interne Y en fonction du temps pour* $\sigma = 225MPa$

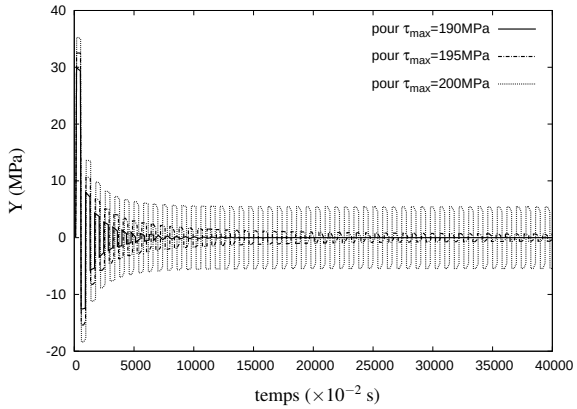



*Figure II.25 - Zoom sur l'évolution de la contrainte interne Y en fonction du temps pour* $\sigma = 225MPa$

En conclusion de cette partie, on peut ajouter que, même si le théorème de Melan (1936) n'a pas été démontré pour la classe des matériaux standards implicites, les remarques faites sur l'évolution des contraintes internes en fonction du temps laisse penser que, pour cet exemple, l'existence d'un champ de contraintes résiduelles (ici assimilé au champ de contraintes internes[8]) indépendant du temps conditionne l'adaptation élastoplastique de la structure. Evidemment, cela ne fournit en aucun cas une preuve du théorème, mais permet d'envisager la recherche d'une solution théorique sans trop d'appréhension.

### II.2.5 Influence de l'initialisation des contraintes internes

Dans les calculs effectués pour déterminer la charge d'adaptation dans cette section, les contraintes internes ont été initialisées à des valeurs nulles en début de simulations. On peut néanmoins s'interroger sur les effets de cette initialisation sur les valeurs numériques des charges d'adaptation obtenues. Pour cela, nous procédons à de nouvelles simulations en prenant cette fois au moins une valeur non nulle pour les contraintes internes initiales. Nous ne présenterons que certains résultats, significatifs des différents types de comportement observés. Fixons l'intensité de la traction à $\sigma = 225MPa$. Lorsque l'on initialise les trois composantes $X$, $Y$ et $Z$ à zéro, le début de l'écoulement plastique est détecté pour une torsion de $110MPa$, la fin de de l'adaptation en deux cycles pour une torsion de $155MPa$ et la charge d'adaptation numérique à $195MPa$. Comparons ces résultats à ceux obtenus avec une initialisation à des valeurs non nulles pour $X$, $Y$ et $Z$.

Dans un premier temps, nous initialisons les contraintes internes comme suit : $X_0 = 4MPa$, $Y_0 = 0MPa,\ Z_0 = 0MPa$. En suivant la même procédure que dans le paragraphe II.2.1, on obtient la figure II.26 représentant la courbure de l'évolution de $\gamma^{\mathrm{f}}_{\max}$ en fonction de $\tau_{\max}$ dans le cas de cette initialisation comparée avec celle obtenue dans le cas de l'initialisation à zéro.

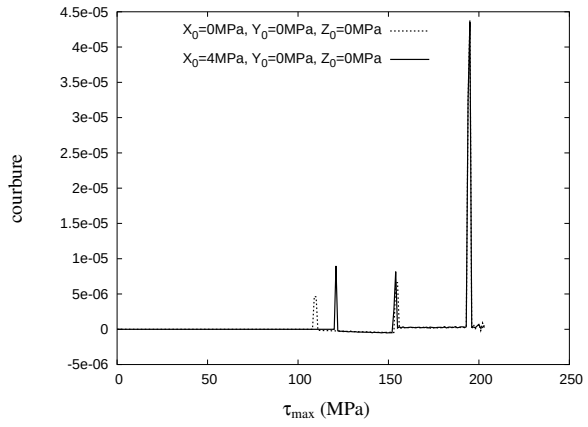



*Figure II.26 - Courbure de l'évolution de $\gamma^{\mathrm{f}}_{\max}$ en fonction de $\tau_{\max}$ pour $\sigma = 225MPa$ et $X_0 = 4MPa$, $Y_0 = 0MPa$, $Z_0 = 0MPa$*

[8]Comme on considère une distribution de contraintes et des champs de déformations uniformes, le champ de contraintes résiduelles $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ ne doit pas être considéré. En fait, les contraintes internes jouent le rôle des contraintes résiduelles, mais à une échelle microscopique inférieure à celle du volume de référence élémentaire.

La seule différence est le décalage du premier pic, indicateur du début de l'écoulement plastique. Il est maintenant localisé pour une torsion de $121MPa$ au lieu de $110MPa$. La conséquence de cette initialisation est donc un retardement du début de l'écoulement plastique, ce qui est confirmé par le calcul théorique qui localise ce début d'écoulement à $\tau \simeq 121MPa$. L'initialisation n'a donc a priori aucune influence sur la charge d'adaptation numérique.

Pour confirmer cette première observation, simulons le cas où les contraintes internes sont initialisées par exemple à $X_0 = -10MPa,\ Y_0 = 2MPa,\ Z_0 = 1MPa$. La figure II.27 correspondant à cette initialisation indique que, comme pour la précédente, seule la position du pic indicateur du début de l'écoulement plastique est modifiée. Le début de l'écoulement plastique est avancé à $\tau = 74MPa$. A nouveau, ce résultat est confirmé par le calcul théorique puisque celui-ci fournit la valeur de $73.9MPa$ pour le début de l'écoulement plastique.

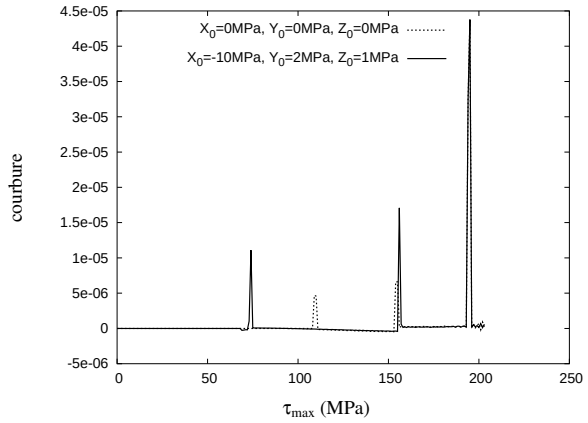



*Figure II.27 - Courbure de l'évolution de $\gamma^{\mathrm{f}}_{\max}$ en fonction de $\tau_{\max}$ pour $\sigma = 225MPa$ et $X_0 = -10MPa,\ Y_0 = 2MPa,\ Z_0 = 1MPa$*

Enfin, nous effectuons une troisième simulation pour laquelle nous initialisons les contraintes internes par $X_0 = 50MPa,\ Y_0 = 0MPa,\ Z_0 = -12MPa$ qui sont proches des valeurs asymptotiques des contraintes internes obtenues pour la charge d'adaptation de cet exemple. On a alors la figure II.28. Dans ce dernier cas, les deux premiers pics ont disparu, ce qui ressemble alors fortement à la figure obtenue dans le cas où la transition entre élasticité et plasticité et donc adaptation élastoplastique se produit très rapidement (voir par exemple figure II.13). Théoriquement, l'intensité de torsion pour laquelle l'écoulement plastique débute est d'environ $192.81MPa$, ce qui confirme le fait que la transition entre les différents régimes soit rapide et qu'il ne subsiste que le pic détectant la charge d'adaptation élastoplastique. Mais, comme dans les deux cas précédents, la charge d'adaptation élastoplastique numérique n'est pas modifiée.

Il semble donc que l'initialisation des contraintes internes ne joue pas de rôle prépondérant sur la charge d'adaptation élastoplastique numérique, mais seulement sur la charge de début d'écoulement plastique et sur la charge de fin d'adaptation élastoplastique en seulement deux cycles. Ce résultat est donc en accord avec les principes de base de l'adaptation élastoplastique, puisque ceux-ci supposent que la limite d'adaptation ne dépend pas de l'état initial.

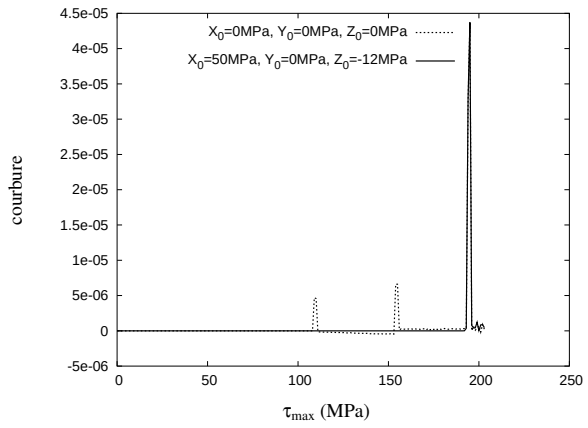



*Figure II.28 - Courbure de l'évolution de* $\gamma^{\mathrm{f}}_{\max}$ *en fonction de* $\tau_{\max}$ *pour* $\sigma = 225MPa$ *et* $X_0 = 50MPa,\ Y_0 = 0MPa,\ Z_0 = -12MPa$

## II.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre la méthode pas à pas classique pour une éprouvette sous traction constante et torsion alternée en état plan de déformation. Un critère de détection numérique de la charge d'adaptation élastoplastique a été proposé, implémenté et testé. Les résultats fournis sont cohérents au moins pour la détection du début de l'écoulement plastique et le semblent pour la charge d'adaptation. Pour le confirmer, nous nous proposons de calculer une solution théorique pour ce problème au chapitre suivant. De plus, avec ces simulations, nous avons vu apparaître une zone garantissant une meilleure sauvegarde de la structure que le domaine d'adaptation classique dans laquelle l'adaptation élastoplastique numérique a lieu en deux cycles. Une formulation théorique correspondant à cette zone pourrait être particulièrement intéressante du point de vue pratique. La comparaison avec le modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988) a montré que la différence entre celui-ci et le modèle prenant en compte l'écrouissage cinématique non linéaire est relativement importante. En outre, nous avons pu remarquer que la charge d'adaptation élastoplastique numérique n'est pas modifiée par l'initialisation des contraintes internes. Ce résultat est des plus rassurant sur les fondements de l'adaptation élastoplastique qui stipulent que le facteur d'adaptation élastoplastique ne dépend pas de l'état initial. Enfin, malgré l'absence de démonstration du théorème de Melan (1936) dans le cadre des matériaux standards implicites, il semblerait au regard de l'évolution des contraintes internes qu'il soit effectivement vérifié, au moins sur l'exemple traité.

# Chapitre III

# Approche du bipotentiel pour un état de traction constante et torsion alternée homogène

Dans le cadre des matériaux standards implicites, les travaux de de Saxcé et al. (2000) ont montré qu'une solution analytique pour le facteur d'adaptation pouvait être obtenue pour un tube mince sous traction constante et torsion alternée en état plan de contrainte. Une formule similaire a été obtenue par Bodovillé et de Saxcé (2001) avec la règle d'écrouissage cinématique non linéaire combinée à de l'écrouissage isotrope. Ces travaux semblent prometteurs, mais la cohérence de ces résultats n'est pas démontrée. En effet, les théorèmes de bornes ont été étendus à la classe des matériaux standards implicites sous la condition qu'un champ de contraintes résiduelles existe, résultat qui n'a pas encore été prouvé jusqu'à maintenant. Dans ce chapitre, nous montrerons la validité de la solution au moins pour un exemple en la comparant aux résultats obtenus par la méthode pas à pas classique. Pour cela, dans un premier temps, nous déterminerons la solution analytique par l'approche du bipotentiel pour le problème de l'état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane. Nous pourrons ensuite comparer celle-ci aux résultats issus de la méthode pas à pas développée au chapitre précédent. Dans un second temps, comme les principaux problèmes d'adaptation élastoplastique ne peuvent faire l'objet d'une résolution analytique, nous nous intéresserons à l'utilisation de la programmation

mathématique dans le cadre des matériaux standards implicites. Le problème de l'état de traction constante et torsion alternée homogène sera formulé et implémenté en utilisant les outils de l'optimisation et les résultats issus de cette méthode seront comparés à la solution analytique.

## III.1 Solution analytique par la méthode du bipotentiel

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de déterminer une solution analytique pour l'exemple de l'état de traction constante et torsion alternée homogène étudié au chapitre précédent par la méthode pas à pas classique. A l'aide du concept de matériaux standards implicites, nous montrerons ensuite que la solution obtenue est la solution exacte. Enfin, pour se convaincre complètement de la cohérence de cette solution, nous la comparerons avec les résultats obtenus par la méthode pas à pas au chapitre précédent.

### III.1.1 Un bipotentiel pour la règle d'écrouissage cinématique non linéaire

Comme cela a été rappelé et démontré au chapitre I, paragraphe I.5.3, la règle d'écoulement associée à la règle d'écrouissage cinématique non linéaire admet un bipotentiel. Dans un premier temps, rappelons les notations utilisées. Les variables vitesses de déformations sont notées $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p})$, où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ désigne le tenseur des vitesses de déformations plastiques, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\dot{p}$ sont respectivement les vitesses des variables d'écrouissage cinématique et isotrope. Les variables associées sont notées $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R)$, où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $R$ et $\boldsymbol{X}$ sont respectivement identifiés au seuil d'écoulement courant et aux contraintes internes.

Soit $K$ le domaine élastique défini par :

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) \text{ tel que } \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) - R \leq 0\}$$

où

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X} \| = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})'' : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})''}$$

Alors $K^*$, le cône polaire de $K$, est défini par :

$$K^* = \{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \text{ tels que } \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \dot{p} \leq 0\}$$

avec :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \|^* = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$

La loi d'écoulement plastique se met sous la forme :

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \end{cases} \tag{III.1}$$

En introduisant les variables $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p})$, $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R)$, il a été montré que la fonction suivante :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}, R) + \Psi_{K^*}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}\right) + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

est un bipotentiel et qu'elle permet de retrouver la loi d'écoulement plastique (III.1). Autrement dit, le bipotentiel $b$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} \text{ si } \begin{cases} \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \leq R \\ \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \dot{p} \leq 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p} = 0 \end{cases} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous ne considérerons pas l'écrouissage isotrope, le seuil d'écoulement $R$ sera donc supposé constant et égal à la valeur $\sigma_Y$. Pour ce cas particulier, les vitesses généralisées $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ se réduisent à $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ et les contraintes généralisées $\boldsymbol{\pi}$ à $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X})$. Le domaine élastique $K$ est alors défini par :

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) - \sigma_Y \leq 0\}$$

Comme le seuil d'écoulement plastique $\sigma_Y$ est strictement positif, la règle d'écrouissage isotrope s'écrit :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{p}$$

La loi d'écoulement plastique se met donc sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \end{cases} \tag{III.2}$$

qui diffère de (III.1). La formulation d'un bipotentiel pour la loi d'écoulement (III.2) conduit alors à l'introduction de la fonction :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\right) + \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \tag{III.3}$$

**Proposition.**
La fonction $b$ définie par (III.3) est un bipotentiel.

**Preuve :**
La démonstration est similaire à celle effectuée au chapitre I, paragraphe I.5.3 dans le cas où le seuil d'écoulement n'est pas nécessairement constant. Elle consiste à montrer que :

$$\forall(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \in V \times F,\ b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

Si au moins une des deux conditions suivantes :

(i) $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \in K$

(ii) $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$

n'est pas vérifiée, le bipotentiel prend la valeur $+\infty$ et l'inégalité est alors trivialement satisfaite.

Dans le cas où les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{X} : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Comme la condition (i) est vérifiée, elle fournit :

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \leq \sigma_Y$$

On obtient donc :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq \sigma_Y \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{X} : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Enfin, en réinjectant l'égalité (ii) dans cette inégalité, on aboutit à :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

ce qui montre bien que la fonction $b$ est un bipotentiel.

Montrons maintenant que ce bipotentiel (III.3) permet de formuler la règle d'écoulement (III.2).

**Proposition.**
Les couples extrémaux pour le bipotentiel (III.3) vérifient (III.2) et réciproquement.

**Preuve :**
Le même schéma de démonstration que dans le chapitre I, paragraphe I.5.3, est adopté. Supposons que $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est un couple extrémal pour le bipotentiel. Alors d'après la définition des couples extrémaux :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

Le bipotentiel doit donc prendre des valeurs finies, ce qui implique nécessairement que :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \in K \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2} \dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à montrer que :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})$$

Comme $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est un couple extrémal pour le bipotentiel, on a :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial b_{\boldsymbol{\pi}}(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$$

ou encore :

$$\forall \boldsymbol{\pi}', \quad b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}') - b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.(\boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi})$$

L'application de cette propriété ici fournit :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{X}') \in K \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$
$$\left(\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty} - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{X}') \in K \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$
$$\left(\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty} - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq [(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Comme

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \end{cases}$$

on obtient :

$$-(\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}) : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \left(\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'}{X_\infty} - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Finalement, on a :

$$\forall \boldsymbol{\pi}' \text{ tel que } (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{X}') \in K, \quad 0 \geq [(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

ce qui est équivalent, d'après les définitions B.6 et B.7 de l'annexe B, à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})$$

Réciproquement, montrons que si :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \end{cases}$$

alors le couple $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ est extrémal pour le bipotentiel. Comme $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ et $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X})$ appartient à $K$, il vient :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

D'autre part, comme $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Enfin, la transformée de Legendre-Fenchel de $\Psi_K$ (déjà calculée dans le paragraphe I.3.1 du chapitre I) étant donnée par :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_Y\, \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

l'inégalité de Fenchel (propriété (B.9) de l'annexe B), fournit :

$$\Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) + \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma_Y \, \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Finalement, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma_Y \, \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

ce qui achève la démonstration.

Pour montrer que la solution analytique obtenue est la solution exacte, on s'appuie sur la formulation variationnelle du problème d'adaptation élastoplastique, définie au paragraphe I.6.2 du chapitre I. Dans le cadre de travail de ce chapitre, la bifonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\beta_S(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{X}, \lambda) = \int_\Omega \oint \Bigg\{ & \Psi_K(\lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\right) \\ & + \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \Bigg\} \, dt \, d\Omega\end{aligned} \tag{III.4}$$

où $\boldsymbol{\sigma}^c$ est le tenseur de contraintes élastiques associé aux efforts constants[9]. Rappelons enfin que pour le facteur de charge d'adaptation $\lambda^a$ (paragraphe I.6.2.a du chapitre I), on a :

$$\beta_S(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{X}, \lambda^a) = 0$$

Cette dernière propriété permettra, lorsque l'on aura déterminé une solution théorique pour $\lambda^a$, de montrer que cette solution est bien la solution exacte. En effet, notre démarche sera de construire la bifonctionnelle $\beta_S$ et de montrer qu'elle s'annule pour cette solution.

### III.1.2 Notations et hypothèses

On s'intéresse de nouveau à l'exemple d'un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane, étudié par la méthode pas-à-pas au chapitre précédent. Les mêmes notations et hypothèses que celles qui ont été introduites au chapitre II, paragraphes II.1.1 et II.1.2, sont utilisées ici. En effet, puisque les résultats obtenus par la méthode pas à pas seront comparés ultérieurement à la solution théorique, il est bien sûr commode d'adopter le même cadre de travail.

En considérant le critère de Von-Mises, la fonction d'écoulement prend alors la forme :

$$f(\sigma, \tau, X, Y, Z) = (\sigma - X)^2 + (\nu\sigma - Z)^2 + (\tau - Y)^2 + 2(X + Z)^2 - (\sigma + Z)(\nu\sigma + X) - \sigma_Y^2$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma, \; X_{11} = X, \\ \sigma_{12} = \dfrac{\tau}{\sqrt{3}}, \; X_{12} = \dfrac{Y}{\sqrt{3}} \\ \sigma_{33} = \nu\sigma, \; X_{33} = Z \end{cases} \tag{III.5}$$

[9]Lorsque une partie des efforts appliqués sont constants, le tenseur de contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}^e$ est décomposé en $\lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c$.

En supposant l'incompressibilité des déformations plastiques, l'expression du tenseur des vitesses de déformations plastiques est :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}^p_{11} & \dot{\varepsilon}^p_{12} & 0 \\ \dot{\varepsilon}^p_{12} & -(\dot{\varepsilon}^p_{11} + \dot{\varepsilon}^p_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}^p_{33} \end{bmatrix}$$

et le tenseur des vitesses des variables internes cinématiques a la même forme :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{12} & 0 \\ \dot{\alpha}_{12} & -(\dot{\alpha}_{11} + \dot{\alpha}_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix}$$

Dans le même esprit que pour les contraintes, on pose :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p_{11} = \dot{\varepsilon}, \\ \dot{\varepsilon}^p_{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{\gamma}, \\ \dot{\varepsilon}^p_{33} = \dot{\eta} \end{cases} \tag{III.6}$$

Comme le seuil d'écoulement plastique $\sigma_Y$ est strictement positif, la règle d'écrouissage isotrope s'écrit :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{p}$$

ce qui, pour la déformation plastique cumulée devient :

$$\dot{p} = \varepsilon_{eq}(\dot{\varepsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} = \sqrt{\frac{4}{3}(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\varepsilon}\dot{\eta}) + \dot{\gamma}^2}$$

Rappelons que pour cet exemple, la règle d'écrouissage cinématique non linéaire (I.31) s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\dot{p}$$

et conduit ici à :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11} - \dfrac{3}{2}\dfrac{X_{11}}{X_\infty}\dot{p} \\ \dot{\alpha}_{12} = \dot{\varepsilon}_{12} - \dfrac{3}{2}\dfrac{X_{12}}{X_\infty}\dot{p} \\ \dot{\alpha}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} - \dfrac{3}{2}\dfrac{X_{33}}{X_\infty}\dot{p} \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{11} = \dot{\alpha} \\ \dot{\alpha}_{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{\beta} \\ \dot{\alpha}_{33} = \dot{\xi} \end{cases}$$

et en utilisant les notations introduites dans (III.5) et (III.6), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\varepsilon} - \dfrac{3}{2}\dfrac{X}{X_\infty}\dot{p} \\ \dot{\beta} = \dot{\gamma} - \dfrac{Y}{X_\infty}\dot{p} \\ \dot{\xi} = \dot{\eta} - \dfrac{3}{2}\dfrac{Z}{X_\infty}\dot{p} \end{cases}$$

La valeur unitaire est prise comme référence des contraintes de cisaillement ce qui permet d'identifier le facteur de charge, noté $\lambda$, au maximum de la contrainte de cisaillement. Par conséquent, en considérant un chargement cyclique, l'état de contrainte alternera entre deux extrema de la contrainte de cisaillement tels que, pour le maximum du cycle :

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma,\ \tau = \lambda\ (\tau^0 = 1) \\ &\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_+,\ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_+,\ \dot{\eta} = \dot{\eta}_+,\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_+,\ \dot{\beta} = \dot{\beta}_+,\ \dot{\xi} = \dot{\xi}_+ \end{aligned} \tag{III.7}$$

et pour le minimum du cycle :

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma,\ \tau = -\lambda\ (\tau^0 = -1) \\ &\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_-,\ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_-,\ \dot{\eta} = \dot{\eta}_-,\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_-,\ \dot{\beta} = \dot{\beta}_-,\ \dot{\xi} = \dot{\xi}_- \end{aligned} \tag{III.8}$$

Comme on considère une distribution de contraintes et des champs de déformations uniformes, le champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ n'a pas à être considéré. En effet, ce sont les contraintes internes $\overline{\boldsymbol{X}}$ qui jouent le rôle de contraintes résiduelles, mais à une échelle plus petite que celle du volume élémentaire. Dans la suite, elles seront considérées comme indépendantes du temps, mais nous les noterons simplement $\boldsymbol{X}$.

Enfin, par souci de simplicité, un volume unitaire $\Omega$ est maintenant considéré, et ce de manière à éliminer les intégrales de volumes.

### III.1.3 Calcul du facteur d'adaptation

Maintenant que le cadre de travail a été défini, commençons le calcul proprement dit du facteur d'adaptation $\lambda$. Remarquons d'abord que la ruine aura lieu par rochet seulement dans la direction du chargement en traction puisque dans cette direction de chargement, la contrainte moyenne est non nulle (voir Chaboche (1994)). Cette remarque est confirmée par les simulations effectuées au chapitre précédent. En effet, si l'on se reporte au paragraphe II.1.4 du chapitre II, les courbes contraintes-déformations obtenues correspondent exactement à ce comportement : pour l'amplitude de torsion la plus importante, les évolutions des déformations axiale et transversale sont plutôt caractéristiques d'un comportement de type rochet (contrainte moyenne non nulle), tandis que l'évolution de la déformation de cisaillement est plutôt caractéristique d'un comportement de type accommodation (contrainte moyenne nulle). Théoriquement, cela implique que l'incrément de vitesses de déformations sur un cycle de chargement dans la direction de la torsion est nul :

$$\oint \dot{\gamma} dt = 0$$

On peut noter que les contributions qui ne disparaissent pas dans les intégrales de temps sont seulement reliées aux extréma du cycle. A chaque extrémum, on considère les vitesses constantes pendant un intervalle de temps unitaire, ce qui mène à :

$$\dot{\gamma}_+ + \dot{\gamma}_- = 0$$

D'autre part, la condition de normalisation (I.21) combinée avec (III.7) et (III.8) entraîne :

$$\oint \tau \dot{\gamma} dt = \lambda \oint \tau^0 \dot{\gamma} dt = \lambda(\dot{\gamma}_+ - \dot{\gamma}_-) = \lambda \tag{III.9}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_+ = -\dot{\gamma}_- &= \frac{1}{2} \\ \dot{p} &= \sqrt{\frac{4}{3}(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\varepsilon}\dot{\eta}) + \frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{III.10}$$

Comme cela a été montré par Martin (1975), la ruine réelle par rochet a lieu seulement pour un facteur de charge plus grand que le facteur de charge d'adaptation élastoplastique. Après une phase de transition, le champ des contraintes internes tend vers une solution asymptotique périodique. En particulier, si l'adaptation élastoplastique a lieu, comme les déformations plastiques et les autres variables internes se stabilisent, le champ de contraintes internes tend vers un champ asymptotique indépendant du temps. On peut remarquer que c'est ce qui a été observé au paragraphe II.2.4 du chapitre II dans lequel l'évolution des contraintes internes en fonction du temps était étudiée. Dans ce paragraphe II.2.4, on a pu constater que lorsque l'adaptation a lieu, les champs de contraintes internes tendaient effectivement vers des champs asymptotiques, constants au cours du temps.

Si l'on se place dans ce cadre et que l'on suppose que les maxima du cycle sont localisés sur la surface de charge, on a :

$$\begin{aligned} &(\sigma - X)^2 + (\nu\sigma - Z)^2 + (\lambda - Y)^2 + 2(X + Z)^2 - (\sigma + Z)(\nu\sigma + X) - \sigma_Y^2 = 0 \\ &(\sigma - X)^2 + (\nu\sigma - Z)^2 + (-\lambda - Y)^2 + 2(X + Z)^2 - (\sigma + Z)(\nu\sigma + X) - \sigma_Y^2 = 0 \end{aligned}$$

La différence entre ces deux équations donne :

$$(\lambda - Y)^2 - (-\lambda - Y)^2 = -4\lambda Y = 0 \tag{III.11}$$

Comme $\lambda$ n'est pas nul, $Y$ est nul (ce qui est en accord avec les simulations effectuées au paragraphe II.2.4 du chapitre II). Le critère d'écoulement devient alors :

$$(\sigma - X)^2 + (\nu\sigma - Z)^2 + 2(X + Z)^2 - (\sigma + Z)(\nu\sigma + X) + \lambda^2 = \sigma_Y^2$$

de solution positive :

$$\lambda = \sigma_Y \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_Y^2}\left((\sigma - X)^2 + (\nu\sigma - Z)^2 + 2(X + Z)^2 - (\sigma + Z)(\nu\sigma + X)\right)} \tag{III.12}$$

On se propose maintenant de déterminer les valeurs de $X$ et $Z$ à la ruine en tenant compte de la loi d'écoulement et de la règle d'écrouissage. Pour ce faire, on calcule $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $\dot{p}$, de manière à obtenir une expression explicite de $X$ et $Z$ à l'aide de la règle d'écrouissage. La règle d'écoulement plastique fournit :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\zeta}\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\zeta}((2-\nu)\sigma - 3X)\\ \dot{\gamma} &= \dot{\zeta}\frac{\partial f}{\partial \tau} = 2\dot{\zeta}\tau\\ \dot{\eta} &= \dot{\zeta}\frac{\partial f}{\partial (\nu\sigma)} = \dot{\zeta}((2\nu-1)\sigma - 3Z)\end{aligned} \tag{III.13}$$

En particulier, pour les extrema du cycle :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_+ &= 2\dot{\zeta}_+\lambda\\ \dot{\gamma}_- &= -2\dot{\zeta}_-\lambda\end{aligned}$$

En tenant compte de (III.10), on obtient l'expression du multiplicateur plastique :

$$\dot{\zeta}_\pm = \frac{1}{4\lambda}$$

D'où, avec la règle d'écoulement plastique (III.13) et l'expression (III.10) de $\dot{p}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\pm &= \frac{1}{4\lambda}[(2-\nu)\sigma - 3X]\\ \dot{\eta}_\pm &= \frac{1}{4\lambda}[(2\nu-1)\sigma - 3Z]\\ \dot{p}_\pm &= \frac{\sigma_Y}{2\lambda}\end{aligned} \tag{III.14}$$

La règle d'écrouissage cinématique non linéaire permet alors d'écrire, avec $\sigma_\infty = X_\infty + \sigma_Y$ :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_\pm &= \frac{1}{4\lambda}[(2-\nu)\sigma - 3X\frac{\sigma_\infty}{X_\infty}]\\ \dot{\xi}_\pm &= \frac{1}{4\lambda}[(2\nu-1)\sigma - 3Z\frac{\sigma_\infty}{X_\infty}]\end{aligned} \tag{III.15}$$

Une conséquence directe du développement précédent est :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_+ &= \dot{\alpha}_-\\ \dot{\xi}_+ &= \dot{\xi}_-\end{aligned} \tag{III.16}$$

D'autre part, comme le champ de contraintes internes tend vers un champ asymptotique, l'incrément de contraintes internes sur un cycle s'annule :

$$\begin{aligned}\triangle X &= \oint \dot{X}dt = \frac{2}{3}C\oint \dot{\alpha}dt = \frac{2}{3}C(\dot{\alpha}_+ + \dot{\alpha}_-) = 0\\ \triangle Z &= \oint \dot{Z}dt = \frac{2}{3}C\oint \dot{\xi}dt = \frac{2}{3}C(\dot{\xi}_+ + \dot{\xi}_-) = 0\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_+ + \dot{\alpha}_- &= 0\\ \dot{\xi}_+ + \dot{\xi}_- &= 0\end{aligned}$$

En combinant avec (III.16), il vient :

$$\dot{\alpha}_+ = \dot{\alpha}- = 0$$
$$\dot{\xi}_+ = \dot{\xi}_- = 0$$

Par conséquent, des expressions (III.15) de $\dot{\alpha}_\pm$ et $\dot{\xi}_\pm$, on tire les valeurs des contraintes internes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{(2-\nu)\sigma X_\infty}{3\sigma_\infty} \\ Z &= \frac{(2\nu-1)\sigma X_\infty}{3\sigma_\infty} \end{aligned} \tag{III.17}$$

En réinjectant ces expressions dans (III.12), on obtient l'expression suivante pour le facteur de charge d'adaptation élastoplastique :

$$\lambda = \sigma_Y \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2 \sigma_\infty^2}(1-\nu+\nu^2)(\sigma_\infty - X_\infty)^2}$$

soit de manière équivalente, puisque $\sigma_\infty = \sigma_Y + X_\infty$ :

$$\lambda = \sigma_Y \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_\infty^2}(1-\nu+\nu^2)} \tag{III.18}$$

**Remarque :**
Le cas particulier $\nu = 0$ redonne la solution pour un état de contrainte plane, résultat connu, que l'on trouvera énoncé par Lemaitre et Chaboche (1990) et qui a été prouvé dans de Saxcé et al. (2000).

### III.1.4 Démonstration de l'exactitude de la solution analytique

Maintenant qu'une solution analytique a été déterminée, montrons à l'aide de la formulation variationnelle (III.4) du problème d'adaptation élastoplastique pour les matériaux standards implicites, que c'est la solution exacte. Comme précédemment annoncé, l'idée clé est de considérer la bifonctionnelle correspondante :

$$\begin{aligned} \beta_S(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{X}, \lambda) = \int_\Omega \oint \Bigg\{ & \Psi_K(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \boldsymbol{X}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\right) \\ & + \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \Bigg\} \, dt \, d\Omega \end{aligned}$$

et de prouver qu'elle vaut zéro[10]. La solution analytique déterminée dans le paragraphe précédent vérifiant les conditions d'appartenance au domaine élastique $K$ et la règle d'écrouissage cinématique non linéaire, les fonctions indicatrices présentes dans la bifonctionnelle sont nulles :

$$\Psi_K(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \boldsymbol{X}) = 0$$

[10]Rappelons que les champs de contraintes et de déformations étant uniformes dans l'exemple étudié, le champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ n'a pas à être considéré.

et :

$$\Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\right) = 0$$

On a alors :

$$\beta_S = \int_\Omega \oint \left\{ \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\sigma}^c:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt\, d\Omega$$

Comme on considère un volume unitaire, il vient :

$$\beta_S = \oint \left\{ \left(\sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X}}{X_\infty}\right)\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\sigma}^c:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt$$

En utilisant les notations du paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda\tau^0\dot{\gamma}\\
&\boldsymbol{\sigma}^c:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma\dot{\varepsilon} + \nu\sigma\dot{\eta}\\
&\frac{3}{2}\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X} = 3X^2 + Y^2 + 3Z^2 + 3XZ
\end{aligned}$$

L'expression de la bifonctionnelle devient :

$$\beta_S = \oint \left\{ \left[\frac{3X^2 + Y^2 + 3Z^2 + 3XZ}{X_\infty} + \sigma_Y\right]\dot{p} - \sigma\dot{\varepsilon} - \nu\sigma\dot{\eta} \right\} dt - \lambda\oint \tau^0\dot{\gamma}\, dt$$

soit, en tenant compte de la condition de normalisation (III.9) :

$$\beta_S = \oint \left\{ \left[\frac{3X^2 + Y^2 + 3Z^2 + 3XZ}{X_\infty} + \sigma_Y\right]\dot{p} - \sigma\dot{\varepsilon} - \nu\sigma\dot{\eta} \right\} dt - \lambda$$

D'après (III.11), $Y$ est nul. D'où :

$$\beta_S = \oint \left\{ \left[\frac{3X^2 + 3Z^2 + 3XZ}{X_\infty} + \sigma_Y\right]\dot{p} - \sigma\dot{\varepsilon} - \nu\sigma\dot{\eta} \right\} dt - \lambda$$

Comme la contrainte de traction $\sigma$ est constante et comme les contraintes internes $X$ et $Z$ sont indépendantes du temps, on a :

$$\beta_S = \left[\frac{3X^2 + 3Z^2 + 3XZ}{X_\infty} + \sigma_Y\right]\oint \dot{p}\, dt - \sigma\oint \dot{\varepsilon}\, dt - \nu\sigma\oint \dot{\eta}\, dt - \lambda$$

En tenant compte du fait que les seules contributions qui ne disparaissent pas dans les intégrales en temps sont reliées aux extrema du cycle, on a :

$$\beta_S = \left(3\frac{X^2 + Z^2 + XZ}{X_\infty} + \sigma_Y\right)(\dot{p}_+ + \dot{p}_-) - \sigma(\dot{\varepsilon}_+ + \dot{\varepsilon}_-) - \nu\sigma(\dot{\eta}_+ + \dot{\eta}_-) - \lambda$$

Enfin, en injectant les expressions explicites (III.14) de $\dot{p}_\pm$, $\dot{\varepsilon}_\pm$, $\dot{\eta}_\pm$, trouvées précédemment, la bifonctionnelle se réduit à :

$$\beta_S = \frac{1}{\lambda}\left\{\sigma_Y^2 - \lambda^2 - (1-\nu+\nu^2)\sigma^2 + \frac{3\sigma_Y}{X_\infty}(X^2+Z^2+XZ) + \frac{3}{2}(X+\nu Z)\sigma\right\}$$

Il reste maintenant à remplacer les contraintes internes par leurs expressions (III.17). Après simplifications, il vient :

$$\beta_S = \frac{1}{\lambda}\left\{\sigma_Y^2 - \lambda^2 - (1-\nu+\nu^2)\frac{\sigma^2}{\sigma_\infty^2}\left[\sigma_\infty^2 - \sigma_Y X_\infty - \sigma_\infty X_\infty\right]\right\}$$

De plus, comme $\sigma_\infty = \sigma_Y + X_\infty$, on obtient :

$$\sigma_\infty^2 - \sigma_Y X_\infty - \sigma_\infty X_\infty = (\sigma_Y + X_\infty)^2 - \sigma_Y X_\infty - (\sigma_Y + X_\infty)X_\infty = \sigma_Y^2$$

Finalement, l'expression de la bifonctionnelle devient :

$$\beta_S = \frac{1}{\lambda}\left\{\sigma_Y^2 - \lambda^2 - (1-\nu+\nu^2)\frac{\sigma^2\sigma_Y^2}{\sigma_\infty^2}\right\}$$

En remplaçant le facteur d'adaptation $\lambda$ par son expression (III.18), on a finalement :

$$\beta_S = 0$$

Les considérations théoriques développées au chapitre I, paragraphe I.6.2.a, et rappelées au début de ce chapitre montrent donc que la solution analytique précédente $((\lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}))$ est bien la solution exacte.

### III.1.5 Comparaison avec les résultats de la méthode pas à pas

Maintenant que la solution théorique a été calculée par l'approche du bipotentiel, nous pouvons vérifier sa cohérence en la comparant avec les résultats obtenus par la méthode pas à pas présentée au chapitre précédent. Pour cela, comme dans Bouby et al. (2006), nous allons confronter les valeurs des facteurs d'adaptation et des contraintes internes issues des deux méthodes.

#### III.1.5.a Comparaison des valeurs des facteurs d'adaptation élastoplastique

Comme dans le chapitre précédent, nous sélectionnons comme matériau l'acier 316L. Rappelons que les paramètres (constants) de ce matériau (Choteau (1999)) sont :

$$\begin{cases} C = 13230MPa \\ \gamma = 85MPa \\ \sigma_Y = 228MPa \end{cases}$$

avec la constante $X_\infty$ qui est calculée à partir des constantes $C$ et $\gamma$ : $X_\infty = \dfrac{C}{\gamma}$.

Dans un premier temps, examinons les valeurs des facteurs d'adaptation dans les deux cas. On calcule, à l'aide de la formule (III.18), les valeurs de la charge d'adaptation théorique, notées $\tau_a$ th., puis on les compare aux valeurs numériques, notées $\tau_a$ num., obtenues dans le tableau II.1 du chapitre II (voir tableau III.1). Un très bon accord est observé entre les résultats théoriques et numériques puisque l'erreur relative maximum, notée $e$, est de 0.44%.

*Tableau III.1 - Comparaison des valeurs analytiques avec celles obtenues par la méthode pas à pas de la charge d'adaptation $\tau_a$ pour l'acier 316L en fonction de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma$ $(MPa)$ | $\tau_a$ th. $(MPa)$ | $\tau_a$ num. $(MPa)$ | $e(\%)$ | $\sigma$ $(MPa)$ | $\tau_a$ th. $(MPa)$ | $\tau_a$ num. $(MPa)$ | $e(\%)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 228.000 | 228 | 0.00 | 225 | 194.573 | 195 | 0.22 |
| 25 | 227.617 | 228 | 0.17 | 250 | 185.864 | 186 | 0.07 |
| 50 | 226.465 | 227 | 0.23 | 275 | 175.736 | 176 | 0.15 |
| 75 | 224.532 | 225 | 0.44 | 300 | 163.928 | 164 | 0.04 |
| 100 | 221.797 | 222 | 0.09 | 325 | 150.042 | 150 | 0.03 |
| 125 | 218.230 | 218 | 0.11 | 350 | 133.432 | 133 | 0.32 |
| 150 | 213.790 | 214 | 0.10 | 375 | 112.903 | 113 | 0.08 |
| 175 | 208.420 | 208 | 0.20 | 400 | 85.680 | 86 | 0.37 |
| 200 | 202.048 | 202 | 0.03 | 425 | 39.828 | 40 | 0.43 |

#### III.1.5.b Comparaison des valeurs des contraintes internes

Les formules (III.17) et (III.11) fournissent un autre moyen de comparaison des résultats : les valeurs des contraintes internes à la ruine. Les valeurs numériques sont calculées pour une contrainte de traction fixée et une contrainte de cisaillement égale à la charge d'adaptation numérique déterminée précédemment, en considérant qu'après 1000 cycles, l'adaptation est atteinte numériquement. On peut alors comparer les valeurs analytiques des composantes des contraintes internes aux valeurs numériques dans le tableau III.2.

*Tableau III.2 - Comparaison des valeurs analytiques avec celles obtenues par la méthode pas à pas des contraintes internes pour l'acier 316L en fonction de la contrainte de traction $\sigma$ (la valeur analytique de la contrainte interne $Y_{th}$ est 0.0MPa (III.11))*

| $\sigma$ $(MPa)$ | $Xth$ $(MPa)$ | $Zth$ $(MPa)$ | $X$ $(MPa)$ | $Z$ $(MPa)$ | $Y$ $(MPa)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 5.747 | -1.352 | 5.747 | -1.352 | ± 0.382 |
| 50 | 11.495 | -2.705 | 11.494 | -2.704 | ± 0.533 |
| 75 | 17.242 | -4.057 | 17.242 | -4.057 | ± 0.467 |
| 100 | 22.990 | -5.409 | 22.990 | -5.409 | ± 0.202 |
| 125 | 28.737 | -6.762 | 28.255 | -6.648 | 0.001 |
| 150 | 34.485 | -8.114 | 34.485 | -8.114 | ± 0.209 |
| 175 | 40.232 | -9.466 | 39.631 | -9.325 | 0.000 |
| 200 | 45.980 | -10.819 | 45.915 | -10.803 | 0.004 |
| 225 | 51.727 | -12.171 | 51.727 | -12.171 | ± 0.426 |
| 250 | 57.475 | -13.523 | 57.474 | -13.523 | ± 0.135 |
| 275 | 62.222 | -14.876 | 63.222 | -14.876 | ± 0.263 |
| 300 | 68.969 | -16.228 | 68.969 | -16.228 | ± 0.072 |
| 325 | 74.717 | -17.580 | 74.692 | -17.574 | 0.003 |
| 350 | 80.464 | -18.933 | 80.266 | -18.886 | 0.000 |
| 375 | 86.212 | -20.285 | 86.211 | -20.285 | ± 0.096 |
| 400 | 91.959 | -21.637 | 91.959 | -21.637 | ± 0.319 |
| 425 | 97.707 | -22.990 | 97.707 | -22.990 | ± 0.171 |

Commençons par les composantes $X$ et $Z$ des contraintes internes. Pour ces deux composantes, il y a un très bon accord entre les valeurs analytiques et numériques, confirmé par une erreur relative maximum de 2%. De plus, on peut remarquer que les cas où l'écart est le plus important correspondent à ceux où la charge d'adaptation numérique est sous-évaluée (on pourra par exemple observer les résultats obtenus dans le cas où la contrainte de traction $\sigma$ est égale à $175MPa$). Ceci est dû au fait que si l'on se place en dessous de la valeur exacte de la charge d'adaptation, les composantes $X$ et $Z$ des contraintes internes n'ont pas encore atteint leurs valeurs asymptotiques.

En ce qui concerne la composante $Y$ des contraintes internes, les valeurs numériques de celle-ci sont proches de la valeur analytique, zéro, lorsque la charge d'adaptation numérique est sous-évaluée. En effet, dans le cas contraire, lorsqu'on se place au dessus de la valeur exacte de la charge d'adaptation (par exemple pour $\sigma = 225MPa$), la composante $Y$ n'est pas nulle mais oscille autour de zéro, comme nous avions pu le constater sur la figure II.24 du chapitre II.

### III.1.5.c Courbe d'interaction

La courbe d'interaction (figure III.1) confirme le bon accord entre les valeurs théoriques et numériques de la charge d'adaptation. Il semble donc, bien que les fondements théoriques ne soient pas encore complètement établis (en particulier le théorème de Melan (Melan (1936)) pour les matériaux standards implicites), que l'approche du bipotentiel permette de déterminer la solution exacte pour la charge d'adaptation, au moins pour cet exemple. C'est donc une approche qui nous paraît prometteuse pour l'étude des problèmes d'adaptation.

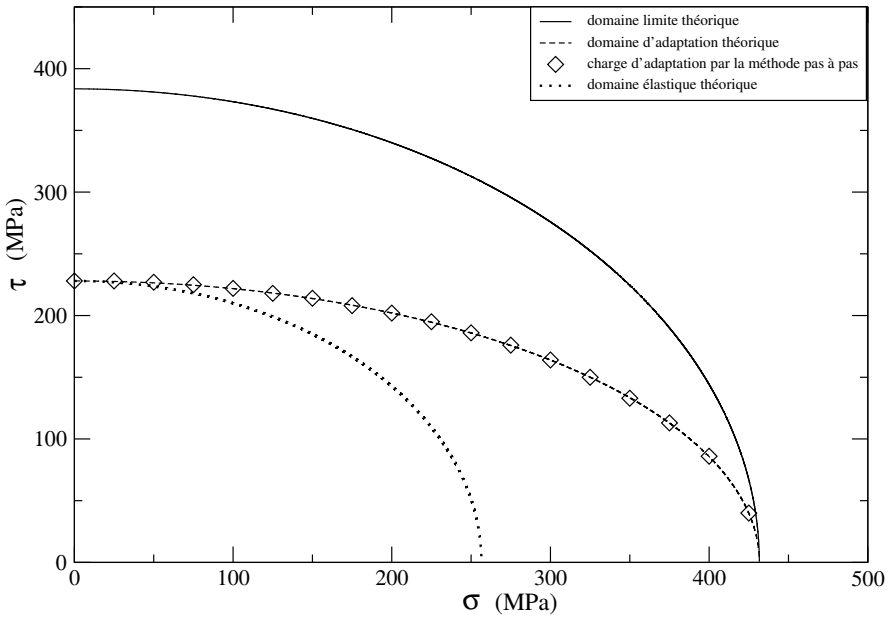



*Figure III.1 - Comparaison des valeurs du facteur d'adaptation théorique par l'approche du bipotentiel avec celles obtenues par la méthode pas à pas*

## III.2 Matériaux standards implicites et programmation mathématique

Nous avons pu constater que le concept de matériaux standards implicites permettait de construire une solution analytique pour le problème d'un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane cohérente avec les résultats obtenus par la méthode pas à pas. Néanmoins, les problèmes réels d'adaptation élastoplastique étant en général plus complexes que l'exemple étudié ici, la détermination d'une solution analytique ne sera en général pas envisageable. Il sera alors nécessaire de procéder à une résolution numérique. Etant donné les coûts prohibitifs de calculs de l'approche incrémentale, un intérêt croissant s'est manifesté pour les méthodes dites directes depuis les trois dernières décennies (voir par exemple Maier et al. (2000) pour une revue de ces développements). C'est Maier (Maier (1972)) qui constata le premier que la résolution par une approche directe d'un problème d'adaptation pouvait être faite grâce aux méthodes de programmation mathématique (pour les méthodes basées sur le Lagrangien augmenté, voir par exemple Pierre et Lowe (1975), Fortin et Glowinski (1982) et plus récemment Conn et al. (1992)). Nous allons donc nous intéresser à l'utilisation de la programmation mathématique dans le cadre des matériaux standards implicites. Pour cela, nous allons étudier, dans ce paragraphe, une nouvelle fois le problème d'un état de traction constante et torsion alternée homogène, mais en utilisant la programmation mathématique. Le problème d'optimisation sera donc construit par l'approche du bipotentiel puis les résultats de celui-ci seront comparés aux résultats théoriques établis dans le paragraphe précédent.

### III.2.1 Adaptation élastoplastique et programmation mathématique

Une alternative à l'approche incrémentale, développée sur un exemple au chapitre précédent, provient de l'approche directe. Celle-ci est basée sur les théorèmes de bornes de l'adaptation qui conduisent à la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes. Dans ce cas, il n'est alors pas nécessaire de connaître le trajet de chargement en totalité mais simplement son domaine de variations, ce qui présente un grand intérêt pour les temps de calculs dans la résolution des problèmes d'adaptation. En effet, comme l'ont montré Morelle et Nguyen-Dang Hung (1983), dans le cas où le critère d'écoulement plastique est défini par une fonction convexe, il suffit de vérifier la condition d'adaptation aux points anguleux du domaine de chargement pour que la condition soit vérifiée dans la totalité de celui-ci. Par exemple, pour deux charges $q_1$ et $q_2$ variant indépendamment l'une de l'autre dans des limites prescrites :

$$\begin{cases} q_1^{min} \leq q_1 \leq q_1^{max} \\ q_2^{min} \leq q_2 \leq q_2^{max} \end{cases}$$

cela signifie que s'il y a adaptation pour les points anguleux du domaine de chargement (points $P_1, P_2, P_3, P_4$ de la figure III.2), alors il y a adaptation pour tous les points du domaine. La procédure d'optimisation consistera donc à déterminer le plus grand domaine de chargement pour lequel il y a adaptation pour chacun de ses points anguleux.

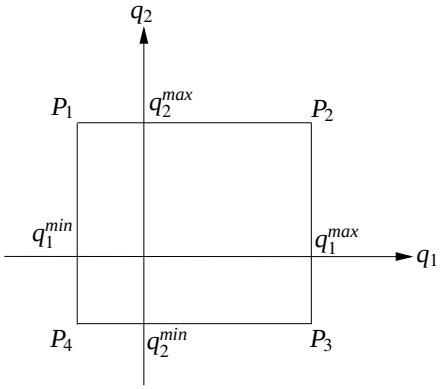



*Figure III.2 - Domaine de variations des charges*

### III.2.2 Formulation du problème de borne statique

Nous souhaitons maintenant appliquer l'approche directe à l'exemple que nous venons d'étudier théoriquement. Pour cela, puisque l'on se trouve dans le cadre des matériaux standards implicites, nous utilisons le problème de borne statique (I.61) énoncé au chapitre I :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \lambda \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $\overline{\boldsymbol{\pi}} = (\overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')$ désigne un champ de contraintes généralisées admissible et $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')$ est un champ de déformations généralisées admissible[11].

Rappelons ensuite que lorsque l'écrouissage isotrope n'est pas considéré, la règle d'écoulement avec l'écrouissage cinématique non linéaire admet un bipotentiel donné par (III.3) :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \Psi_K(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) + \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \right) + \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

où le champ de déformations généralisées $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ représente $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ et le champ de contraintes généralisées $\boldsymbol{\pi}$ représente $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X})$. Dans ce cas, le problème de borne statique (I.61) rappelé ci-dessus prend la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \Psi_K(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) + \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \right) \right. \right. \\ \qquad \left. \left. + \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \lambda \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}} \end{array} \right. \end{array}$$

[11] Le terme $\boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ provient de la décomposition de $\boldsymbol{\sigma}^e$ en $\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c$ où $\boldsymbol{\sigma}^c$ est le tenseur de contraintes élastiques associé aux efforts constants.

Une condition nécessaire pour qu'un maximum fini de cette fonction existe est donc que les fonctions indicatrices soient toutes nulles, ce qui se traduit par une autre formulation du problème d'optimisation :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \lambda \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}} \\ \Psi_K(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) = 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \; \forall t \\ \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \right) = 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \; \forall t \end{cases}$$

Finalement, en utilisant la définition des champs de contraintes généralisées introduite au chapitre I et la définition du domaine élastique $K$ rappelée au paragraphe III.1.1, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{\rho}},\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\rho}} \text{ est un champ de contraintes résiduelles} \\ \left[ \sigma_{eq}(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right]^2 - \sigma_Y^2 \leq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \; \forall t \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \; \forall t \end{cases}$$

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de l'exemple étudié analytiquement et par la méthode pas à pas : un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane. A nouveau, comme les champs de contraintes et de déformations sont uniformes, le champ de contraintes résiduelles $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ n'a pas à être considéré. De plus, le volume considéré sera supposé unitaire ce qui permet d'éliminer l'intégrale en volume. Comme le chargement imposé à l'éprouvette est constitué d'une traction constante et d'une torsion alternée, le domaine de chargement est réduit à une ligne (voir figure III.3).

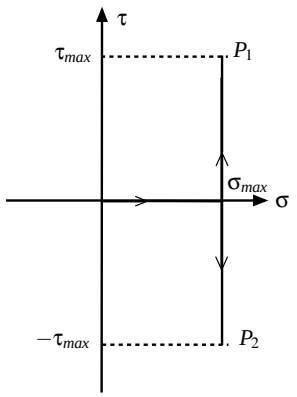



*Figure III.3 - Domaine de chargement*

Pour déterminer le facteur d'adaptation dans cet exemple, on va donc simplement chercher l'amplitude de torsion maximum pour laquelle l'adaptation se produit, soit telle qu'il y ait adaptation en $P_1$ et $P_2$. Le domaine de chargement sera donc représenté par ses sommets $P_1$ et $P_2$. Par conséquent, la somme continue temporelle devient une somme discrète sur les sommets du domaine de chargement $P_1$ et $P_2$.

En tenant compte de ces derniers éléments, on peut alors écrire le problème d'optimisation pour l'éprouvette sous traction constante et torsion alternée sous la forme discrétisée :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\text{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \left[ \sigma_{eq}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right]^2 - \sigma_Y^2 \leq 0, \ \forall k = 1,2 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0, \ \forall k = 1,2 \end{cases}$$

où les variables indicées par $k$ sont considérées au point $P_1$ pour $k = 1$ et au point $P_2$ pour $k = 2$.

Comme cela avait déjà été souligné au premier chapitre, on constate que ce problème est fortement couplé. En effet, les champs statiques et cinématiques sont présents dans le problème d'optimisation. On ne pourra donc pas déterminer les uns sans les autres. Dans un premier temps, appliquons cette formulation du problème de borne statique au cas où les variables cinématiques sont connues.

### III.2.3 Application au cas où les variables cinématiques sont connues

De manière à tester la formulation du problème de borne statique proposée dans le paragraphe précédent, on considère un cas où les variables cinématiques sont connues. Pour cela, on utilise les expressions des variables cinématiques provenant de l'étude analytique pour l'initialisation. Evidemment, cela ne correspond qu'à une vérification de la formulation puisque l'on initialise par le champ de vitesses de déformations admissible correspondant à la solution. Néanmoins, avant de tester une procédure de calcul plus complexe puisqu'elle nécessitera la détermination simultanée des variables statiques et cinématiques, il nous a semblé intéressant de procéder à ce test préliminaire. Dans ce cas, le problème d'optimisation prend la forme suivante :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\text{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \left[ \sigma_{eq}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right]^2 - \sigma_Y^2 \leq 0, \ \forall k = 1,2 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0, \ \forall k = 1,2 \end{cases}$$

La fonction objectif étant une fonction concave des inconnues $(\overline{\boldsymbol{X}}, \lambda)$ du problème, les contraintes égalités étant des fonctions affines de $(\overline{\boldsymbol{X}}, \lambda)$ et les contraintes inégalités étant des fonctions convexes de $(\overline{\boldsymbol{X}}, \lambda)$, l'implémentation de ce problème de maximisation ne présente aucune difficulté puisqu'il rentre complètement dans le cadre de l'optimisation convexe. L'utilisation d'une

méthode basée sur le Lagrangien augmenté (Pierre et Lowe (1975)) conduit alors aux résultats suivants pour la charge d'adaptation $\tau_a$ que l'on compare aux valeurs analytiques dans le tableau III.3. On peut alors constater que ces valeurs sont identiques à $10^{-3}$ près. Les solutions obtenues par programmation mathématique coïncident donc avec les résultats théoriques.

*Tableau III.3 - Comparaison des valeurs de la charge d'adaptation $\tau_a$ analytiques avec celles obtenues par la programmation mathématique pour l'acier 316L dans le cas où les variables cinématiques sont connues en fonction de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma\ (MPa)$ | $\tau_a\ (MPa)$ th. | $\tau_a\ (MPa)$ num. | $\sigma\ (MPa)$ | $\tau_a\ (MPa)$ th. | $\tau_a\ (MPa)$ num. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 228.000 | 228.000 | 225 | 194.573 | 194.573 |
| 25 | 227.617 | 227.617 | 250 | 185.864 | 185.864 |
| 50 | 226.465 | 226.465 | 275 | 175.736 | 175.736 |
| 75 | 224.532 | 224.532 | 300 | 163.928 | 163.928 |
| 100 | 221.797 | 221.797 | 325 | 150.042 | 150.042 |
| 125 | 218.230 | 218.230 | 350 | 133.432 | 133.432 |
| 150 | 213.790 | 213.790 | 375 | 112.903 | 112.903 |
| 175 | 208.420 | 208.420 | 400 | 85.680 | 85.680 |
| 200 | 202.048 | 202.048 | 425 | 39.828 | 39.829 |

Les expressions théoriques des contraintes internes fournissent un autre moyen de comparaison des résultats. Les valeurs analytiques et issues de la procédure d'optimisation sont reportées dans le tableau III.4, sauf en ce qui concerne la composante $Y$ qui est nulle théoriquement pour n'importe quelle amplitude de traction, ce qui est vérifié aussi dans le cas de la programmation mathématique.

*Tableau III.4 - Comparaison des valeurs analytiques avec celles obtenues par la programmation mathématique des contraintes internes pour l'acier 316L dans le cas où les variables cinématiques sont connues suivant les valeurs de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma\ (MPa)$ | $Xth\ (MPa)$ | $Zth\ (MPa)$ | $X\ (MPa)$ | $Z\ (MPa)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 5.747 | -1.352 | 5.747 | -1.352 |
| 50 | 11.495 | -2.705 | 11.495 | -2.705 |
| 75 | 17.242 | -4.057 | 17.242 | -4.057 |
| 100 | 22.990 | -5.409 | 22.990 | -5.409 |
| 125 | 28.737 | -6.762 | 28.737 | -6.762 |
| 150 | 34.485 | -8.114 | 34.485 | -8.114 |
| 175 | 40.232 | -9.466 | 40.232 | -9.466 |
| 200 | 45.980 | -10.819 | 45.980 | -10.819 |
| 225 | 51.727 | -12.171 | 51.727 | -12.171 |
| 250 | 57.475 | -13.523 | 57.474 | -13.523 |
| 275 | 63.222 | -14.876 | 63.222 | -14.876 |
| 300 | 68.969 | -16.228 | 68.970 | -16.228 |
| 325 | 74.717 | -17.580 | 74.717 | -17.580 |
| 350 | 80.464 | -18.933 | 80.464 | -18.933 |
| 375 | 86.212 | -20.285 | 86.212 | -20.285 |
| 400 | 91.959 | -21.637 | 91.959 | -21.637 |
| 425 | 97.707 | -22.990 | 97.707 | -22.990 |

Comme pour les valeurs de la charge d'adaptation, les erreurs sont quasiment nulles pour toutes les valeurs de la contrainte de traction. Ce résultat n'est en fait pas surprenant puisque la contrainte du problème d'optimisation correspondant à la règle d'écrouissage est linéaire en $\overline{\boldsymbol{X}}$, donc lorsque les variables cinématiques sont initialisées aux valeurs obtenues théoriquement, les contraintes internes sont déterminées de manière unique. Maintenant que cette vérification a été effectuée, intéressons-nous au cas où les variables cinématiques sont inconnues.

### III.2.4 Application au cas où les variables cinématiques sont inconnues

Lorsqu'on veut déterminer le facteur d'adaptation d'une structure soumise à un chargement donné, on ne dispose généralement ni des variables cinématiques, ni des variables statiques de ce problème. Il est donc nécessaire de proposer une formulation qui ne nécessite ni les unes ni les autres pour la phase d'initialisation. On a donc été amené, avec la formulation du problème de borne statique dans le cadre des matériaux standards implicites, à construire une procédure d'optimisation dont l'objectif est de permettre la détermination simultanée des variables cinématiques et statiques. En effet, il faut non seulement obtenir le facteur d'adaptation et les contraintes internes qui lui sont associées, mais aussi le champ de vitesses de déformations admissible correspondant.

Cela signifie que le problème d'optimisation à résoudre est maintenant :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda,\dot{\boldsymbol{\kappa}}}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \lambda \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \text{ admissible} \end{cases}$$

soit, avec le bipotentiel (III.3) construit pour la règle d'écrouissage cinématique non linéaire :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda,\dot{\boldsymbol{\kappa}}}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \text{ admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dfrac{3}{2} \dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \; \forall t \end{cases} \tag{III.19}$$

Posons

$$\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}, \lambda), \dot{\boldsymbol{\kappa}}) = \int_\Omega \oint \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} dt \; d\Omega - \lambda \tag{III.20}$$

Comme $\beta$ est convexe par rapport à $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \lambda)$ lorsque $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ est fixé, convexe par rapport $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ lorsque $(\overline{\boldsymbol{\pi}}, \lambda)$ est fixé et comme les contraintes du problème d'optimisation sont elles aussi convexes, le problème d'optimisation (III.19) rentre dans la catégorie des problèmes d'optimisation biconvexes. Des algorithmes spécifiques existent pour ce type de problèmes, entre autres, l'Approximation Extérieure (GOA, Generalized Outer Approximations) proposée initialement par Duran

et Grossmann (1986) et la décomposition de Benders (GBD, Generalized Benders Decomposition) introduite par Benders (1962) et généralisée par Geoffrion (1972). Des travaux effectués par Floudas and Visweswaran (1993) ont retenu plus particulièrement notre attention. Ils proposent une approche d'optimisation globale déterministe, basée sur une méthode de décomposition du problème initial d'optimisation biconvexe en deux sous-problèmes : un sous-problème primal et un sous-problème dual relaxé. Malheureusement, le code de calcul *cGOP*, basé sur cette méthode et développé par ces auteurs est restreint aux problèmes biconvexes avec contraintes linéaires (voir Visweswaran and Floudas (1997)), ce qui n'est pas le cas du problème que nous cherchons à résoudre. De ce fait, comme l'implémentation ou l'extension pour notre étude d'un de ces algorithmes constitueraient un travail à part entière, nous allons tenter de ramener ce problème d'optimisation biconvexe au cadre de l'optimisation convexe classique.

#### III.2.4.a Première formulation pour l'implémentation du problème

Un premier algorithme pour résoudre ce type de problèmes ayant des termes couplés entre les variables duales (c'est-à-dire ici, les contraintes généralisées et les vitesses de déformations généralisées) peut être basé sur une méthode d'approximations successives prenant en compte les lois de comportement (Bousshine et al. (2002)). Cela reviendrait ici à résoudre successivement les deux problèmes d'optimisation suivants, le problème cinématique :

$$\begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\kappa}}}{\text{Sup}} \quad -\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda),\dot{\boldsymbol{\kappa}}) \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\kappa}} \text{ admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dfrac{3}{2}\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \ \in \ \Omega, \ \forall t \end{array} \right. \end{array} \tag{III.21}$$

puis le problème statique :

$$\begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda}{\text{Sup}} \quad -\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda),\dot{\boldsymbol{\kappa}}) \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dfrac{3}{2}\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \ \in \ \Omega, \ \forall t \end{array} \right. \end{array} \tag{III.22}$$

Supposons que l'on se trouve à l'itération $k$, on connaît donc $((\overline{\boldsymbol{\pi}}^k,\lambda^k),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k)$. La résolution du problème cinématique fournit $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{k+1}$ tel que :

$$-\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^k,\lambda^k),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{k+1}) \geq -\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^k,\lambda^k),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k)$$

puis, le problème statique donne $(\overline{\boldsymbol{\pi}}^{k+1},\lambda^{k+1})$ tel que :

$$-\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^{k+1},\lambda^{k+1}),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{k+1}) \geq -\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^k,\lambda^k),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{k+1})$$

soit :

$$\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^{k+1},\lambda^{k+1}),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{k+1}) \leq \beta((\overline{\boldsymbol{\pi}}^k,\lambda^k),\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k)$$

ce qui permet de construire une suite minimisante bornée, donc convergente. Cette méthode a déjà été appliquée avec succès à la loi de frottement de Coulomb dans le contexte du bipotentiel (Bousshine et al. (2002)), mais il existe une différence notable qui constitue une limitation à

son utilisation pour la règle d'écrouissage cinématique non linéaire : en effet, la présence de couplage dans une des contraintes du problème d'optimisation, qui de plus est linéaire, entraîne une stationnarité de la suite construite dès la deuxième itération. Nous devons donc proposer une alternative pour implémenter le problème (III.19).

#### III.2.4.b Deuxième formulation pour l'implémentation du problème

Le principal obstacle à l'utilisation de la formulation esquissée au paragraphe précédent (III.2.4.a) est la présence de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire dans les contraintes des deux problèmes d'optimisation. Pour construire une méthode itérative, il semble donc inévitable d'enlever cette contrainte dans l'un des deux problèmes d'optimisation (III.21) et (III.22), ce qui bien sûr ne peut s'effectuer sans conséquence. Puisque le blocage numérique risque d'être plus important sur le problème statique (la présence de la règle d'écrouissage parmi les contraintes détermine les contraintes internes de manière unique pour des vitesses généralisées non nulles fixées), nous choisissons de le relaxer. Considérons de nouveau le problème statique (III.22) :

$$\begin{aligned} &\underset{\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \quad -\beta((\overline{\boldsymbol{\pi}},\lambda),\dot{\boldsymbol{\kappa}}) \\ &\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\pi}} \text{ admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dfrac{3}{2}\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \ \in \ \Omega, \ \forall t \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un état de traction constante et torsion alternée homogène, ce problème prend la forme discrétisée :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \right\} \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \dfrac{3}{2}(\lambda\boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) : (\lambda\boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) - \sigma_Y^2 \leq 0, \ \forall k = 1,2 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \dfrac{3}{2}\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0, \ \forall k = 1,2 \end{cases}$$

Construisons le Lagrangien associé à ce problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{X}},\lambda,\mu,\boldsymbol{\delta}) = \lambda &- \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2}\frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{\delta}_k : \left( \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \frac{3}{2}\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \mu_k \left( \sigma_Y^2 - \frac{3}{2}(\lambda\boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) : (\lambda\boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right) \end{aligned}$$

où les coefficients $\mu_k$ et les tenseurs $\boldsymbol{\delta}_k$ sont les multiplicateurs de Lagrange. Les conditions d'optimalité, ou conditions de Karush-Kühn-Tucker, qui fournissent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un couple $(\overline{\boldsymbol{X}},\lambda)$ soit un optimum global du problème d'optimisation,

donnent pour le problème ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\overline{\boldsymbol{X}}}} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \\ \mu_k \left( \sigma_Y^2 - \dfrac{3}{2}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) : (\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right) = 0,\ \mu_k \geq 0,\ \forall k = 1,2 \end{array}\right.$$

On obtient donc :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} 3\mu_k(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{2\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\delta}_k}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} : \left(3\mu_k(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}})\right) = 1 \\ \mu_k \left( \sigma_Y^2 - \dfrac{3}{2}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) : (\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \right) = 0,\ \mu_k \geq 0,\ \forall k = 1,2 \end{array}\right.$$

On peut alors reconnaître dans la deuxième égalité la condition de normalisation discrétisée :

$$\sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p = 1$$

où l'on a posé :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p = 3\mu_k(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) \tag{III.23}$$

Concernant la première égalité, avec l'expression (III.23) de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p$, elle devient :

$$\sum_{k=1}^{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{2\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\delta}_k}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0$$

On voit alors apparaître la condition d'admissibilité cinématique portant sur les variables internes $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ :

$$\sum_{k=1}^{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = \sum_{k=1}^{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{2\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\delta}_k}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0$$

soit une forme relaxée (puisque c'est une somme sur les différents cas de chargements $k$) de la règle d'écrouissage cinématique non linéaire. On constate donc que cette dernière apparaît non seulement explicitement parmi les contraintes du problème d'optimisation, mais aussi parmi les conditions d'optimalité. Cela nous suggère, pour éviter le problème de stationnarité rencontré dans la première formulation, de ne conserver que la forme relaxée de la règle d'écrouissage lors de l'optimisation du problème dit statique et ainsi d'introduire un problème dit statique relaxé, noté $(\mathcal{P}_s^d)$ :

$$(\mathcal{P}_s^d) \left\| \begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{4}\frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\} \\ \text{sous les contraintes } \ \dfrac{3}{2}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) : (\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) - \sigma_Y^2 \leq 0,\ \forall k = 1,2 \end{array} \right.$$

où la fonction objectif du problème est modifiée pour retrouver la loi d'écrouissage cinématique non linéaire relaxée parmi les conditions d'optimalité[12]. Il est évident que le fait de remplacer dans la procédure d'optimisation incrémentale le problème statique par le problème statique relaxé ne permet pas de dire que l'on construit une suite minimisante. A priori, à ce stade, rien ne nous permet de garantir la convergence. Néanmoins, on pourra vérifier a posteriori que les valeurs prises par la fonction $\beta$ définie par (III.20) à la fin du problème d'optimisation cinématique, notées $\beta^c$, et celles prises par la fonction $\beta$ définie par (III.20) à la fin du problème d'optimisation statique relaxé, notées $\beta^s$ tendent vers zéro ce qui caractérisera la convergence. En effet, la fonction $\beta$ correspond à la bifonctionnelle définie au chapitre I, paragraphe I.6.2, et il a été montré que l'annulation de celle-ci définie la solution exacte du problème d'adaptation.

Maintenant que nous avons construit le problème statique relaxé, nous discrétisons le problème cinématique (III.21) :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k}{\text{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) \text{ est un champ de déformations généralisées admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \dfrac{3}{2} \dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0, \ \forall k = 1, 2 \end{cases}$$

Il nous faut alors caractériser un champ de déformations généralisées admissible dans le cas de l'exemple que nous étudions. D'après le définition introduite au chapitre I, en utilisant les notations introduites au paragraphe III.1, la condition de normalisation prend la forme suivante :

$$\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 = 1$$

où les indices + et - sont remplacés par 1 et 2, les indices correspondant aux points anguleux du domaine de chargement. La condition d'admissibilité cinématique portant sur l'annulation de l'incrément des variables internes sur un cycle se traduit alors par l'annulation des incréments des vitesses des variables internes cinématiques sur un cycle :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 &= 0 \\ \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 &= 0 \\ \dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 &= 0 \end{aligned}$$

[12]Si l'on ne remplace pas le facteur $\frac{3}{2}$ par $\frac{3}{4}$ dans la fonction objectif, les conditions d'optimalité donnent :

$$\sum_{k=1}^{2} 3\mu_k (\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) - 3 \sum_{k=1}^{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0$$

et non la condition d'admissibilité cinématique portant sur $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ discrétisée :

$$\sum_{k=1}^{2} 3\mu_k (\lambda \boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}}) - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0$$

Finalement, le problème cinématique discrétisé, noté $(\mathcal{P}_c^d)$ devient :

$$(\mathcal{P}_c^d) \left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k}{\text{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 = 1 \\ \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 = 0 \\ \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 = 0 \\ \dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = 0, \ \forall k = 1, 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarquons enfin que, pour limiter le nombre d'inconnues du problème d'optimisation cinématique, on pourra éliminer les vitesses des variables internes en utilisant la règle d'écrouissage discrétisée :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p - \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p), \ \forall k = 1, 2$$

On a finalement :

$$(\mathcal{P}_c^d) \left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p}{\text{Sup}} \left\{ \lambda - \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left( \sigma_Y + \frac{3}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} : \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \right) \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) - \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \right\} \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 = 1 \\ \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 - \frac{3}{2} \frac{\overline{X}}{X_\infty} \left( \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p) + \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p) \right) = 0 \\ \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 - \frac{\overline{Y}}{X_\infty} \left( \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p) + \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p) \right) = 0 \\ \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2 - \frac{3}{2} \frac{\overline{Z}}{X_\infty} \left( \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p) + \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p) \right) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarquons dès maintenant que la présence du terme :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p}$$

dans la fonction objectif et certaines des contraintes égalités du problème d'optimisation soulève un problème d'ordre numérique. En effet, puisque l'utilisation d'un algorithme d'optimisation convexe requiert la connaissance du gradient de la fonction objectif et des contraintes, la non-différentiabilité en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p = 0$ de $\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p)$ ne permet pas l'implémentation de ce problème en l'état. Il sera donc nécessaire de procéder à une régularisation.

Il reste à examiner la question de l'initialisation. Puisque c'est le modèle qui se rapproche le

plus de celui que nous utilisons, nous prendrons le modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988) pour initialiser l'algorithme. Pour celui-ci, le problème statique à résoudre se présente sous la forme :

$$\begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{\rho}},\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\text{Sup}} \{ \lambda \} \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\rho}} \text{ est un champ de contraintes résiduelles} \\ \left[\sigma_{eq}(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} - \overline{\boldsymbol{X}})\right]^2 - \sigma_Y^2 \leq 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \ \in \ \Omega, \ \forall t \\ \left[\sigma_{eq}(\overline{\boldsymbol{X}})\right]^2 - X_\infty^2 \leq 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \ \in \ \Omega, \ \forall t \end{array} \right. \end{array}$$

Pour l'état de traction constante et torsion alternée homogène, le problème discrétisé, noté $(\mathcal{P}_2^d)$, prend donc la forme suivante :

$$(\mathcal{P}_2^d) \left\| \begin{array}{l} \underset{\overline{\boldsymbol{X}},\lambda}{\text{Sup}} \{ \lambda \} \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \left[\sigma_{eq}(\lambda\boldsymbol{\sigma}_k^{e0} + \boldsymbol{\sigma}^c - \overline{\boldsymbol{X}})\right]^2 - \sigma_Y^2 \leq 0, \ \forall k = 1,2 \\ \left[\sigma_{eq}(\overline{\boldsymbol{X}})\right]^2 - X_\infty^2 \leq 0, \ \forall k = 1,2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Néanmoins, comme pour la loi d'écrouissage cinématique non linéaire, les déformations deviennent infinies lorsqu'on s'approche de la surface limite, lors de l'initialisation, on n'utilisera pas la véritable valeur de $X_\infty$ mais une valeur inférieure (comme par exemple 90% de $X_\infty$). De cette manière, on s'assurera de ne pas se trouver sur la surface limite dès la première itération, ce qui provoquerait la divergence du problème cinématique.

Enfin, le critère de convergence que l'on utilisera est basé sur l'erreur en loi de comportement (Ladevèze (1996)). Dans le cadre des matériaux standards implicites (voir Hjiaj (1999)), les couples $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$, reliés par la loi de comportement, vérifient l'égalité (I.34) :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

On peut donc définir une erreur locale en loi de comportement $e_{locale}$ par :

$$e_{locale} = \left| \frac{b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) - \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}}{\dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}} \right|$$

Dans notre cas, une formulation de l'erreur en loi de comportement de manière globale est plus intéressante. Pour cela, on définit :

$$\beta_e(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \int_\Omega \oint \{b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) - \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}\} \, dt \, d\Omega$$

soit :

$$\beta_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}', \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}', \lambda) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'), (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')] - (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \overline{\boldsymbol{\pi}}'.\dot{\boldsymbol{\kappa}}' \right\} dt \, d\Omega$$

Cette fonction peut être rapprochée de la formulation de la bifonctionnelle (I.45). En effet, si l'on considère des champs $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^* = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^*)$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}^* = (\overline{\boldsymbol{\rho}}^*, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^*)$ admissibles, l'application du principe des puissances virtuelles (I.15) donne :

$$\int_\Omega \oint \overline{\boldsymbol{\rho}}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} dt \, d\Omega = \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\rho}}^* : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p*} d\Omega = 0$$

De plus, les conditions d'admissibilité cinématiques fournissent :

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}'^{*} = \oint \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^{*} dt = 0$$

Dans ce cas particulier, $\beta_e$ se réduit donc à :

$$\beta_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^{*}, \overline{\boldsymbol{\rho}}^{*}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^{*}, \lambda) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^{*}), (\overline{\boldsymbol{\rho}}^{*} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^{*})] - \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} \right\} dt \; d\Omega$$

qui n'est autre que la bifonctionnelle (I.45) introduite au chapitre I.

La condition de normalisation (I.21) donnant :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} dt \; d\Omega = 1$$

on peut mettre $\beta_e$ sous la forme :

$$\beta_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}', \overline{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}', \lambda) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'), (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}')] - \overline{\boldsymbol{\rho}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} - \overline{\boldsymbol{\pi}}' . \dot{\boldsymbol{\kappa}}' \right\} dt \; d\Omega - \lambda$$

et ainsi définir une erreur globale en loi de comportement $E_{globale}$ par :

$$E_{globale} = \left| \frac{\beta_e(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})}{\lambda} \right|$$

En résumé, la procédure de résolution peut-être représentée par le schéma III.4.

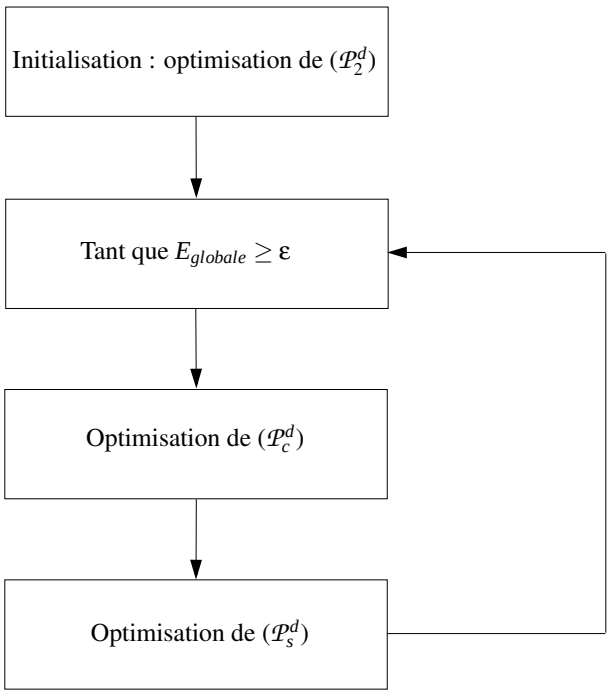



*Figure III.4 - Schéma de l'algorithme*

Comme précédemment annoncé, concernant l'implémentation de cette procédure, il subsiste un problème d'ordre numérique à étudier : la régularisation du problème cinématique, ce qui sera l'objet du paragraphe suivant.

### III.2.4.c Sur la régularisation du problème cinématique

L'utilisation d'un algorithme d'optimisation convexe requiert la connaissance du gradient de la fonction objective. Or, dans le cas du problème cinématique, la fonction objective n'est pas différentiable en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$ du fait de la définition de :

$$\varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$

Ce problème numérique majeur a fait l'objet de beaucoup de travaux. A titre d'exemple, signalons qu'une des méthodes classiquement utilisée dans l'étude des problèmes cinématiques pour des matériaux parfaitement plastiques repose sur le remplacement de la loi de comportement de ceux-ci par une loi correspondant à un matériau visqueux (par exemple, la loi de Norton-Hoff). Une autre méthode (adoptée dans Khoi et al. (2004)), caractérisée par sa facilité d'implémentation, consiste à introduire un « petit nombre positif » comme paramètre de régularisation, noté $\varepsilon$, dans la fonction de dissipation. Dans le cas parfaitement plastique, cela signifie que l'on remplace la dissipation :

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_Y \, \varepsilon_{eq}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_Y \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$$

par

$$D_r(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_Y \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \varepsilon}$$

Le point crucial reste donc la détermination de la valeur de ce paramètre de régularisation $\varepsilon$. Pour cela, plaçons-nous dans le cas d'un état de traction constante et torsion alternée homogène pour un matériau parfaitement plastique. Le problème cinématique est alors, d'après le paragraphe I.2.4.b du chapitre I :

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Sup}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \left\{ -\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) dt \; d\Omega \right\} \\ &\text{sous la contrainte} \quad \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega = 1 \end{aligned}$$

Sa forme régularisée et discrétisée, désignée par $(\mathcal{P}^d_{cpp})$, s'écrit donc :

$$(\mathcal{P}^d_{cpp}) \left\| \begin{array}{l} \operatorname*{Sup}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_k} \left\{ -\sum_{k=1}^{2} \sigma_Y \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_k : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_k + \varepsilon} \right\} \\ \\ \text{sous la contrainte} \quad \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 = 1 \end{array} \right.$$

Examinons l'évolution de la dissipation plastique obtenue en résolvant le problème ci-dessus en fonction des valeurs prises par le paramètre de régularisation pour une contrainte de traction

nulle. On peut clairement constater sur la figure III.5 une stabilisation de la dissipation plastique solution du problème d'optimisation lorsque le paramètre de régularisation $\varepsilon$ diminue suffisamment.

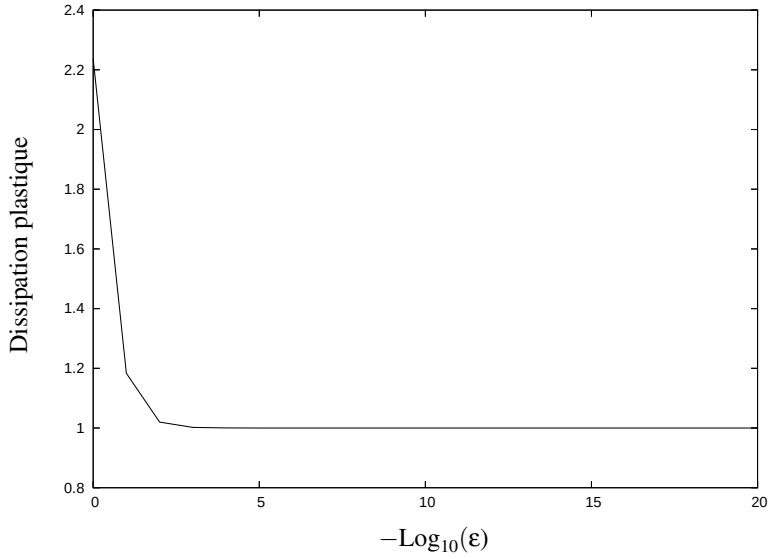



*Figure III.5 - Evolution de la dissipation plastique en fonction des valeurs du paramètre de régularisation*

De manière à détecter une valeur optimale de ce paramètre de régularisation, on peut mettre en œuvre, comme dans Jospin (1992), une procédure de détection automatique de celle-ci. Pour cela, l'étape d'initialisation consiste à attribuer la valeur 1, par exemple, à $\varepsilon$, puis résoudre le problème $(\mathcal{P}^d_{cpp})$. Ensuite, tant que l'erreur relative entre deux valeurs successives de la dissipation est plus grande qu'une certaine tolérance, on actualise le paramètre de régularisation en le divisant par 10 et on résout de nouveau le problème $(\mathcal{P}^d_{cpp})$. A titre d'exemple, dans le cas de l'exemple de la figure III.5, pour une tolérance de $1.10^{-8}$, la valeur optimale de $\varepsilon$ détectée est $1.10^{-10}$. Cette procédure semblant particulièrement simple à mettre en œuvre, mais aussi efficace, c'est celle-ci que nous choisissons d'utiliser dans la suite[13].

#### III.2.4.d Résultats

Intéressons nous tout d'abord à la convergence de l'algorithme proposé dans le paragraphe III.2.4.b. Pour cela, on fixe une valeur pour la contrainte de traction, par exemple $\sigma = 375\text{MPa}$[14]. En premier lieu, on s'intéresse à l'évolution des valeurs prises par la fonction $\beta$ définie par (III.20) à la fin du problème d'optimisation cinématique, notée $\beta^c$, et celles prises par la fonction $\beta$ à la fin du problème d'optimisation statique relaxé, notées $\beta^s$. On peut constater sur la figure III.6 que les valeurs prises successivement par $-\beta^c$ constituent bien une suite maximisante de $-\beta$

[13]La procédure de détection automatique de la valeur optimale du paramètre de régularisation sera effectuée seulement lors de la première optimisation du problème cinématique($\mathcal{P}^d_c$), de manière à rendre le calcul moins coûteux.

[14]On choisit cette amplitude de contrainte de traction de manière à avoir un nombre d'itérations important et ainsi, mieux visualiser les phénomènes mis en jeu.

qui converge vers zéro, contrairement aux valeurs prises par $-\beta^s$. Celles-ci oscillent autour de la valeur zéro, mais l'amplitude diminuant avec le nombre d'itérations finalement, la convergence vers zéro se produit. Cette convergence vers zéro de la bifonctionnelle $\beta$ est caractéristique de la détermination du facteur d'adaptation, puisque cela correspond à la définition du facteur de charge d'adaptation introduite dans la section I.6.2.a du chapitre I.

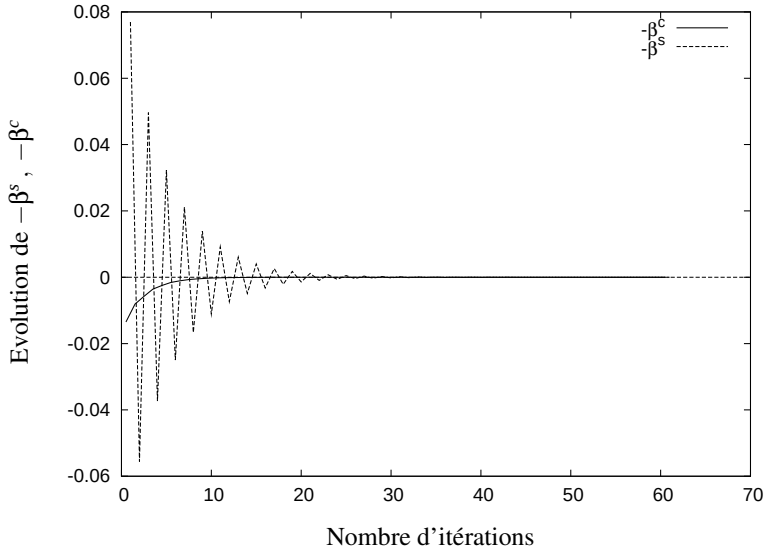



*Figure III.6 - Evolution de $\beta^s$ et $\beta^c$ en fonction du nombre d'itérations pour $\sigma = 375MPa$*

Observons ensuite l'évolution des valeurs prises par le facteur de charge en fonction du nombre d'itérations (figure III.7).

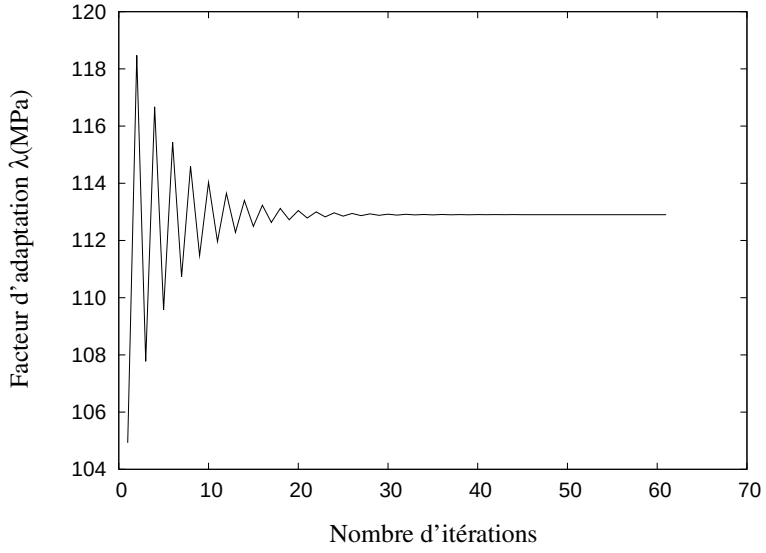



*Figure III.7 - Evolution du facteur d'adaptation en fonction du nombre d'itérations pour $\sigma = 375MPa$*

Comme pour l'évolution de $-\beta^s$, on constate que les valeurs prises successivement oscillent autour d'une valeur, qui cette fois est non nulle, pour ensuite converger vers la valeur 112.903MPa qui est précisément la valeur théorique. Les deux résultats sont donc identiques à $1.10^{-3}$ près (en travaillant avec davantage de précision, on constate que les résultats sont identiques à $1.10^{-6}$ près). Il semble donc que la procédure d'optimisation mise au point permette bien de déterminer la charge d'adaptation.

Considérons maintenant les tests pour différentes valeurs de la contrainte de traction. Nous comparons les résultats obtenus avec la solution analytique en traçant le domaine d'adaptation sur la figure III.8.

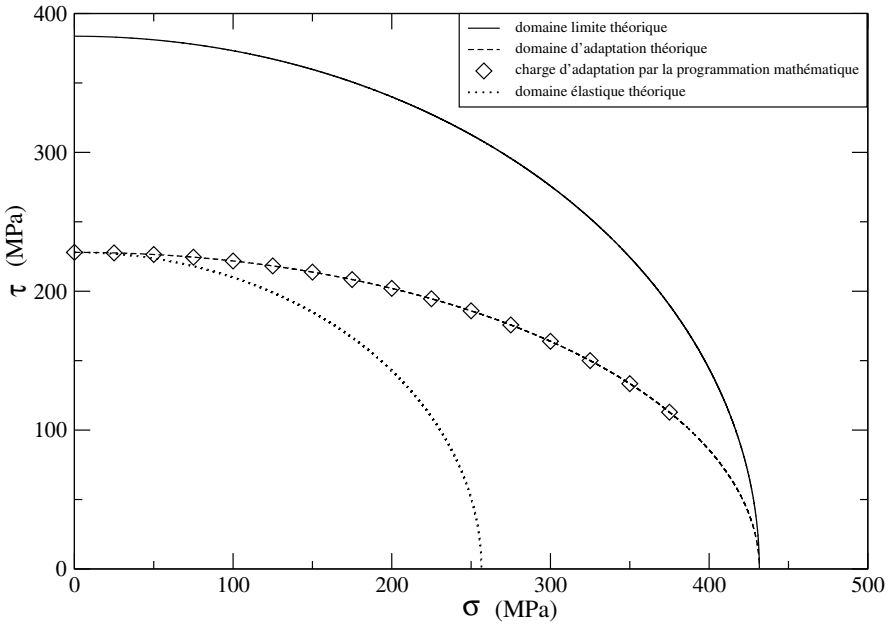



*Figure III.8 - Comparaison des valeurs du facteur d'adaptation théorique avec celles obtenues par la programmation mathématique*

Les facteurs d'adaptation obtenus par la programmation mathématique sont en parfait accord avec les résultats fournis par la formule théorique (III.18). On remarquera qu'il manque une partie de la courbe qui n'a pu être obtenue par la programmation mathématique : lorsqu'on se place trop près de la surface limite, le facteur d'adaptation peut devenir plus grand que la solution au cours du processus d'optimisation. Dans ce cas, il est possible que l'on se trouve tellement proche de la surface limite que le problème cinématique ne puisse converger. En effet, pour la loi d'écrouissage cinématique non linéaire, les déformations deviennent infinies lorsqu'on s'approche trop de la surface limite. Puisque cette situation ne se produit que lorsqu'on est proche de la surface limite, une bonne approximation du facteur d'adaptation pourra être fournie par l'écrouissage cinématique linéaire limité. Il est possible que dans ce cas, l'utilisation de l'optimisation biconvexe permette de passer outre ce phénomène et reste donc une solution envisageable et à explorer à terme. Remarquons tout de même que ces problèmes numériques n'apparaissent pas pour tous les cas de matériaux testés. En effet, ils apparaissent plus spécifiquement lorsque la réserve de résistance fournie par l'écrouissage est faible, cela correspond aux

cas où la constante $X_\infty$ des matériaux est faible. Pour le vérifier, effectuons la simulation pour un matériau différent, possédant des caractéristiques mécaniques telles que le seuil de plasticité $\sigma_Y$ soit du même ordre de grandeur que dans le cas de l'acier 316L, mais avec une valeur du seuil $X_\infty$ plus importante[15]. Prenons par exemple un alliage de titane TiAl6V pour lequel les paramètres constants de ce matériau sont donnés par (Lemaitre et Chaboche (1990)) :

$$\begin{cases} X_\infty = 560MPa \\ \sigma_Y = 260MPa \end{cases}$$

Pour ce matériau, on obtient alors la quasi-totalité de la courbe d'interaction (voir figure III.9). Le seul point pour lequel la convergence n'est pas effective est le point qui appartient simultanément au domaine limite et au domaine d'adaptation.

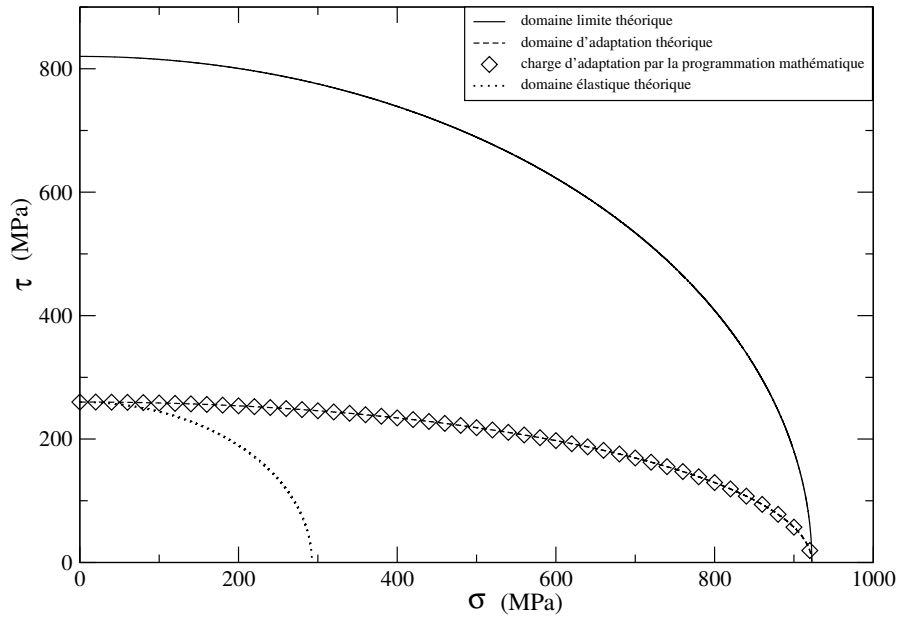



*Figure III.9 - Comparaison des valeurs du facteur d'adaptation théorique avec celles obtenues par la programmation mathématique pour l'alliage TiAl6V*

Revenons maintenant à la comparaison proprement dite. Comme précédemment, un moyen supplémentaire de comparaison des résultats est fourni par les expressions théoriques des contraintes internes (III.17) (voir tableau III.5). L'écart maximum constaté entre les valeurs théoriques et celles issues de la programmation mathématique n'excède pas $1.10^{-3}$.

[15]Rappelons que pour l'acier 316L, les paramètres constants $\sigma_Y$ et $X_\infty$ ont les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} X_\infty = 155.647MPa \\ \sigma_Y = 228MPa \end{cases}$$

*Tableau III.5 - Comparaison des valeurs théoriques des contraintes internes avec celles obtenues par la programmation mathématique pour l'acier 316L dans le cas où les variables cinématiques sont inconnues suivant les valeurs de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma\ (MPa)$ | $Xth\ (MPa)$ | $Zth\ (MPa)$ | $X\ (MPa)$ | $Z\ (MPa)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 5.747 | -1.352 | 5.747 | -1.352 |
| 50 | 11.495 | -2.705 | 11.495 | -2.705 |
| 75 | 17.242 | -4.057 | 17.242 | -4.057 |
| 100 | 22.990 | -5.409 | 22.990 | -5.409 |
| 125 | 28.737 | -6.762 | 28.737 | -6.762 |
| 150 | 34.485 | -8.114 | 34.485 | -8.114 |
| 175 | 40.232 | -9.466 | 40.232 | -9.466 |
| 200 | 45.980 | -10.819 | 45.980 | -10.819 |
| 225 | 51.727 | -12.171 | 51.727 | -12.171 |
| 250 | 57.475 | -13.523 | 57.474 | -13.523 |
| 275 | 63.222 | -14.876 | 63.222 | -14.876 |
| 300 | 68.969 | -16.228 | 68.970 | -16.228 |
| 325 | 74.717 | -17.580 | 74.717 | -17.580 |
| 350 | 80.464 | -18.933 | 80.464 | -18.933 |
| 375 | 86.212 | -20.285 | 86.212 | -20.285 |

Enfin, on peut aussi utiliser les formules analytiques (III.14) et (III.15) pour analyser les écarts pour les vitesses de déformations (voir tableau III.6). Dans ce dernier cas, les valeurs analytiques et celles obtenues par la programmation mathématique diffèrent au plus de $1.10^{-4}$.

*Tableau III.6 - Comparaison des valeurs théoriques des vitesses de déformations avec celles obtenues par la programmation mathématique pour l'acier 316L dans le cas où les variables cinématiques sont inconnues suivant les valeurs de la contrainte de traction $\sigma$*

| $\sigma\ (MPa)$ | $\dot{\varepsilon}_{\pm}^{th}$ | $\dot{\eta}_{\pm}^{th}$ | $\dot{\varepsilon}_1$ | $\dot{\varepsilon}_2$ | $\dot{\eta}_1$ | $\dot{\eta}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 25 | 0.0277 | -0.0065 | 0.0277 | 0.0277 | -0.0065 | -.0065 |
| 50 | 0.0558 | -0.0131 | 0.0558 | 0.0558 | -0.0131 | -0.0131 |
| 75 | 0.0844 | -0.0199 | 0.0844 | 0.0844 | -0.0198 | -0.0198 |
| 100 | 0.1139 | -0.0268 | 0.1139 | 0.1139 | -0.0268 | -0.0268 |
| 125 | 0.1447 | -0.0340 | 0.1447 | 0.1447 | -0.0340 | -0.0340 |
| 150 | 0.1772 | -0.0417 | 0.1772 | 0.1772 | -0.0417 | -0.0417 |
| 175 | 0.2121 | -0.0499 | 0.2121 | 0.2121 | -0.0499 | -0.0499 |
| 200 | 0.2500 | -0.0588 | 0.2500 | 0.2500 | -0.0588 | -0.0588 |
| 225 | 0.2920 | -0.0687 | 0.2921 | 0.2921 | -0.0687 | -0.0687 |
| 250 | 0.3397 | -0.0799 | 0.3397 | 0.3397 | -0.0799 | -0.0799 |
| 275 | 0.3952 | -0.0930 | 0.3952 | 0.3952 | -0.0930 | -.0930 |
| 300 | 0.4622 | -0.1088 | 0.4622 | 0.4622 | -0.1088 | -0.1088 |
| 325 | 0.5471 | -0.1287 | 0.5471 | 0.5471 | -0.1287 | -0.1287 |
| 350 | 0.6625 | -0.1559 | 0.6625 | 0.6625 | -0.1559 | -0.1559 |
| 375 | 0.8389 | -0.1974 | 0.8389 | 0.8289 | -0.1974 | -0.1974 |

Finalement, soulignons qu'on a pu construire une procédure de résolution pour le problème d'adaptation qui permet de déterminer simultanément les variables statiques et cinématiques. La comparaison des résultats obtenus avec la solution analytique montre un très bon accord.

## III.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la solution analytique pour l'exemple d'un état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane par l'approche du bipotentiel. Nous avons ensuite pu montrer la cohérence de cette solution analytique en la comparant aux résultats obtenus par la méthode pas à pas classique mise en œuvre au chapitre précédent. Comme la majorité des études d'adaptation élastoplastique ne peuvent être effectuées que numériquement et qu'il est particulièrement intéressant d'utiliser les méthodes directes, nous avons ensuite proposé une formulation pour la programmation mathématique dans le cadre des matériaux standards implicites. Cette formulation permet la détermination simultanée des variables cinématiques et des variables statiques et revient à résoudre simultanément les problèmes de bornes statique et cinématique. En outre, la linéarité de la règle d'écrouissage et sa présence dans les deux problèmes d'optimisation ne laisse d'autre choix que le remplacement du problème statique par un problème statique relaxé pour rester dans le cadre de l'optimisation convexe. Pour l'exemple étudié dans ce chapitre, cela fournit effectivement des solutions en très bonne concordance avec la méthode pas à pas classique et la solution analytique exacte. A terme, il pourrait être particulièrement intéressant d'utiliser plutôt les outils de l'optimisation biconvexe pour résoudre ce type de problème. Cela éviterait de construire un processus itératif et permettrait peut-être d'obtenir, sans exception, tous les facteurs d'adaptation élastoplastique (même dans les cas limites). Maintenant que nous avons vérifié sur un exemple simple la validité de l'approche du bipotentiel pour l'adaptation élastoplastique, nous allons au chapitre suivant appliquer celle-ci à des structures plus complexes, qui sont des exemples couramment étudiés en adaptation élastoplastique : les structures de type coques minces.

# Chapitre IV

# Adaptation élastoplastique pour les structures de type coques minces avec écrouissage

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux structures de type coques minces. Celles-ci sont fréquemment employées dans diverses applications industrielles où elles subissent des sollicitations nécessitant la prise en compte de comportements élasto-plastiques complexes (centrales nucléaires, propulseurs spatiaux ...) et rendant nécessaire les études d'adaptation élastoplastique de ces structures. Etant donné les matériaux utilisés dans ces applications (métaux, alliages,...), il apparaît comme particulièrement important de prendre en compte l'influence de l'écrouissage dans ces études. L'écrouissage cinématique linéaire étant peu réaliste pour les métaux, nous optons pour l'introduction de l'écrouissage cinématique linéaire limité et non linéaire. Pour cela, nous commencerons par rappeler le cadre de travail utilisé ici pour la modélisation des coques minces. Ensuite, nous nous attarderons sur le modèle à deux surfaces, introduit par Weichert et Gross-Weege (1988) et déjà utilisé dans les chapitres II et III, qui permet de traduire les effets de l'écrouissage cinématique linéaire limité. La formulation du théorème de Melan (1936) pour ce modèle conduit à deux manières différentes de l'implémenter que nous comparerons. L'écrouissage cinématique linéaire limité sera alors considéré du point de vue des matériaux standards implicites. Cette reformulation permettra non seulement de retrouver le problème de borne statique de Weichert et Gross-Weege (1988) mais aussi de construire un problème de

borne cinématique. Enfin, comme l'application du concept de matériaux standards implicites (MSI) à l'exemple simple de l'état de traction constante et torsion alternée homogène a été concluante, nous l'appliquerons aux structures de type coques minces. Pour cela, nous établirons une règle d'écrouissage cinématique non linéaire pour les coques minces qui nous permettra alors de construire un bipotentiel. Les problèmes de bornes statique et cinématique dans le cadre des matériaux standards implicites pourront alors être formulés ainsi que quelques remarques concernant leur implémentation.

## IV.1 Cadre de travail

Le début de ce chapitre est consacré à la présentation de la modélisation des coques minces utilisée par la suite. En premier lieu, nous rappellerons les concepts de la modélisation géométrique de ce type de structures pour ensuite donner quelques éléments de la modélisation mécanique qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie des coques dite de Donnell-Mushtari-Vlasov.

### IV.1.1 Modélisation géométrique des coques minces

Rappelons tout d'abord que le terme de coque est utilisé pour les corps volumiques dont l'une des dimensions, appelée épaisseur, est considérablement réduite par rapport aux deux autres. Soit $P$ la région de l'espace euclidien tridimensionnel $E$ occupée par la coque dans sa configuration non déformée $\Omega^0$. Pour modéliser ce type de structures, on considère généralement la surface dite moyenne de la coque, notée $\mathcal{M}$, divisant l'épaisseur en deux. On adjoint à cette surface un système de coordonnées curvilignes $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ tel que $-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2}$, $h$ étant l'épaisseur de la coque (voir figure IV.1).

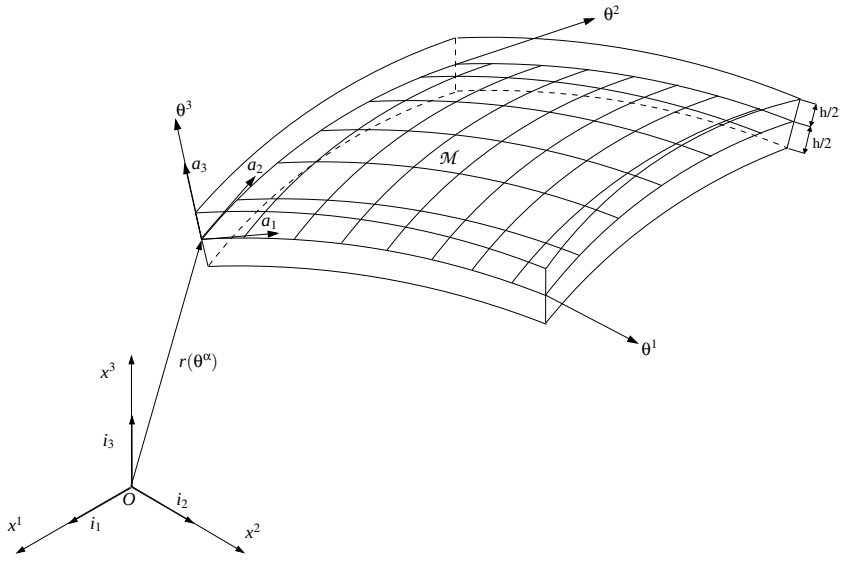



*Figure IV.1 - Géométrie de la coque*

La surface moyenne est décrite dans la configuration non déformée par le vecteur position :

$$\boldsymbol{r} = x^k(\theta^\alpha)\boldsymbol{i}_k;\ k = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2$$

où $(\boldsymbol{i}_k)_{k=1,2,3}$ est une base orthonormale d'un système de coordonnées cartésiennes d'origine $O \in E$ et les $x^k$ représentent les coordonnées euclidiennes d'un point quelconque de la surface moyenne $\mathcal{M}$, de repérage curviligne $(\theta^1, \theta^2)$.

Introduisons maintenant les notations et résultats classiques dans l'étude de ce type de structures :

- vecteurs de base :

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}_{,\alpha}, \quad \boldsymbol{a}^\alpha = \boldsymbol{a}^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\beta$$

- vecteur normal :

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2|}, \ \boldsymbol{a}^3 = \boldsymbol{a}_3$$

- tenseur métrique :

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha.\boldsymbol{a}_\beta, \ a^{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}^\alpha.\boldsymbol{a}^\beta$$

- tenseur de courbure :

$$b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{a}_\alpha.\boldsymbol{a}_{3,\beta}, \ b^\beta_\alpha = a_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta}$$

où $(...)_{,\alpha}$ désigne la dérivée partielle par rapport à $\theta^\alpha$. Les indices grecs et latins prennent respectivement les valeurs 1,2 et 1,2,3. Les symboles . et $\wedge$ désignent respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel.

Cette caractérisation géométrique permet d'un point de vue mécanique de ramener le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, dans lequel la détermination du champ de déplacement de la surface moyenne suffit à décrire convenablement le comportement de la structure.

### IV.1.2 Modélisation mécanique des coques minces

La réduction de l'étude d'une coque mince à un problème à deux dimensions a donné naissance à diverses théories simplifiées. Celles-ci diffèrent de par les termes du champ de déplacements considérés pour le calcul des déformations et par les termes du tenseur des contraintes pris en compte. Suivant les travaux déjà effectués sur le sujet que nous aborderons dans la suite de ce chapitre (voir, par exemple Sawczuk (1982), Weichert (1989), Tritsch (1993)), nous nous plaçons dans le cadre de la théorie non linéaire des coques dite de Donnell-Mushtari-Vlasov.

#### IV.1.2.a Relations cinématiques et équations d'équilibre

Dans un premier temps, on se place dans le cadre restrictif de l'hypothèse de Love-Kirchhoff pour les coques minces. Celle-ci stipule que les fibres de la coque dans l'état non déformé sont rectilignes et orthogonales à la surface moyenne et restent rectilignes et orthogonales à cette surface après déformation sans changement de longueur. Dans un second temps, on suppose que l'épaisseur de la coque étudiée est très faible devant les rayons de courbure de celle-ci. Dans ce cas, les déplacements tangents de la surface moyenne sont eux-même négligeables devant les rayons de courbure de la surface moyenne. La déformation de la surface moyenne de la coque de la configuration non déformée à la configuration déformée $\overline{\mathcal{M}}$ peut alors être décrite par le champ de déplacements :

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r} = u^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + u^3 \boldsymbol{a}_3$$

Sous les hypothèses précédemment énoncées, la déformation de la coque peut être définie à l'aide des tenseurs de déformations $\boldsymbol{\gamma}$ et de courbures $\boldsymbol{\chi}$ de la surface moyenne de composantes :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta}u_3 + u_{3,\alpha}u_{3,\beta}) \text{ dans } \mathcal{M}$$
$$\chi_{\alpha\beta} = -u_3|_{\alpha\beta} \text{ dans } \mathcal{M}$$

où le symbole « | » précédant un indice indique la différenciation covariante par rapport à la direction correspondante.

Notons $C$ la ligne bornant la surface moyenne $\mathcal{M}$. Pour compléter l'ensemble des équations cinématiques, on considère maintenant les conditions aux limites sur la partie $C_u$ de $C$ où des déplacements sont imposés. Le long de la ligne $C$, on introduit le système de vecteurs orthonormés $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}_3$, où $\boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ est le vecteur tangent unitaire, $s$ est l'abscisse curviligne le long de $C$, et $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{a}_3$ est le vecteur normal unitaire. Les conditions aux limites se mettent alors sous la forme :

$$u_\nu = u^\alpha \nu_\alpha = u_\nu^0 \text{ sur } C_u$$
$$u_t = u^\alpha t_\alpha = u_t^0 \text{ sur } C_u$$
$$u_3 = u_3^0 \text{ sur } C_u$$
$$\beta_\nu = -u_{3,\alpha}\nu^\alpha = \beta_\nu^0 \text{ sur } C_u$$

où les quantités fixées sont identifiées par un zéro en exposant et $\beta_\nu$ désigne la rotation autour de la ligne frontière.

A l'aide du principe des travaux virtuels, il est ensuite possible de déterminer les conditions d'équilibre :

$$N^{\alpha\beta}|_\beta + p^{\alpha^0} = 0 \text{ dans } \mathcal{M}$$
$$(M^{\alpha\beta}|_\alpha + u_{3,\alpha}N^{\alpha\beta})|_\beta + b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta} + p^{3^0} = 0 \text{ dans } \mathcal{M}$$
$$\nu_\alpha\nu_\beta N^{\alpha\beta} = N_{\nu\nu}^0 \text{ sur } C_p$$
$$t_\alpha\nu_\beta N^{\alpha\beta} = N_{t\nu}^0 \text{ sur } C_p$$
$$\nu_\beta(M^{\alpha\beta}|_\alpha + u_{3,\alpha}N^{\alpha\beta}) - M_{t\nu,\alpha}t^\alpha = N_{n\nu}^0 - M_{t\nu,t}^0 \text{ sur } C_p$$
$$\nu_\alpha\nu_\beta M^{\alpha\beta} = M_{\nu\nu}^0 \text{ sur } C_p$$

dans lesquelles $C_p$ désigne la partie de $C$ où les conditions aux limites statiques sont appliquées et $p^{\alpha^0}$ et $p^{3^0}$ sont les composantes des charges surfaciques par unités d'aire de la surface moyenne non déformée $\mathcal{M}$. $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$ désignent respectivement le tenseur des éléments de réduction des forces membranaires et celui des moments.

#### IV.1.2.b Lois de comportement

Les équations d'équilibre et relations cinématiques étant rappelées, intéressons nous maintenant à la formulation de la loi de comportement élastique. Les tenseurs de déformations $\boldsymbol{\gamma}$ et de

courbures $\boldsymbol{\chi}$ de la surface moyenne peuvent être décomposés de manière additive en leurs parties élastiques $\boldsymbol{\gamma}^e$, $\boldsymbol{\chi}^e$ et leurs parties plastiques $\boldsymbol{\gamma}^p$, $\boldsymbol{\chi}^p$ :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma^e_{\alpha\beta} + \gamma^p_{\alpha\beta}$$
$$\chi_{\alpha\beta} = \chi^e_{\alpha\beta} + \chi^p_{\alpha\beta}$$

En particulier, pour un comportement élastique linéaire isotrope, les tenseurs de déformations élastiques sont donnés par les relations :

$$\gamma^e_{\alpha\beta} = \frac{1}{D} G_{\alpha\beta\mu\lambda} N^{\mu\lambda}$$
$$\chi^e_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\mu\lambda}$$

où $\boldsymbol{G}$ est le tenseur d'élasticité, défini par :

$$G_{\alpha\beta\mu\lambda} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ a_{\alpha\mu} a_{\beta\lambda} + a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta} a_{\mu\lambda} \right]$$

et les facteurs d'élongation $D$ et de rotation $B$ sont définis par :

$$D = 2\frac{EH}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{2}{3}\frac{EH^3}{1-\nu^2}$$

Il reste à faire un choix concernant la fonction d'écoulement plastique. Comme nous nous intéressons principalement aux métaux isotropes ductiles, nous considérons la fonction d'écoulement de Hüber-Mises :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s})}$$

où $\boldsymbol{s}$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. En supposant que l'état de contrainte est approximativement plan et parallèle à la surface moyenne (c'est-à-dire $\sigma^{13} = \sigma^{23} = \sigma^{33} \approx 0$) et en tenant compte de la métrique des coques, une approximation de la fonction d'écoulement pour les coques est fournie par :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\lambda} - \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta})^2}$$

On peut alors écrire cette approximation de la condition d'écoulement sous la forme généralisée :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y = \sqrt{I_{\alpha\beta\gamma\lambda} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\lambda}} - \sigma_Y = 0 \tag{IV.1}$$

où le tenseur d'écoulement, dans le cas des matériaux isotropes, est donné par :

$$I_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \frac{3}{2} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\lambda}$$

Pour un comportement élastique linéaire, la répartition des contraintes suivant l'épaisseur est linéaire, on peut donc exprimer l'état de contrainte en fonction des éléments de réduction $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$ :

$$ {}^{e}\sigma^{\alpha\beta} = \frac{{}^{e}N^{\alpha\beta}}{h} + 12\frac{{}^{e}M^{\alpha\beta}}{h^3}\theta^3 $$

avec

$$ {}^{e}N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3, \;\; {}^{e}M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta}\theta^3 d\theta^3 $$

Dans ce cas, les points possibles de contraintes maximales sont localisés dans la section, au niveau des parois soit pour $\theta^3 = \pm h/2$ :

$$ {}^{e}\sigma^{\alpha\beta}_{max} = \frac{{}^{e}N^{\alpha\beta}}{h} \pm 6\frac{{}^{e}M^{\alpha\beta}}{h^2} \tag{IV.2} $$

Introduisons les grandeurs adimensionnées :

$$ n^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{N_p} $$

$$ m^{\alpha\beta} = \frac{M^{\alpha\beta}}{M_p} $$

avec

$$ N_p = \sigma_Y h, \;\; M_p = \sigma_Y \frac{h^2}{4} $$

$N_p$ et $M_p$ correspondent respectivement à l'effort membranaire et au moment de plastification complète de la section. En introduisant alors (IV.2) dans l'expression de la règle d'écoulement (IV.1), on obtient la condition d'écoulement initiale (car elle indique le début de l'écoulement plastique pour les fibres des parois) en fonction des éléments de réduction de section adimensionnés :

$$ \sqrt{I_{\alpha\beta\gamma\lambda}\left(n^{\alpha\beta}n^{\gamma\lambda} + \frac{9}{4}m^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda} \pm 2\frac{3}{2}n^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda}\right)} - 1 = 0 \tag{IV.3} $$

ou encore :

$$ \overline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) - 1 = 0 $$

en posant :

$$ \overline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \sqrt{I_{\alpha\beta\gamma\lambda}\left(n^{\alpha\beta}n^{\gamma\lambda} + \frac{9}{4}m^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda} \pm 2\frac{3}{2}n^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda}\right)} $$

## IV.2 Sur l'implémentation du modèle à deux surfaces

Maintenant que le cadre de travail est fixé, intéressons nous plus particulièrement à l'introduction de l'écrouissage dans les études d'adaptation élastoplastique pour les coques minces. La modélisation, peu réaliste, obtenue avec l'écrouissage cinématique linéaire illimité, qui ne permet pas de prédire la non-adaptation par déformations plastiques cumulées, a été corrigée

par l'introduction d'une surface limite au delà de laquelle la surface d'écoulement ne peut aller. La première introduction de ce modèle, dit modèle à deux surfaces, est due à Weichert et Gross-Weege (1988). Le théorème de Melan pour ce modèle mène à deux formulations possibles du problème de borne statique et donc à deux manières différentes de l'implémenter. Dans ce paragraphe, nous allons comparer les résultats issus de ces formulations.

### IV.2.1 Formulation du modèle à deux surfaces

La construction du modèle à deux surfaces est basée sur l'introduction d'une limite d'évolution, notée $X_\infty$, du paramètre d'écrouissage cinématique linéaire au moyen d'un condition simplifiée de deux surfaces : une surface d'écoulement et une surface limite au delà de laquelle la surface d'écoulement ne peut aller (figure IV.2).

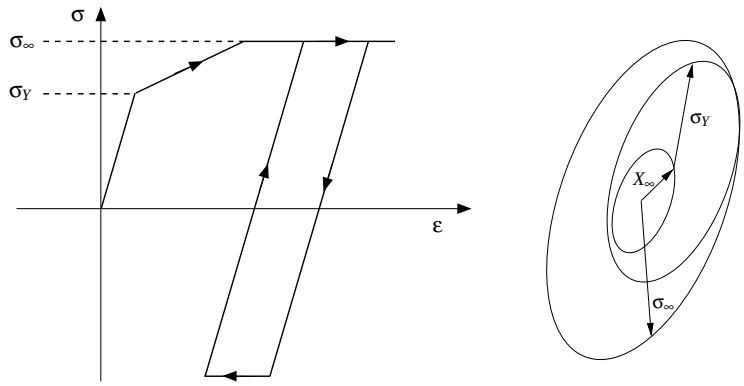



*Figure IV.2 - Modèle d'écrouissage linéaire limité en chargement uniaxial et en chargement multiaxial*

Dans ce cas, le critère d'écoulement (par exemple, le critère de Von-Mises) prend la forme suivante :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) = \sigma_Y$$

où $\boldsymbol{X}$ désigne le tenseur des contraintes internes. Le domaine élastique, limité par cette surface, reste à l'intérieur d'un domaine, délimité par une surface dite limite. Si l'on suppose que cette surface a la même forme que la surface d'écoulement, alors elle est caractérisée par :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_\infty \tag{IV.4}$$

Par conséquent, comme les déplacements de la surface de plasticité sont bornés par le domaine limite, les contraintes internes sont elles aussi bornées. Dans le cas où les surfaces limite et de plasticité ont la même forme régie par le critère de Von-Mises par exemple, les contraintes internes seront bornées par la surface :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{X}) = \sigma_\infty - \sigma_Y = X_\infty \tag{IV.5}$$

dans laquelle on a posé $X_\infty = \sigma_\infty - \sigma_Y$.

La première extension du théorème de Melan (1936) au cas de l'écrouissage cinématique linéaire limité est due à Weichert et Gross-Weege (1988). En utilisant les notations introduites précédemment pour la surface limite des contraintes internes et pour la surface d'écoulement, le théorème peut se mettre sous la forme suivante :

**Théorème de Melan avec écrouissage cinématique linéaire limité.**
S'il existe un champ de contraintes internes $\boldsymbol{X}$ indépendant du temps tel que :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{X}) \leq X_\infty$$

et un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0}$ appartienne au domaine élastique, i.e. :

$$\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X}) \leq \sigma_Y$$

en tout point de la structure $\Omega$ et pour tout trajet de chargement $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ inclus dans le domaine de chargement $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, alors la structure s'adapte[a].

[a] Pour la démonstration, on pourra se reporter à Weichert et Gross-Weege (1988) ou plus récemment à Pham et Weichert (2001) et Nguyen Quoc Son (2003).

En ce qui concerne le problème d'optimisation associé à ce théorème de Melan avec écrouissage cinématique linéaire limité, Weichert et Gross-Weege (1988) adoptent la formulation suivante :

$$\underset{\lambda, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{X}}{\text{Sup}} \quad \lambda \tag{IV.6}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\rho}} \text{ est un champ de contraintes résiduelles} \\ \boldsymbol{X} \text{ est un champ de contraintes internes indépendant du temps} \\ \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}})\right]^2 \leq \sigma_\infty^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \\ \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X})\right]^2 \leq \sigma_Y^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \end{cases}$$

Selon ces mêmes auteurs, le fait d'imposer que le champ $\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}}$ reste à l'intérieur de la surface limite permet de garantir implicitement que les contraintes internes soient bornées. Mais, comme l'ont fait remarquer d'autres auteurs (on pourra se référer, entre autres à Stein (1993) et plus récemment à Heitzer et al. (2003)), on peut aussi formuler le problème d'optimisation à résoudre en imposant explicitement la limitation des contraintes internes (IV.5), et ainsi garantir implicitement le non-dépassement de la surface limite. Dans ce cas, le problème prend la forme suivante :

$$\underset{\lambda, \overline{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{X}}{\text{Sup}} \quad \lambda \tag{IV.7}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\rho}} \text{ est un champ de contraintes résiduelles} \\ \boldsymbol{X} \text{ est un champ de contraintes internes indépendant du temps} \\ \left[\mathcal{F}(\boldsymbol{X})\right]^2 \leq X_\infty^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \\ \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \overline{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{X})\right]^2 \leq \sigma_Y^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \end{cases}$$

Ces deux problèmes semblent équivalents au moins dans le cas d'une formulation continue, mais leurs résolutions numériques, soit dans le cas discret, conduisent-elles strictement à la même solution ? En particulier, dans le cas discret, la considération du problème (IV.6) permet-elle bien de garantir implicitement que les contraintes internes restent à l'intérieur de la surface limite (IV.5) ? Pour répondre à ces deux questions, nous choisissons d'implémenter les deux méthodes et de comparer leurs résultats.

### IV.2.2 Formulations éléments finis dans le cas des coques minces

Nous nous basons sur les travaux déjà effectués[16] sur ce problème par Weichert et Gross-Weege (1988), Gross-Weege (1988), Tritsch (1993) utilisant les éléments finis statiquement admissibles (dits aussi éléments finis d'équilibre) initialement développés par Morelle et Nguyen-Dang Hung (1983). En effet, étant donné que dans cette section seule l'approche statique du problème d'adaptation élastoplastique est considérée, ce choix d'éléments est préconisé. Dans un souci d'être complet, nous commencerons ce paragraphe par rappeler les principes de construction de ces éléments.

#### IV.2.2.a Discrétisation spatiale

Nous nous plaçons dans le cadre de travail défini au premier paragraphe de ce chapitre. La modélisation de la coque est donc réduite à sa surface moyenne. Nous nous restreignons maintenant aux coques de révolution chargées de façon axisymétrique. Du fait de l'axisymétrie du problème, l'étude de la coque est maintenant rapportée à celle d'une ligne moyenne, intersection de la surface moyenne avec un plan contenant l'axe de symétrie. Pour la modélisation éléments finis, la ligne moyenne est décomposée en $NE$ éléments finis. Le champ de contraintes est alors discrétisé dans chaque élément fini, qui contient lui-même des points de Gauss pour l'intégration numérique. Dans la suite, nous noterons $NG$ le nombre de points de Gauss total de la structure.

**Calcul de la réponse purement élastique**

L'hypothèse de base consiste à choisir le champ de contraintes de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c} \tag{IV.8}$$

où $\boldsymbol{x}$ est la coordonnée du point, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ des paramètres tels que $\boldsymbol{Sb}$ vérifie les conditions d'équilibre sans forces de volumes et $\boldsymbol{Tc}$ équilibre ces dernières :

$$div(\boldsymbol{Sb}) = 0$$
$$div(\boldsymbol{Tc}) = \boldsymbol{f}$$

« *div* » désigne l'opérateur divergence. Pour garantir l'équilibre entre les éléments voisins, on définit un ensemble de connecteurs $\boldsymbol{g}$ garantissant la transmission des tractions de surface $\boldsymbol{p}$, en adoptant pour $\boldsymbol{g}$ la même forme que $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{c} \tag{IV.9}$$

[16] dont nous avions le privilège de disposer en partie lorsque nous avons commencé cette étude

où $\boldsymbol{C}_b$ et $\boldsymbol{C}_c$ sont les matrices de connexions statiques de l'élément. Les formes détaillées des matrices $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{C}_b$ et $\boldsymbol{C}_c$ pourront être trouvées dans l'annexe C, paragraphe C.1.
L'énergie de déformation complémentaire interne est fournie par :

$$\begin{aligned} U_{int} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T : \boldsymbol{\varepsilon}\ dV &= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T : E^{-1}\boldsymbol{\sigma}\ dV \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bb}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{F}_{cc}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bc}\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{IV.10}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{bb} = \displaystyle\int_V \boldsymbol{S}^T E^{-1}\boldsymbol{S} dV \\ \boldsymbol{F}_{bc} = \displaystyle\int_V \boldsymbol{S}^T E^{-1}\boldsymbol{T} dV \\ \boldsymbol{F}_{cc} = \displaystyle\int_V \boldsymbol{T}^T E^{-1}\boldsymbol{T} dV \end{cases}$$

D'autre part, l'énergie potentielle complémentaire s'exprime par :

$$U_{ext} = -\int_{S_u} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p}\ dS_u$$

Les tractions de surface $\boldsymbol{p}$ dans l'expression précédente de l'énergie potentielle étant directement liées aux paramètres $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$, on peut toujours s'arranger pour que l'énergie potentielle ait la forme suivante :

$$U_{ext} = -\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{q}$$

où $\boldsymbol{q}$ sont les déplacements généralisés conjugués aux forces généralisées $\boldsymbol{g}$.

En annulant la variation de l'énergie complémentaire totale $\delta(U_{int} + U_{ext})$, il vient :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bb}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{F}_{cc}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bc}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{q}\right) = 0$$

soit, en remplaçant $\boldsymbol{g}$ par son expression (IV.9) :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bb}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{F}_{cc}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F}_{bc}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{C}_b^T\boldsymbol{q} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{C}_c^T\boldsymbol{q}\right) = 0$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{C}_b^T\boldsymbol{q} - \boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{F}_{bc}\boldsymbol{c} \tag{IV.11}$$

La substitution de (IV.11) dans (IV.9) donne alors :

$$\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^f = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{IV.12}$$

où l'on a posé :

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{C}_b^T$$

pour la matrice de rigidité, et :

$$\boldsymbol{g}^f = (\boldsymbol{C}_b\boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{F}_{bc} - \boldsymbol{C}_c)\boldsymbol{c}$$

pour les forces implicites.

De même, la substitution de (IV.11) dans (IV.8) fournit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{c} \tag{IV.13}$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{C}_b^T \\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{F}_{bb}^{-1}\boldsymbol{F}_{bc} \end{cases}$$

La résolution du problème élastique consistera donc à utiliser (IV.12) pour calculer les déplacements $\boldsymbol{q}$, puis, une fois $\boldsymbol{q}$ connu, $\boldsymbol{\sigma}$ sera déterminé à l'aide de (IV.13) (on pourra se reporter à l'annexe C, paragraphe C.1, pour les formes détaillées des matrices $\boldsymbol{F}_{bb}$ et $\boldsymbol{F}_{bc}$).

**Discrétisation du champ de contraintes résiduelles**

En ce qui concerne le champ de contraintes résiduelles, celui-ci doit satisfaire les équations d'équilibre sans second membre. En prenant la même interpolation pour $\boldsymbol{\rho}$ que celle choisie pour $\boldsymbol{\sigma}$, on a :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{b} \tag{IV.14}$$

En tenant compte de l'équilibre avec les tractions de surface, on divise le vecteur structural $\boldsymbol{g}^s$ en deux parties :

$$\boldsymbol{g}^s = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{S_\rho} \\ \boldsymbol{g}_{S_u} \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à diviser également la matrice $\boldsymbol{C}_b^s$ en deux parties :

$$\boldsymbol{C}_b^s = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{bS_\rho} \\ \boldsymbol{C}_{bS_u} \end{pmatrix}$$

L'équilibre avec les tractions de surface conduit alors à :

$$\boldsymbol{C}_{bS_\rho}\boldsymbol{b} = 0$$

où $\boldsymbol{C}_{bS_\rho}$ est la matrice de connexion statique globale, dans laquelle les composantes correspondant aux degrés de liberté en déplacement ont été éliminées.

En appliquant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, l'équation précédente se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = 0$$

En supposant que $\boldsymbol{C}_1^{-1}$ existe, on a finalement :

$$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{b}_2$$

soit :

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{b}_2$$

Les paramètres linéairement indépendants $\boldsymbol{b}_2$ caractérisent le champ de contraintes résiduelles. Pour plus de clarté, notons ceux-ci $\boldsymbol{x}$. On a alors

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} \tag{IV.15}$$

En réinjectant cette dernière expression de $\boldsymbol{b}$ dans (IV.14), on obtient le champ de contraintes résiduelles en chaque point de Gauss $i$ :

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i \tag{IV.16}$$

où $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i$ désigne les composantes du vecteur $\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}$ associées au point de Gauss $i$.

#### IV.2.2.b Discrétisation du domaine de chargement

Soit $n$ le nombre de charges indépendantes $\mathcal{P}_k(t)$ imposées à la structure. Le domaine de charge $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est donc défini par :

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \mathcal{P}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathcal{P}_k(t),\ \mu_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+] \right\}$$

où les multiplicateurs scalaires $\mu_k^-$ et $\mu_k^+$ sont respectivement les bornes inférieures et supérieures des chargements imposés $\mathcal{P}_k(t)$. Le domaine de chargement $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est donc un polyèdre convexe de $NV = 2^n$ sommets dans l'espace des charges. Comme cela a été rappelé au chapitre précédent, paragraphe III.2.1, il y aura adaptation dans le domaine de charge $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ si et seulement si il y a adaptation pour les points anguleux de ce domaine. On considérera donc dans la suite uniquement les $NV$ sommets du domaine de charge $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

#### IV.2.2.c Formulations discrétisées des deux problèmes d'optimisation

En utilisant les rappels effectués dans les deux paragraphes précédents sur la discrétisation spatiale et temporelle, on peut établir les formes discrétisées des deux problèmes de programmation mathématique énoncés au paragraphe IV.2.1 (formulations (IV.6) et (IV.7)). En ce qui concerne le problème (IV.6), on obtient le problème d'optimisation :

$$\underset{\lambda, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}_i}{\text{Sup}} \quad \lambda \tag{IV.17}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i)\right]^2 \leq \sigma_\infty^2,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \\ \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{X}_i)\right]^2 \leq \sigma_Y^2,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \end{cases}$$

tandis que la forme discrétisée du problème (IV.7) est :

$$\underset{\lambda, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}_i}{\text{Sup}} \quad \lambda \tag{IV.18}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \left[\mathcal{F}(\boldsymbol{X}_i)\right]^2 \leq X_\infty^2,\ \forall i \in [1, NG] \\ \left[\mathcal{F}(\lambda \boldsymbol{\sigma}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{X}_i)\right]^2 \leq \sigma_Y^2,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \end{cases}$$

Exprimons maintenant ces deux problèmes en termes d'éléments de réduction adimensionnés $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$, introduits au paragraphe IV.1.2.b. D'après (IV.3), la surface d'écoulement s'exprime en fonction des éléments de réduction de section adimensionnés. Posons

$$\overline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}) = \sqrt{I_{\alpha\beta\gamma\lambda}\left(n^{\alpha\beta}n^{\gamma\lambda} + \frac{9}{4}m^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda} \pm 2\frac{3}{2}n^{\alpha\beta}m^{\gamma\lambda}\right)}$$

Soit $\boldsymbol{A}$ la matrice définie positive construite à partir du tenseur métrique telle que la fonction d'écoulement prenne la forme :

$$\overline{f}_{\pm}(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{B}_{\pm}\boldsymbol{Q}} \tag{IV.19}$$

avec

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{B}_{\pm} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \pm\frac{3}{2}\boldsymbol{A} \\ \pm\frac{3}{2}\boldsymbol{A} & \frac{9}{4}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

Pour modéliser l'écrouissage cinématique, les contraintes internes $\overline{\boldsymbol{X}} = (\overline{\boldsymbol{X}}_n\ \overline{\boldsymbol{X}}_m)^T$, indépendantes du temps, sont introduites, ce qui fournit pour la surface d'écoulement l'expression suivante :

$$\overline{f}_{\pm}(\boldsymbol{Q} - \overline{\boldsymbol{X}}) - 1 = \sqrt{\left(\boldsymbol{Q} - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^T \boldsymbol{B}_{\pm}\left(\boldsymbol{Q} - \overline{\boldsymbol{X}}\right)} - 1 = 0$$

Dans ce cas, la surface limite des contraintes internes prend la forme :

$$\overline{f}_{\pm}(\overline{\boldsymbol{X}}) - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} = \sqrt{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}_{\pm}\overline{\boldsymbol{X}}} - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} = 0$$

et la surface limite devient :

$$\overline{f}_{\pm}(\boldsymbol{Q}) - \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y} = \sqrt{\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{B}_{\pm}\boldsymbol{Q}} - \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y} = 0$$

On peut alors reformuler le premier problème (IV.17) en fonction des éléments de réduction adimensionnés :

$$\underset{\lambda,\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{X}}_i}{\text{Sup}}\ \lambda \tag{IV.20}$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} \left[\ \overline{f}_{\pm}(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}_{ik} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i)\right]^2 - \dfrac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} \leq 0,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \\ \left[\ \overline{f}_{\pm}(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}_{ik} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2 - 1 \leq 0,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \end{cases}$$

De la même manière, la forme discrétisée du problème (IV.18) devient :

$$\underset{\lambda,\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{X}}_i}{\text{Sup}}\ \lambda \tag{IV.21}$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} \left[\ \overline{f}_{\pm}(\overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2 - \dfrac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} \leq 0,\ \forall i \in [1, NG] \\ \left[\ \overline{f}_{\pm}(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}_{ik} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2 - 1 \leq 0,\ \forall i \in [1, NG],\ \forall k \in [1, NV] \end{cases}$$

On peut d'ores et déjà remarquer que le nombres de variables d'optimisation est identique dans les deux cas, mais que le nombre de contraintes inégalités n'est pas le même. En effet, pour le deuxième problème, le nombre de contraintes est de $2(NG + NG \times NV)$, puisque une partie des contraintes ne sont à vérifier que pour chaque point de Gauss, tandis que pour le premier problème, le nombre de contraintes est de $4(NG \times NV)$ puisque toutes les contraintes sont à vérifier pour chaque point de Gauss et chaque point anguleux du domaine de chargement.

### IV.2.3 Résultats numériques pour une coque cylindrique soumise à une pression interne et à une charge annulaire

Pour tester les deux formulations établies au paragraphe précédent, nous choisissons de traiter un exemple déjà étudié dans Tritsch (1993), celui d'une coque cylindrique, simplement appuyée à l'extrémité gauche, soumise à une pression interne $p$ et à une charge annulaire $Q$ (voir figure IV.3). Ces deux charges varient indépendamment l'une de l'autre entre les limites :

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq p^* \\ 0 \leq Q \leq Q^* \end{cases}$$

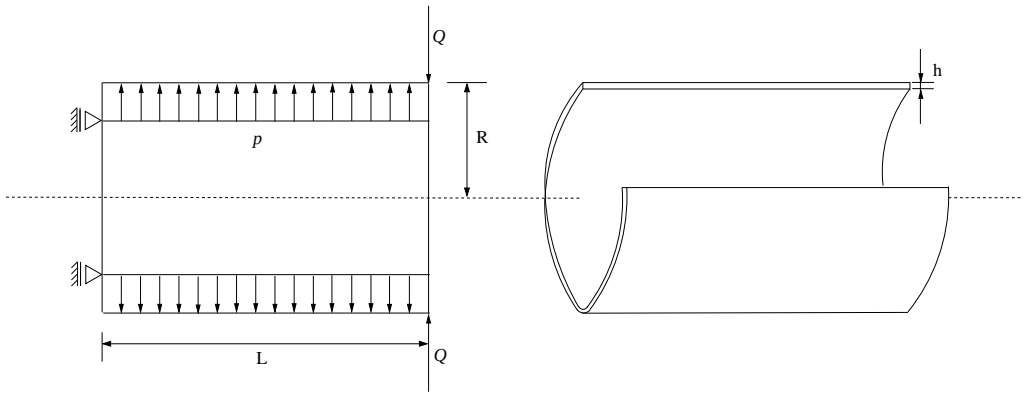



*Figure IV.3 - Coque cylindrique soumise à une pression interne p et à une charge annulaire Q*

Nous prenons, pour les simulations, les caractéristiques géométriques de la coque et du matériau correspondant à un acier telles qu'elles ont été définies dans Tritsch (1993) :

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{10},\ \frac{L}{R} = \frac{3}{10}$$
$$E = 210\,000\,MPa,\ \nu = 0.3$$
$$\sigma_Y = 360\,MPa,\ \sigma_\infty = 1.5\sigma_Y$$

Dans un premier temps, puisque le principal objectif est de déterminer le domaine d'adaptation, intéressons nous au facteur d'adaptation.

#### IV.2.3.a Facteur d'adaptation

Rappelons dans un premier temps que le modèle à deux surfaces permet d'obtenir la courbe d'interaction correspondant à l'intersection du domaine limite de plasticité alternée et le do-

maine limite de plasticité accumulée (voir figure IV.4[17]).

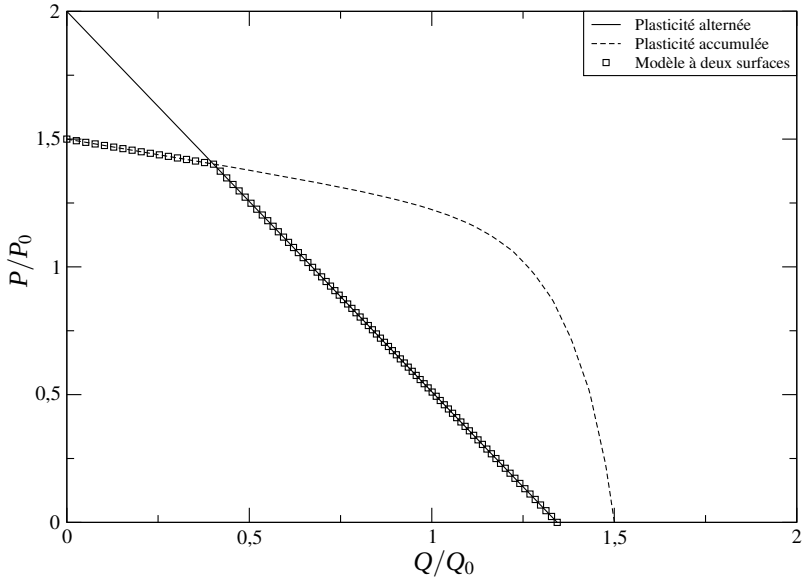



*Figure IV.4 - Courbe d'interaction pour une coque cylindrique soumise à une pression interne $P$ et à une charge annulaire $Q$*

Dans un second temps, puisque c'est le sujet de l'étude, nous avons comparé les valeurs du facteur d'adaptation obtenues dans les deux problèmes d'optimisation (IV.20) et (IV.21). Ces valeurs sont strictement identiques, ce qui laisse penser que les deux problèmes sont équivalents. Néanmoins, si l'on compare les valeurs des autres variables des problèmes d'optimisation que sont les paramètres caractérisant le champ de contraintes résiduelles $\boldsymbol{x}$ et le champ de contraintes internes $\overline{\boldsymbol{X}}$, on observe que celles-ci ne sont pas identiques pour les deux problèmes d'optimisation. De manière à déterminer d'où vient cette différence entre les deux problèmes, nous avons décidé de nous intéresser aux variables duales des deux problèmes de programmation mathématique et donc aux multiplicateurs de Lagrange de ces problèmes.

#### IV.2.3.b Lagrangiens et multiplicateurs de Lagrange des deux problèmes d'optimisation

Intéressons nous aux Lagrangiens associés aux deux problèmes d'optimisation que nous étudions. Notons $\mathcal{L}_1$ le Lagrangien associé au problème discrétisé (IV.20) et $\mathcal{L}_2$ le Lagrangien associé au problème discrétisé (IV.21). Dans la suite, de manière à alléger notre propos, on ne détaille pas les surfaces indicées par les signes + et - en conservant la notation $\pm$ utilisée précédemment. Néanmoins, signalons que lorsque l'on rencontre le symbole $\overline{f}_{\pm}$, cela signifie que les deux cas (i.e. $\overline{f}_{+}$ et $\overline{f}_{-}$) sont à considérer.

[17] où $P_0$ et $Q_0$ désignent respectivement les charges limites pour le chargement en pression et le chargement annulaire déterminées au préalable par un calcul numérique en analyse limite.

**Problème d'optimisation (IV.20)**
Pour ce problème, le Lagrangien est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = \lambda &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \delta_{ik}^{1\pm}\left(\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i)\right]^2\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{1\pm}\left(1 - \left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2\right)\end{aligned} \tag{IV.22}$$

où les $\delta_{ik}^{1\pm}$ et $\alpha_{ik}^{1\pm}$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement à la surface limite et à la surface d'écoulement. L'observation de ces multiplicateurs de Lagrange permet de déterminer si la surface est active ou non. En effet, ils doivent vérifier les conditions :

$$\begin{aligned}\delta_{ik}^{1\pm}\left(\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i)\right]^2\right) = 0,\ \delta_{ik}^{1\pm} \geq 0,\ \forall i,k \\ \alpha_{ik}^{1\pm}\left(1 - \left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2\right) = 0,\ \alpha_{ik}^{1\pm} \geq 0,\ \forall i,k\end{aligned}$$

ce qui signifie que si l'on se trouve à l'intérieur du domaine limité par une de ces deux surfaces, le multiplicateur de Lagrange associé est nul, et dans le cas où l'on se trouve sur la surface, le multiplicateur de Lagrange associé est non nul. L'observation de ces multiplicateurs peut donc nous fournir des informations sur les résultats numériques obtenus.

Pour le problème d'optimisation (IV.20) ci-dessus, l'observation de ces multiplicateurs nous fournit la constatation suivante : il existe des points de Gauss $i$ et des cas de charges $k$ pour lesquels la surface limite est active, i.e. tels que :

$$\left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i)\right]^2 - \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} = 0$$

et tels que la surface de plasticité ne soit pas active, i.e. :

$$\left[\,\overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)\right]^2 - 1 < 0$$

Mécaniquement, il n'est pas acceptable de pouvoir se trouver à la fois dans le domaine élastique et sur la surface limite. De plus, même si nous le pensions au départ, il semble que cette formulation ne garantisse pas la non violation de la surface limite des contraintes internes. En effet, une vérification des valeurs de ce critère a été effectuée et a pu montrer qu'aux points où la situation précédente était effective, celui-ci pouvait être violé. Le fait que l'on se trouve sur la surface limite, tout en étant dans le domaine élastique est donc expliqué par le fait que le critère limite des contraintes internes est violé. Cette situation correspond à celle des points $X_1$ et $\sigma_1$ sur la figure IV.5.

Celle-ci montre que même si l'on ne viole pas la surface limite au point de contrainte $\sigma$, il est possible que la surface de plasticité soit sortie du domaine limite ce qui n'est pas acceptable du point de vue mécanique. En observant ensuite systématiquement, les valeurs prises par le critère d'écoulement et les critères limites, on détecte une autre situation mécaniquement inacceptable.

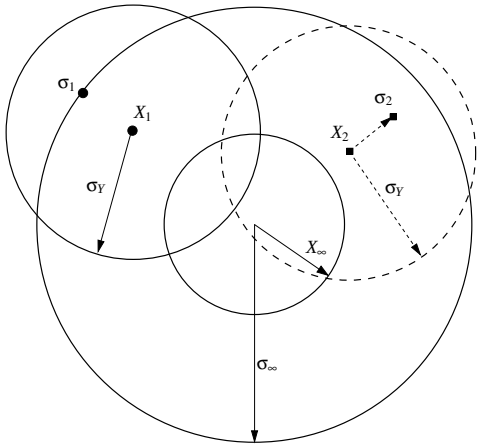



*Figure IV.5 - Schématisation des cas limites non admissibles pour le problème d'optimisation (IV.20)*

En effet, il existe des points de Gauss pour lesquels même si l'on se trouve à l'intérieur du domaine élastique et du domaine limite, le domaine limite des contraintes internes est violé. Cette situation est schématisée par les points $\sigma_2$ et $X_2$ de la figure IV.5. Il semble donc que cette formulation, bien qu'elle semble donner un facteur d'adaptation cohérent, ne fournisse pas une représentation correcte des phénomènes mécaniques mis en jeu.

**Problème d'optimisation (IV.21)**
Pour ce problème, le Lagrangien est de la forme suivante :

$$\mathcal{L}_2 = \lambda + \sum_{i=1}^{NG} \delta_i^{2\pm} \left( \frac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left[ \overline{f}_\pm(\overline{\boldsymbol{X}}_i) \right]^2 \right) + \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{2\pm} \left( 1 - \left[ \overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i) \right]^2 \right) \tag{IV.23}$$

où les $\delta_{ik}^{2\pm}$ et $\alpha_{ik}^{2\pm}$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement à la surface limite des contraintes internes et à la surface d'écoulement. Comme dans le paragraphe précédent, ces multiplicateurs doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\delta_i^{2\pm} \left( \frac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left[ \overline{f}_\pm(\overline{\boldsymbol{X}}_i) \right]^2 \right) = 0, \ \delta_i^{2\pm} \geq 0, \ \forall i$$

$$\alpha_{ik}^{2\pm} \left( 1 - \left[ \overline{f}_\pm(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i) \right]^2 \right) = 0, \ \alpha_{ik}^{2\pm} \geq 0, \ \forall i, k$$

Dans ce deuxième cas, l'observation de ces multiplicateurs nous donne les deux cas de figures limites qui peuvent se produire (on entend par cas limites les cas qui ne correspondent pas à la situation la plus simple : on se trouve strictement à l'intérieur de toutes les surfaces limites). On résume ces deux cas sur le schéma IV.6.

Le premier cas correspond à la configuration suivante : les contraintes internes se trouvent sur leur surface limite (point $X_1$ sur la figure IV.6), la surface de plasticité et la surface limite sont actives (point $\sigma_1$ sur la figure IV.6). Pour le second cas limite, les contraintes internes se trouvent

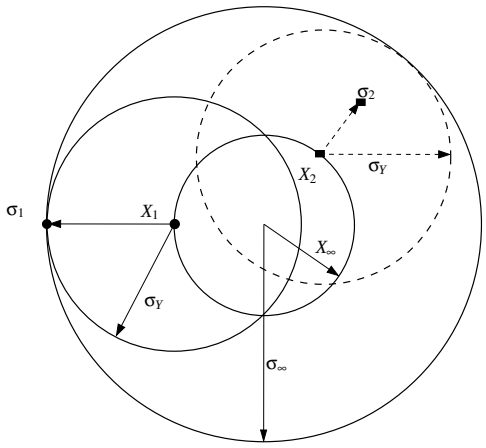



*Figure IV.6 - Schématisation des deux cas limites pour le problème d'optimisation (IV.21)*

encore sur leur surface limite (point $X_2$ sur la figure IV.6), mais cette fois, on se trouve dans le domaine d'élasticité (point $\sigma_2$ sur la figure IV.6) et l'on peut vérifier que la surface limite des contraintes n'est pas violée. Cette formulation du problème d'optimisation, contrairement à la formulation précédente (IV.20), ne comporte pas d'incohérence mécanique et se révèle donc pertinente. C'est donc celle qui sera retenue pour la suite de l'étude.

**Conditions d'optimalité des deux problèmes d'optimisation**

Nous avons pu constater au chapitre précédent, paragraphe III.2.4.b, que les conditions d'optimalité (ou conditions de Karush-Kühn-Tucker) pouvaient éventuellement permettre de retrouver les lois de comportement du problème sous forme discrétisée. Puisque nous avons vu que les deux problèmes proposés ici ne sont pas équivalents, examinons les différences qui existent entre leurs conditions d'optimalité. Commençons par le problème (IV.21) qui semble être le plus cohérent du point de vue mécanique. Le Lagrangien correspondant est donné par (IV.23) soit, lorsque le critère d'écoulement de Hüber-Mises est pris pour $\overline{f}_{\pm}$, comme c'est le cas ici :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \lambda &+ \sum_{i=1}^{NG} \delta_i^{2+} \left( \frac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \overline{\boldsymbol{X}}_i^T \boldsymbol{B}_+ \overline{\boldsymbol{X}}_i \right) + \sum_{i=1}^{NG} \delta_i^{2-} \left( \frac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \overline{\boldsymbol{X}}_i^T \boldsymbol{B}_- \overline{\boldsymbol{X}}_i \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{2+} \left( 1 - (\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)^T \boldsymbol{B}_+ (\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{2-} \left( 1 - (\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)^T \boldsymbol{B}_- (\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i) \right)\end{aligned}$$

La condition d'optimalité pour la variable correspondant au facteur d'adaptation $\lambda$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda} = 0$$

fournit alors :

$$1 = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NV} \left( \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} \right)^T (2\alpha_{ik}^{2+} \boldsymbol{B}_+ + 2\alpha_{ik}^{2-} \boldsymbol{B}_-)(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i))$$

On peut reconnaître dans cette égalité la forme discrétisée de la condition de normalisation :

$$1 = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NV} w_i \, det(J) \, \left(\boldsymbol{Q}_{ik}^{e0}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}}_{ik}$$

où $w_i$ désigne le poids associé au point de Gauss $i$, $det(J)$ le déterminant de la transformation permettant de passer de l'élément réel à l'élément de référence et $\dot{\boldsymbol{q}}$ le vecteur vitesses de déformations plastiques. D'autre part, la condition d'optimalité associée aux contraintes internes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \overline{\boldsymbol{X}}_i} = 0$$

nous donne :

$$\sum_{k=1}^{NV} (2\alpha_{ik}^{2+} \boldsymbol{B}_+ + 2\alpha_{ik}^{2-} \boldsymbol{B}_-)(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)) = (2\delta_i^{2+} \boldsymbol{B}_+ 2\delta_i^{2-} \boldsymbol{B}_-)\overline{\boldsymbol{X}}_i$$

En utilisant alors la forme de $\dot{\boldsymbol{q}}_{ik}$ identifiée précédemment, on obtient :

$$w_i \, det(J) \sum_{k=1}^{NV} \dot{\boldsymbol{q}}_{ik} = (2\delta_i^{2+} \boldsymbol{B}_+ 2\delta_i^{2-} \boldsymbol{B}_-)\overline{\boldsymbol{X}}_i \tag{IV.24}$$

**Remarque :**
Cette dernière égalité peut alors être interprétée de la manière suivante :

- si les deux surfaces limites des contraintes internes ne sont pas actives au point de Gauss $i$, c'est-à-dire si $\delta_i^{2+}$ et $\delta_i^{2-}$ sont nuls, alors l'incrément de vitesses de déformations plastiques :

  $$\Delta \dot{\boldsymbol{q}}_i = \oint \dot{\boldsymbol{q}}_i \, dt = \sum_{k=1}^{NV} \dot{\boldsymbol{q}}_{ik}$$

  est nul.
- si au moins une des deux surfaces limites des contraintes internes est active au point de Gauss $i$, c'est-à-dire si $\delta_i^{2+}$ ou $\delta_i^{2-}$ est non nul, alors l'incrément de vitesses de déformations plastiques est non nul.

Cette remarque permet donc de situer si l'on se trouve sur la partie de courbe d'interaction correspondant à la limite en plasticité alternée (dans ce cas tous les incréments de vitesses de déformations plastiques sont nuls, en tout point de Gauss), ou à la limite en plasticité accumulée (dans ce cas, il existe au moins un incrément de vitesses de déformations plastiques non nul). Elle pourra alors être utilisée pour déterminer la nature cinématique de la non-adaptation.

Si maintenant, on applique la même procédure au problème d'optimisation (IV.20), l'expression du Lagrangien (IV.22) devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = \lambda &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \delta_{ik}^{1+}\left(\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i\right)^T \boldsymbol{B}_+ \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i\right)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \delta_{ik}^{1-}\left(\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_Y^2} - \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i\right)^T \boldsymbol{B}_- \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i\right)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{1+}\left(1 - \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i\right)^T \boldsymbol{B}_+ \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i\right)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \alpha_{ik}^{1-}\left(1 - \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i\right)^T \boldsymbol{B}_- \left(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i\right)\right)\end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \overline{X}_i} &= 0\end{aligned}$$

nous fournissent :

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \left(\boldsymbol{Q}_{ik}^{e0}\right)^T (2\alpha_{ik}^{1+}\boldsymbol{B}_+ + 2\alpha_{ik}^{1-}\boldsymbol{B}_-)(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{NG}\sum_{k=1}^{NV} \left(\boldsymbol{Q}_{ik}^{e0}\right)^T (2\delta_{ik}^{1+}\boldsymbol{B}_+ + 2\delta_{ik}^{1-}\boldsymbol{B}_-)(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i)) \\ 0 &= \sum_{k=1}^{NV} (2\alpha_{ik}^{1+}\boldsymbol{B}_+ + 2\alpha_{ik}^{1-}\boldsymbol{B}_-)(\lambda \boldsymbol{Q}_{ik}^{e0} + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{Jx})_i - \overline{\boldsymbol{X}}_i))\end{aligned}$$

On ne peut alors plus identifier la première de ces égalités à la condition de normalisation discrétisée, puisque les multiplicateurs de Lagrange associés à la surface limite y sont présents. Par conséquent, il sera difficile d'envisager une interprétation de la seconde égalité.

Finalement, cette étude des conditions d'optimalité dans chacun des deux problèmes d'optimisation confirme que seule la formulation (IV.18) est pertinente du point de vue mécanique. Elle fournit en outre la formulation d'un indicateur permettant de détecter la nature cinématique de la non-adaptation que nous testerons dans la suite de ce chapitre. En conclusion, il apparaît donc comme nécessaire d'imposer explicitement la limitation des contraintes internes dans la formulation du modèle à deux surfaces.

## IV.3 Adaptation élastoplastique avec règle d'écrouissage cinématique linéaire limité par l'approche du bipotentiel

Comme nous avons pu le constater, dans le cadre des matériaux standards généralisés l'introduction de l'écrouissage cinématique linéaire limité dans l'étude de l'adaptation élastoplastique conduit à la formulation d'un problème de borne statique. Néanmoins, la construction d'un problème de borne cinématique semble poser plus de difficultés. Les principales approches sur ce sujet (on pourra se référer, entre autres à Pham et Weichert (2001) et Nguyen Quoc Son (2003)) consistent en la détermination du problème dual du problème de borne statique. Le problème de borne cinématique obtenu est alors un problème de point selle, ce qui rend la résolution numérique plus délicate. De ce point de vue, l'approche du bipotentiel, introduite au chapitre I, peut fournir un cadre de travail intéressant puisqu'elle permet la construction simultanée des deux problèmes de bornes. Dans ce paragraphe, nous aborderons donc une nouvelle fois l'introduction de l'écrouissage cinématique linéaire limité dans l'étude de l'adaptation élastoplastique, mais cette fois dans le cadre des matériaux standards implicites.

### IV.3.1 Formulation des problèmes de bornes cinématique et statique

L'approche du bipotentiel va donc être utilisée ici pour établir les problèmes de bornes statique et cinématique pour un modèle appartenant à la classe des matériaux standards généralisés. Dans un premier temps, nous procédons à la construction d'un bipotentiel pour ce modèle.

#### IV.3.1.a Construction d'un bipotentiel

Rappelons que, dans l'espace des variables généralisées $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{m})^T$, le domaine élastique convexe $K_E$ est limité par la fonction d'écoulement d'Hüber-Mises (IV.3) définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}_{\pm}(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}\right)\left(n^{\alpha\beta} \pm \frac{3}{2}m^{\alpha\beta}\right)\left(n^{\gamma\delta} \pm \frac{3}{2}m^{\gamma\delta}\right)}$$

où les indices grecs varient de 1 à 2 et $a$ est le tenseur métrique. Nous avons déjà vu au paragraphe IV.2.2.c qu'en introduisant la matrice définie positive $\boldsymbol{A}$ construite à partir du tenseur métrique, la fonction d'écoulement prenait la forme (IV.19). En posant $\boldsymbol{Q}_{\pm} = \boldsymbol{n} \pm \frac{3}{2}\boldsymbol{m}$, elle peut aussi s'écrire comme suit :

$$\overline{\mathcal{F}}_{\pm}(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{{\boldsymbol{Q}_{\pm}}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_{\pm}} \tag{IV.25}$$

Remarquons que ces deux formes du critère d'écoulement (IV.25) et (IV.19) présentent chacune un intérêt. En effet, la forme (IV.25) présente l'avantage d'être formulée à l'aide d'une matrice $\boldsymbol{A}$ définie positive, tandis que la forme (IV.19) l'est avec une matrice $\boldsymbol{B}$ singulière. Néanmoins, la forme (IV.19) du critère d'écoulement est exprimée explicitement en fonction des variables généralisées $\boldsymbol{Q}$, ce qui n'est pas le cas de la forme (IV.25), puisqu'elle dépend explicitement des variables $\boldsymbol{Q}_{\pm} = \boldsymbol{n} \pm \frac{3}{2}\boldsymbol{m}$ et donc implicitement de $\boldsymbol{Q}$.

Pour la modélisation de l'écrouissage cinématique, on rappelle l'écriture des contraintes internes sous la forme $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_n \ \boldsymbol{X}_m)^T$. Le domaine élastique prend alors la forme :

$$K_E = \{(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \overline{f}_+(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{f}_-(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0\}.$$

Comme pour les variables généralisées $\boldsymbol{Q}$, on peut introduire $\boldsymbol{X}_\pm = \boldsymbol{X}_n \pm \frac{3}{2}\boldsymbol{X}_m$, ce qui permet de mettre le domaine élastique sous une autre forme :

$$K_E = \{(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \overline{\mathcal{F}}_+(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{\mathcal{F}}_-(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0\}.$$

On introduit ensuite le domaine limite des contraintes internes, noté $K_L$ :

$$K_L = \left\{ \boldsymbol{X} \text{ tel que } \overline{\mathcal{G}}_+(\boldsymbol{X}) - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \text{ et } \overline{\mathcal{G}}_-(\boldsymbol{X}) - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \right\}.$$

où l'on a posé :

$$\overline{\mathcal{G}}_\pm(\boldsymbol{X}) = \sqrt{\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{B}_\pm \boldsymbol{X}} \tag{IV.26}$$

Bien que l'on se soit placé dans le cadre des matériaux standards implicites, il faut garder à l'esprit que le modèle étudié rentre dans la catégorie des modèles dits associés. En effet, dans ce cas, la construction du bipotentiel est simplifiée puisque, d'après le chapitre I, paragraphe I.5.2, il suffit de construire le surpotentiel $\Psi_K$, fonction indicatrice du domaine élastique $K$, et le surpotentiel de dissipation $\varphi$ pour obtenir un bipotentiel déterminé par :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \Psi_K(\boldsymbol{\pi}) + \varphi(\dot{\boldsymbol{\kappa}})$$

Dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire limité, le domaine élastique $K$ est complètement défini par l'intersection des domaines $K_E$ et $K_L$[18] :

$$K = K_E \cap K_L$$

Le surpotentiel $\Psi_K$ est donc fourni par :

$$\Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) = \Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})$$

On introduit ensuite les vitesses de déformations plastiques et des variables d'écrouissage, notées respectivement $\dot{\boldsymbol{q}}$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} \end{pmatrix}, \ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_m \end{pmatrix}$$

La règle d'écoulement plastique prend alors la forme suivante :

$$(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \in \partial \Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \tag{IV.27}$$

[18] En effet, si l'on ne considère que l'ensemble $K_E$, les contraintes internes ne sont pas bornées.

Le calcul de la transformée de Legendre-Fenchel du surpotentiel $\Psi_K$ donne l'expression du surpotentiel de dissipation $\varphi$ (le calcul détaillé pourra être trouvé dans l'annexe D, section D.2) :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right) \tag{IV.28}$$

où l'on a posé :

$$\dot{\boldsymbol{q}}_\pm = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\gamma}} \pm \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\chi}}$$
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n \pm \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_m$$

et :

$$\| \dot{\boldsymbol{q}}_\pm \|^* = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_\pm^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_\pm}$$
$$\| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm \|^* = \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm\right)}$$

Maintenant que les expressions de $\Psi_K$ et $\varphi$ sont établies, on peut proposer une formulation de bipotentiel dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire limité :

$$b((\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})) = \Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right) \tag{IV.29}$$

**Proposition.**
La fonction (IV.29) est un bipotentiel.

**Preuve :**
Il suffit de montrer que pour tout couple $((\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}))$, on a :

$$b((\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})) \geq \boldsymbol{Q}^T \dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

Puisque l'on se trouve dans le cadre des matériaux standards généralisés, la démonstration se réduit à l'utilisation de l'inégalité de Fenchel (propriété B.9 de l'annexe B) :

$$b((\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})) = \Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq \boldsymbol{Q}^T \dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

Il reste à montrer la proposition suivante :

**Proposition.**
Les couples extrémaux pour (IV.29) vérifient la loi d'écoulement plastique (IV.27) et réciproquement.

**Preuve :**
Cette proposition est aussi aisément démontrée. En effet, les propriétés rappelées dans l'annexe B, paragraphe B.3, fournissent directement :

$$(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \Leftrightarrow \Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

i.e.

$$(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \Leftrightarrow b((\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}), (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})) = \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

ce qui achève la démonstration.

**Remarque :**
Le cas particulier de l'écrouissage cinématique linéaire illimité de Prager peut être retrouvé en observant ce qui se produit lorsque $X_\infty$ tend vers $+\infty$. En effet, si $X_\infty$ tend vers $+\infty$, cela fournit pour le surpotentiel de dissipation (IV.28) :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \longrightarrow \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_-\right)$$

On retrouve bien le surpotentiel de dissipation dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité.

Maintenant qu'un bipotentiel a été construit avec la règle d'écrouissage cinématique linéaire limité, considérons la formulation des théorèmes de bornes.

#### IV.3.1.b Problème de borne statique

Commençons par le problème de borne statique. De cette manière, on pourra vérifier que la formulation obtenue correspond à celle fournie dans le paragraphe précédent par l'approche de Weichert et Gross-Weege (1988).

En utilisant la formulation (I.61) donnée au chapitre I et rappelée ci dessous :

$$\underset{\overline{\boldsymbol{\pi}}^s, \lambda^s}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda^s - \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'^s), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}')] \right\} dt\, d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\pi}}^s \text{ admissible} \\ \lambda^s \text{ associé à } \overline{\boldsymbol{\pi}}^s \end{cases}$$

on obtient :

$$\underset{\lambda, \overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \Psi_K(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{X}) + \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right) \right\} dt\, d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes } \left\{ \overline{\boldsymbol{Q}} \text{ admissible} \right.$$

La recherche d'une borne supérieure finie nécessite la nullité de la fonction indicatrice et donc l'apparition parmi les contraintes du problème d'optimisation des inégalités caractérisant l'appartenance au domaine K. On parvient alors à :

$$\underset{\lambda,\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{Sup}} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left\{ \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} (\| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^*) \right\} dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{Q}} \text{ admissible} \\ \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^T \boldsymbol{B}_\pm \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}\right) - 1 \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{B}_\pm \overline{\boldsymbol{X}} - \dfrac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} \leq 0 \end{cases}$$

De plus, les termes sous les intégrales sont indépendants des contraintes et donc sont constants pendant le processus d'optimisation. On peut donc les éliminer du problème ce qui nous donne finalement :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\lambda,\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{Sup}} \{\lambda\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{Q}} \text{ admissible} \\ \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^T \boldsymbol{B}_\pm \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}\right) - 1 \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{B}_\pm \overline{\boldsymbol{X}} - \dfrac{X_\infty^2}{\sigma_Y^2} \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On retrouve donc exactement la formulation du problème statique dans le cas du modèle à deux surfaces étudié dans le paragraphe précédent.

### IV.3.1.c Problème de borne cinématique

Comme le problème statique obtenu par l'approche du bipotentiel est identique à celui développé par Weichert et Gross-Weege (1988), cela nous suggère d'aborder la formulation, dans le cadre des matériaux standards implicites, d'un problème cinématique pour ce modèle. Pour cela, on utilise la formulation du problème de borne cinématique (I.58) présentée au chapitre I et que l'on rappelle ici :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{\kappa}}^k}{\mathrm{Inf}} \int_\Omega \oint \left\{ b[(\overline{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}, \overline{\boldsymbol{\pi}}'), (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}'^k)] \right\} dt \; d\Omega$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^k \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt \; d\Omega = 1 \end{cases}$$

En remplaçant le bipotentiel par son expression (IV.29), il vient :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\text{Inf}} \int_\Omega \oint \left\{ \Psi_K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}) + \parallel \dot{\boldsymbol{q}}_+ \parallel^* + \parallel \dot{\boldsymbol{q}}_- \parallel^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} (\parallel \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \parallel^* + \parallel \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \parallel^*) \right\} dt \; d\Omega$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \left(\boldsymbol{Q}^{e0}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \; dt \; d\Omega = 1 \end{cases}$$

Comme dans le cas du problème statique, les termes sous l'intégrale qui ne dépendent pas des variables d'optimisation, peuvent être éliminés du problème. Cela conduit à la formulation suivante du problème de borne cinématique dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire limité :

$$\left\| \begin{array}{l} \displaystyle\underset{\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\text{Inf}} \int_\Omega \oint \left\{ \parallel \dot{\boldsymbol{q}}_+ \parallel^* + \parallel \dot{\boldsymbol{q}}_- \parallel^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} (\parallel \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \parallel^* + \parallel \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \parallel^*) \right\} dt \; d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \begin{cases} (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \left(\boldsymbol{Q}^{e0}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \; dt \; d\Omega = 1 \end{cases} \end{array} \right. \tag{IV.30}$$

Comme dans le cas de l'état de traction constante et torsion alternée homogène en déformation plane étudié au chapitre III, l'implémentation de ce problème nécessitera une régularisation puisque la fonction objectif est non différentiable en zéro. Nous utiliserons alors la même procédure que celle décrite au paragraphe III.2.4.c.

De plus, ce problème nous contraint à la caractérisation des conditions d'admissibilité cinématiques :

$$(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \text{ admissible}$$

du point de vue numérique. Si l'on se reporte à la définition des champs de vitesses de déformations généralisées admissibles introduite dans le chapitre I, paragraphe I.6.1, le champ de vitesses généralisées $(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ sera admissible s'il vérifie les conditions suivantes :

- l'incrément de déformation plastique sur un cycle

$$\Delta \boldsymbol{q} = \oint \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t) dt$$

  est cinématiquement admissible,
- $\dot{\boldsymbol{q}}$ est plastiquement admissible :

$$\int_\Omega \oint \left(\boldsymbol{Q}^e\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \; dt \; d\Omega > 0$$

- l'incrément des variables internes sur un cycle

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \oint \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}, t) dt$$

  est nul.

La deuxième des trois conditions que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire le fait que $\dot{\boldsymbol{q}}$ soit plastiquement admissible, est automatiquement satisfaite puisque l'on impose la condition de normalisation dans le problème d'optimisation. En ce qui concerne la nullité de l'incrément des variables internes (ici réduites à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$), elle ne pose pas de problème particulier à la mise en œuvre. Il suffira en effet, au cours du processus de discrétisation, de la transformer en une somme sur les sommets du domaine de chargement :

$$\sum_{k=1}^{NV} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ik} = 0, \, \forall i \, \in [1, NG]$$

En revanche, la manière d'imposer que l'incrément de déformation plastique sur un cycle $\Delta \boldsymbol{q}$ soit cinématiquement admissible n'est pas évidente à caractériser puisque nous implémentons dans un code programmé à l'aide des éléments finis statiquement admissibles. Par conséquent, avant de passer à l'étude numérique du problème cinématique (IV.30) que nous venons de construire pour l'écrouissage cinématique linéaire limité, il s'est avéré nécessaire de s'intéresser plus particulièrement à l'implémentation des conditions d'admissibilité cinématiques.

## IV.3.2 Sur l'implémentation des conditions d'admissibilité cinématiques

Pour pouvoir mettre en œuvre le problème cinématique (IV.30) proposé dans le paragraphe précédent, on doit en particulier s'intéresser à la manière d'implémenter les conditions d'admissibilité cinématiques dans le programme dont nous disposons, basé sur les éléments statiquement admissibles. Pour cela, dans un premier temps, on se place dans le cadre plus simple et davantage maîtrisé qu'est la plasticité parfaite.

### IV.3.2.a Problèmes de bornes dans le cas de la plasticité parfaite

Rappelons la formulation des problèmes de bornes dans le cas de la plasticité parfaite. D'après l'annexe A, le problème de borne statique en plasticité parfaite (A.15), se met sous la forme suivante :

$$\underset{\bar{\boldsymbol{\rho}},\lambda}{\text{Sup}} \; \{\lambda\}$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\rho}} \text{ admissible} \\ \lambda \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \in K \end{cases}$$

Dans le cas présent, i.e. pour les coques minces étudiées ici, on exprime ce problème en fonction des éléments de réduction adimensionnés. En utilisant le critère d'écoulement de Hüber-Mises, il devient :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\lambda,\overline{\boldsymbol{Q}}}{\text{Sup}} \; \{\lambda\} \\ \\ \\ \text{sous les contraintes} \begin{cases} \overline{\boldsymbol{Q}} \text{ admissible} \\ \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}}\right)^T \boldsymbol{B}_{\pm} \left(\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}}\right) - 1 \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Passons maintenant au problème cinématique. D'après l'annexe A, le problème de borne cinématique (A.10) se met sous la forme suivante :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\text{Inf}} \left\{ \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) dt \; d\Omega \right\}$$

$$\text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right.$$

Le calcul du potentiel de dissipation plastique pour les coques minces dans le cas de la plasticité parfaite (calcul effectué en annexe D, paragraphe D.1) fournit :

$$D(\dot{\boldsymbol{q}}) = \| \; \dot{\boldsymbol{q}}_+ \; \|^* + \| \; \dot{\boldsymbol{q}}_- \; \|^*$$

On obtient alors le problème cinématique suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{q}}}{\text{Inf}} \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ \| \; \dot{\boldsymbol{q}}_+ \; \|^* + \| \; \dot{\boldsymbol{q}}_- \; \|^* \right\} dt \; d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{q}} \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \left( \boldsymbol{Q}^{e0} \right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \, dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les problèmes statique et cinématique étant reformulés dans le cadre de notre étude, revenons au sujet qui nous préoccupe dans ce paragraphe, soit l'implémentation des conditions d'admissibilité cinématiques. Dans un premier temps, puisque nous utilisons un code de calcul programmé en éléments statiquement admissibles, la première idée est de s'intéresser aux conditions cinématiques sous forme faible.

#### IV.3.2.b Conditions d'admissibilité sous forme faible

Si l'on se place dans le cadre des éléments statiquement admissibles, on ne peut accéder qu'aux champs de déformations en moyenne sur l'élément, noté $< \dot{\boldsymbol{q}} >$, (Save et al. (1991), Save et al. (1997)) :

$$< \dot{\boldsymbol{q}} > = \int_{\text{élément}} \boldsymbol{S}^T \dot{\boldsymbol{q}} \; dV^e$$

où $\boldsymbol{S}$ est la matrice des fonctions de forme des contraintes discrétisées qui apparaît dans (IV.8). Cela implique en particulier que la condition « $\Delta \boldsymbol{q}$ est cinématiquement admissible » ne pourra elle-même être imposée qu'en moyenne sur l'élément, sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{J}^T < \Delta \boldsymbol{q} > = 0$$

où l'on retrouve la matrice $\boldsymbol{J}$ issue du processus d'élimination de Gauss-Jordan (IV.15) lors de la discrétisation du champ de contraintes résiduelles.

Dans ce cas le problème d'optimisation associé au problème cinématique devient :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{q}}}{\text{Inf}} \int_\Omega \oint \left\{ \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right\} dt \; d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{J}^T < \Delta \boldsymbol{q} >= 0 \\ \int_\Omega \oint \left( \boldsymbol{Q}^{e0} \right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \, dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce problème est implémenté et testé sur l'exemple du tube sous pression et charge annulaire de la figure IV.3. On compare alors les valeurs du facteur d'adaptation obtenues à celles fournies par le problème statique en plasticité parfaite avec la courbe d'interaction (figure IV.7).

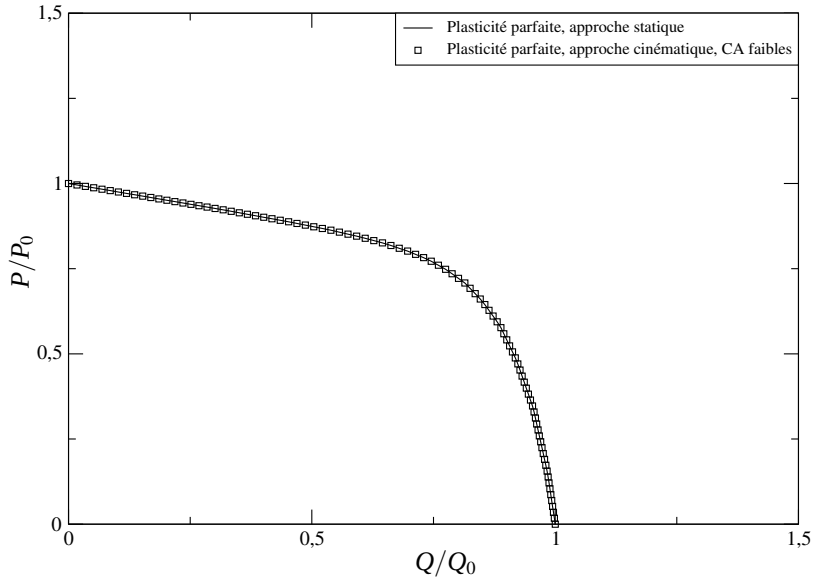



*Figure IV.7 - Comparaison des approches statique et cinématique avec conditions d'admissibilité sous forme faible*

On peut alors remarquer que les valeurs du facteur d'adaptation obtenues par les deux approches sont identiques. L'utilisation des conditions d'admissibilité sous forme faible conduit donc aux mêmes résultats. Cela provient du fait que le problème résolu alors n'est autre que le problème dual (au sens de l'optimisation convexe) du problème statique. On peut alors identifier les multiplicateurs de Lagrange du problème statique aux variables d'optimisation du problème cinématique et réciproquement, les variables d'optimisation du problème statique aux multiplicateurs de Lagrange du problème cinématique.

Si l'on veut réellement déterminer les solutions du problème cinématique, il est donc nécessaire de considérer les conditions d'admissibilité sous forme forte.

#### IV.3.2.c Conditions d'admissibilité sous forme forte

Pour obtenir le facteur d'adaptation cinématique, il faut donc considérer les conditions d'admissibilité cinématiques sous forme forte. Comme la seule partie du code de calcul nécessitant les champs cinématiques est le module d'optimisation du problème cinématique, on peut se contenter de construire la matrice de compatibilité à partir d'un élément cinématique. Pour ce faire, on choisit un élément tronconique sans cisaillement transverse classiquement utilisé pour la modélisation des coques minces (Batoz et Dhatt (1992))[19]. Dans ce cas, en notant $\boldsymbol{C}$ la matrice de compatibilité et $\boldsymbol{\Delta u}$ les incréments de déplacement sur un cycle de chargement, les conditions d'admissibilité se mettent sous la forme :

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Delta q} = \boldsymbol{\Delta u}$$

où l'on a éliminé les déplacements bloqués dans $\boldsymbol{\Delta u}$ et les colonnes correspondantes dans $\boldsymbol{C}$. Le problème d'optimisation associé au problème cinématique devient :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{q}},\Delta u}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_\Omega \oint \left\{ \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right\} dt \; d\Omega \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Delta q} = \boldsymbol{\Delta u} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \left(\boldsymbol{Q}^{e0}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} \; dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comme dans le paragraphe précédent, cette formulation est implémentée et testée sur l'exemple du tube sous pression et charge annulaire de la figure IV.3. La comparaison des facteurs d'adaptation (voir figure IV.8) dans ce cas montre une légère différence des valeurs obtenues par le problème statique et par le problème cinématique.

On peut noter que cette différence est plus importante lorsque l'influence de la charge annulaire est prépondérante. En effet, comme cette charge est ponctuelle et localisée sur l'extrémité du tube, il n'y pas de point de Gauss positionné à l'endroit où est appliquée la charge. C'est donc à cet endroit que l'erreur relative entre les facteurs d'adaptation statique et cinématique prend ses valeurs maximales, de l'ordre de 3.50%. Comme le chargement en pression est un chargement réparti, la répartition des points de Gauss a nettement moins d'influence. De ce fait, lorsque le chargement en pression est prédominant, les valeurs de l'erreur relative entre les facteurs d'adaptation statique et cinématique n'excèdent pas 1%. Cependant, puisque ce n'est pas l'objet principal de ce paragraphe, reprenons le sujet qui nous préoccupe, i.e. le problème cinématique construit pour l'écrouissage cinématique linéaire limité par l'approche du bipotentiel.

[19] Pour plus de détails sur la matrice de compatibilité de cet élément, on pourra se reporter au paragraphe C.2 de l'annexe C.

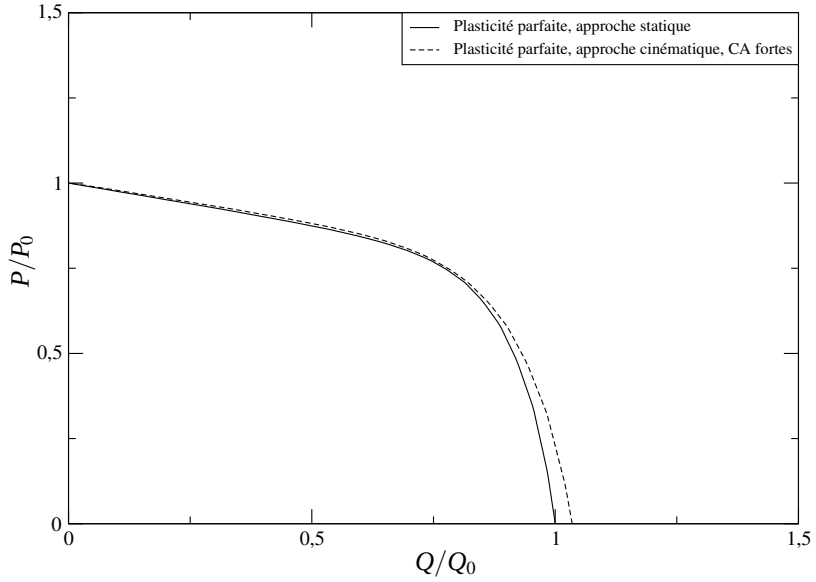



*Figure IV.8 - Comparaison des approche statique et cinématique avec conditions d'admissibilité sous forme forte*

### IV.3.3 Résultats numériques

Maintenant que nous avons constaté que les conditions d'admissibilité cinématiques sous forme forte étaient nécessaires pour déterminer réellement la solution du problème cinématique, nous revenons à l'étude du problème d'adaptation élastoplastique pour les coques minces avec la règle d'écrouissage cinématique linéaire limité et en particulier, au problème cinématique (IV.30) construit par l'approche du bipotentiel.

#### IV.3.3.a Facteur d'adaptation

Comparons les facteurs d'adaptation obtenus par les approches statique et cinématique pour l'exemple du tube sous pression et charge annulaire de la figure IV.3. Pour cela, on trace la courbe d'interaction IV.9.

On peut constater sur la figure IV.9 que les deux approches mènent sensiblement aux mêmes résultats. Un indicateur d'erreur sur le facteur d'adaptation peut être fourni par l'erreur relative entre les facteurs d'adaptation obtenus par les approches statique et cinématique. Son calcul pour tous les points limitant le domaine d'adaptation nous donne une erreur maximum de l'ordre de 0.42%. En outre, on peut remarquer que les erreurs les plus importantes sont observées sur la partie de courbe qui correspond à la limite par plasticité accumulée. Etant donné les ordres de grandeur des erreurs calculées, on a alors la garantie d'un encadrement de la solution particulièrement resserré. Finalement, on peut relever que, comme dans le cas de l'approche statique, la distinction entre les deux types de ruines n'a pas à être considérée puisque les deux sont automatiquement prises en compte dans cette formulation du problème cinématique avec écrouissage cinématique linéaire limité.

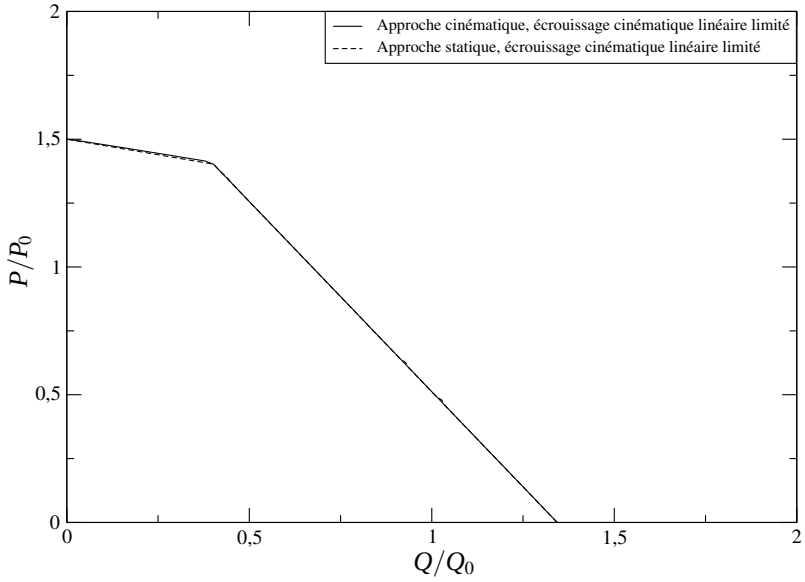



*Figure IV.9 - Comparaison des approche statique et cinématique avec règle d'écrouissage cinématique linéaire limité*

En conclusion, il ressort donc de ce paragraphe que l'application de l'approche du bipotentiel même à des modèles associés peut être particulièrement intéressante car elle permet de construire conjointement les problèmes statique et cinématique et donc les bornes inférieure et supérieure.

### IV.3.3.b Nature cinématique de la non adaptation

Comme nous venons de le voir, l'étude de l'adaptation élastoplastique avec la règle d'écrouissage cinématique linéaire limité fournit directement le domaine d'adaptation prenant en compte les ruines par plasticité alternée et plasticité accumulée. Toutefois, on peut souhaiter connaître, une fois la courbe d'interaction déterminée, la nature cinématique de la non adaptation. En effet, cela conditionne les études, a posteriori de l'adaptation, de comportement de type fatigue dans le cas de la plasticité alternée : fatigue à faible nombre de cycles. Dans ce but, on intègre dans les deux approches (cinématique et statique) des indicateurs permettant de détecter la nature cinématique de la non adaptation.

Commençons par proposer un indicateur pour l'approche statique. Nous pouvons extrapoler sur toute la structure la remarque effectuée au paragraphe IV.2.3.b sur les multiplicateurs de Lagrange du problème statique en chaque point de Gauss :

- si au moins un des multiplicateurs de Lagrange associés à la surface limite des contraintes internes est non nul, alors la nature de la non adaptation est le rochet,
- si tous les multiplicateurs de Lagrange associés à la surface limite des contraintes internes sont nuls, la nature de la non adaptation est la plasticité alternée.

En notant $\delta_i^{\pm}$ ces multiplicateurs de Lagrange et NG le nombre total de points de Gauss, on définit l'indicateur suivant pour la caractérisation de la nature cinématique de la non adaptation :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{stat}} = \max_{i \in NG} (\delta_i^+, \delta_i^-) \tag{IV.31}$$

Dans le cas où cet indicateur est nul (au sens du zéro numérique), on dira qu'il y a ruine par plasticité alternée ; sinon, on dira qu'il y a ruine par plasticité accumulée.

En ce qui concerne l'approche cinématique, suivant König (1987), on utilise l'incrément de déformation plastique pour définir la nature de la non adaptation, et en particulier les deux remarques suivantes :

- si $\oint \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t)\ dt = 0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ alors la nature de la ruine est la plasticité alternée,
- si $\exists \boldsymbol{x} \in \Omega$ tel que $\oint \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t)\ dt \neq 0$ alors la nature de la ruine est la plasticité accumulée.

D'après Magoariec et al. (2005), on peut alors prendre comme indicateur :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{ciné}} = \max_{i \in NG} \left| \oint \dot{\boldsymbol{q}}_i(\boldsymbol{x}, t)\ dt \right| / \max_{i \in NG,\ k \in NV} |\dot{\boldsymbol{q}}_{ik}(\boldsymbol{x}, t)\ dt| \tag{IV.32}$$

où NV désigne le nombre de sommets du domaine de chargement. Dans le cas où cet indicateur sera petit devant 1, on dira qu'il y a ruine par plasticité alternée ; sinon, on dira qu'il y ruine par plasticité accumulée.

Onze points, pour lesquels nous allons calculer les valeurs des deux indicateurs statique (IV.31) et cinématique (IV.32), sont présentés sur la courbe d'interaction (voir figure IV.10).

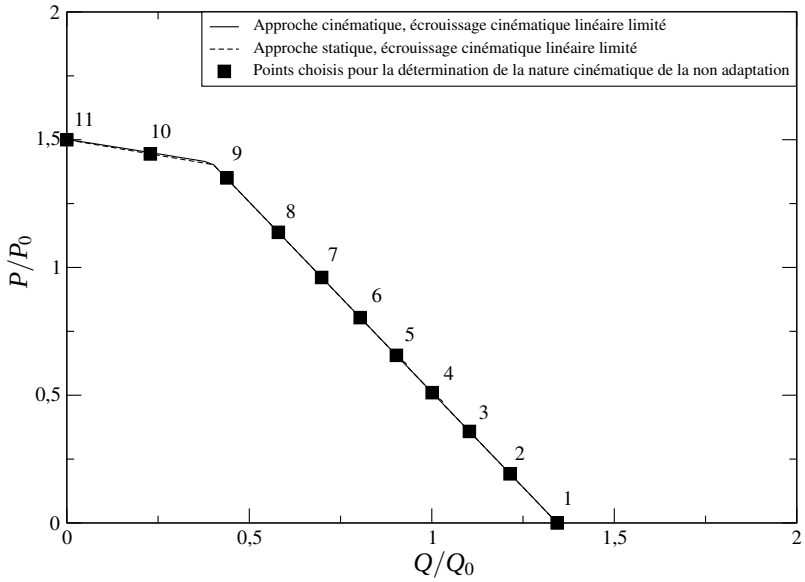



*Figure IV.10 - Points choisis pour la détection de la nature cinématique de la non adaptation*

Les valeurs obtenues des indicateurs sont reportées dans le tableau IV.1. Concernant l'indicateur statique, on peut constater que pour les points 1 à 9, celui-ci est nul. Pour les points 10 et 11, il n'est pas nul mais est de l'ordre de $10^{-2}$. Intéressons nous ensuite aux valeurs de l'indicateur cinématique. Pour les points 1 à 9, celui-ci est de l'ordre de $10^{-5}$, tandis que pour les points 10 et 11, il est supérieur à 1. On peut d'ores et déjà remarquer que le changement d'ordre de grandeur des indicateurs statique et cinématique a lieu entre les points 9 et 10 dans les deux cas. Il semble donc, au regard des valeurs des indicateurs, que la nature cinématique de la non adaptation pour les points 1 à 9 soit la plasticité alternée. Par contre pour les points 10 et 11, la nature cinématique de la ruine paraît être la plasticité accumulée.

*Tableau IV.1 - Valeurs des indicateurs de la nature cinématique de la non adaptation*

| | Indicateur statique | Indicateur cinématique |
|---|---|---|
| Point n°1 | 0,00 | $1,85.10^{-5}$ |
| Point n°2 | 0,00 | $1,43.10^{-5}$ |
| Point n°3 | 0,00 | $1,67.10^{-5}$ |
| Point n°4 | 0,00 | $1,91.10^{-5}$ |
| Point n°5 | 0,00 | $2,16.10^{-5}$ |
| Point n°6 | 0,00 | $2,45.10^{-5}$ |
| Point n°7 | 0,00 | $2,87.10^{-5}$ |
| Point n°8 | 0,00 | $3,40.10^{-5}$ |
| Point n°9 | 0,00 | $5,80.10^{-5}$ |
| Point n°10 | $2,90.10^{-2}$ | 2,51 |
| Point n°11 | $6,25.10^{-3}$ | 4,00 |

Pour s'assurer de ces résultats, on peut les comparer avec la figure IV.4 puisque sur cette figure, les limites par plasticité alternée et plasticité accumulée sont indiquées. En confrontant les résultats fournis par les indicateurs à ce que l'on peut voir sur cette figure, on en déduit que les informations données par les indicateurs cinématique et statique sont exactes : les points 1 à 9 sont effectivement sur la partie de la courbe d'interaction délimitant le domaine de sécurité par rapport à la plasticité alternée tandis que les points 10 et 11 appartiennent à la partie bornant le domaine de sécurité par rapport à la plasticité accumulée. Ainsi, les deux indicateurs, statique et cinématique, proposés ici fournissent de bons résultats et peuvent permettre l'un et l'autre de détecter la nature cinématique de la non adaptation.

## IV.4 Matériaux standards implicites et adaptation élastoplastique pour les structures de type coques minces

Le concept des matériaux standards implicites nous a permis de mener l'étude de l'adaptation élastoplastique d'un exemple simple avec la règle d'écrouissage cinématique non linéaire (chapitre III) et de construire, dans le paragraphe précédent, un problème de borne cinématique avec la règle d'écrouissage cinématique linéaire limité. A présent, nous nous proposons d'appliquer ce

concept aux structures de type coques minces avec, cette fois, une règle d'écrouissage cinématique non linéaire. Pour cela, il importe d'abord de construire une règle d'écrouissage cinématique non linéaire pour ce type de structures.

### IV.4.1 Construction d'une règle d'écrouissage cinématique non linéaire pour les coques minces

On se place dans le même cadre de travail que dans le paragraphe précédent. Le domaine élastique convexe $K_E$ est limité par la fonction d'écoulement d'Hüber-Mises dans l'espace des variables généralisées $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{m})^T$, définie par (IV.25) ou encore par (IV.19).

Comme précédemment, les contraintes internes $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_n\ \boldsymbol{X}_m)^T$ sont introduites pour modéliser l'écrouissage. Alors, le domaine élastique prend la forme :

$$K_E = \{(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \overline{f}_+(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{f}_-(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0\}.$$

Comme pour les variables généralisées $\boldsymbol{Q}$, on peut introduire $\boldsymbol{X}_\pm = \boldsymbol{X}_n \pm \frac{3}{2}\boldsymbol{X}_m$, ce qui permet de mettre le domaine élastique sous une autre forme :

$$K_E = \{(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \overline{\mathcal{F}}_+(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{\mathcal{F}}_-(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - 1 \leq 0\}.$$

Pour représenter l'écrouissage cinématique non linéaire, nous utilisons à présent un modèle avec un domaine limite, homothétique du domaine élastique initial, défini dans l'espace des points $\boldsymbol{Q}^\infty = (\boldsymbol{n}^\infty\ \boldsymbol{m}^\infty)^T$ (voir figure IV.11).

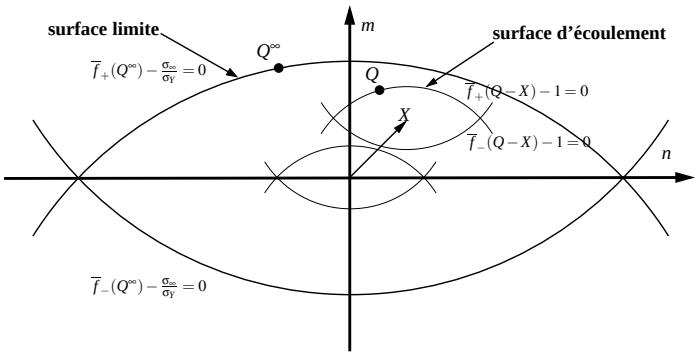



*Figure IV.11 - Représentation du domaine limite en dimension deux*

Le domaine limite peut être décrit comme suit :

$$K_\infty = \left\{ \boldsymbol{Q}^\infty \text{ tel que } \overline{f}_+(\boldsymbol{Q}^\infty) - \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \text{ et } \overline{f}_-(\boldsymbol{Q}^\infty) - \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \right\}.$$

Dans un tel modèle de coque, la surface d'écoulement est composée de deux surfaces régulières $S_\pm$ d'équations $\overline{f}_\pm(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) = 1$ sur lesquelles la normale est bien définie. Si une seule de ces deux

surfaces est active, soit $S_+$ pour fixer les idées, la loi d'écoulement plastique est parfaitement définie par la règle de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} \end{pmatrix} = \dot{p}_+ \frac{\partial \overline{f}_+}{\partial \boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) = \dot{p}_+ \boldsymbol{B}_+ \frac{\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}}{\overline{f}_+(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X})} = \dot{p}_+ \boldsymbol{B}_+ (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X})$$

Pour construire la règle d'écrouissage, nous nous basons sur le modèle multi-surfaces de Mròz (Mròz (1967)). Dans l'espace des variables généralisées, elle sera donc construite comme suit. Soit $\boldsymbol{Q}^\infty$ le point de la surface limite $\partial K_\infty$ de même normale que la normale à $S_+$ en $\boldsymbol{Q}$ (voir figure IV.12).

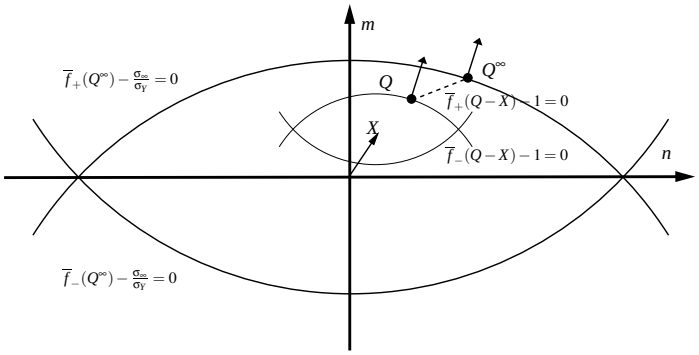



*Figure IV.12 - Représentation de la construction de la règle d'écrouissage en dimension deux lorsqu'une seule surface est active*

Dans ce cas, on a :

$$\boldsymbol{Q}^\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) \tag{IV.33}$$

Suivant Mròz, la variation infinitésimale de $\boldsymbol{X}$ se produira dans la direction joignant $\boldsymbol{Q}$ à $\boldsymbol{Q}^\infty$, soit, en introduisant $X_\infty = \sigma_\infty - \sigma_Y$ :

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\mu}_+(\boldsymbol{Q}^\infty - \boldsymbol{Q}) = \dot{\mu}_+ \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_Y}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Q} \right) = \dot{\mu}_+ \left( \frac{X_\infty}{\sigma_Y} (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X} \right).$$

Ceci suggère de poser pour le taux de la variable d'écrouissage cinématique $\boldsymbol{\alpha}$ duale de $\boldsymbol{X}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{B}_+ \dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\mu}_+ \boldsymbol{B}_+ (\boldsymbol{Q}^\infty - \boldsymbol{Q}) = \dot{\mu}_+ \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \boldsymbol{B}_+ (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) - \dot{\mu}_+ \boldsymbol{B}_+ \boldsymbol{X}. \tag{IV.34}$$

En identifiant $\dot{p}_\pm$ à $\dot{\mu}_\pm \frac{X_\infty}{\sigma_Y}$, on obtient alors une règle d'écrouissage analogue à celle d'Armstrong et Frederick (1966) :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} - \dot{p}_+ \boldsymbol{B}_+ \frac{\sigma_Y \boldsymbol{X}}{X_\infty}. \tag{IV.35}$$

On peut alors remarquer que lorsque $X_\infty$ tend vers l'infini, on retrouve en cas particulier la règle linéaire de Prager $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}}$. De la même manière, on définira une règle d'écrouissage similaire quand $S_-$ est active, en remplaçant l'indice + par −.

Dans le modèle de coque, le problème est de généraliser cette règle quand les deux surfaces $S_+$ et $S_-$ sont simultanément actives. La normale n'est alors plus définie et doit être remplacée par une sous-normale. La loi d'écoulement peut s'écrire sous la forme généralisée de Koiter (1953) :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{p}_+ \frac{\partial \overline{f}_+}{\partial \boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) + \dot{p}_- \frac{\partial \overline{f}_-}{\partial \boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) = (\dot{p}_- \boldsymbol{B}_- + \dot{p}_+ \boldsymbol{B}_+)\,(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})\,. \tag{IV.36}$$

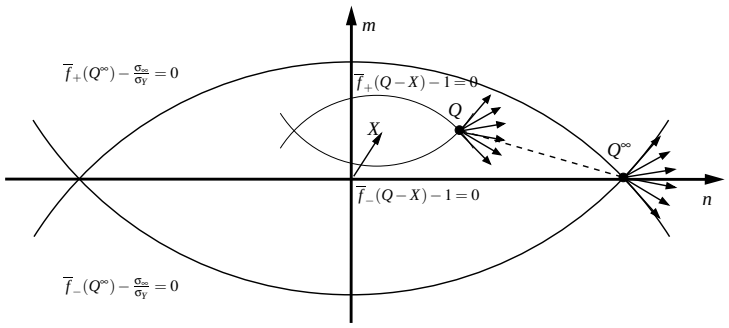



*Figure IV.13 - Représentation de la construction de la règle d'écrouissage en dimension deux lorsque les deux surfaces sont actives*

Lorsque les deux surfaces sont actives, nous considérons, pour des raisons de continuité, que le point $\boldsymbol{Q}^\infty$ associé à $\boldsymbol{Q}$ est toujours donné par (IV.33) (voir figure IV.13) et, par analogie avec (IV.36), nous remplaçons (IV.34) par :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\dot{\mu}_+ \boldsymbol{B}_+ + \dot{\mu}_- \boldsymbol{B}_-)(\boldsymbol{Q}^\infty - \boldsymbol{Q}).$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient la règle d'écrouissage :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} - (\dot{p}_+ \boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_- \boldsymbol{B}_-)\frac{\sigma_Y \boldsymbol{X}}{X_\infty}, \tag{IV.37}$$

qui contient le cas particulier où seule une surface est active (par exemple (IV.35)) et généralise la règle d'écrouissage de Mròz lorsque plusieurs surfaces sont actives.

### IV.4.2 Construction d'un bipotentiel pour les coques minces avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire

Nous voudrions à présent construire le bipotentiel correspondant à la loi de comportement donnée par (IV.36) et (IV.37). Nous introduisons le cône convexe :

$$K = \{(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) \text{ tel que } \overline{f}_+(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{f}_-(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) - 1 \leq 0\}. \tag{IV.38}$$

En posant

$$\dot{\boldsymbol{q}}_\pm = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\gamma}} \pm \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\chi}} \tag{IV.39}$$

la fonction de dissipation, fonction polaire de la fonction indicatrice du domaine $K$ défini par (IV.38) est donnée (il suffit de remplacer $\boldsymbol{Q}$ par $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}$ dans le calcul de la fonction de dissipation pour le cas parfaitement plastique de l'annexe D, paragraphe D.1) par :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}) = (\Psi_K)^*(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} + \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+}$$

ou encore, en introduisant les déformations équivalentes $\dot{p}_\pm$ :

$$\dot{p}_\pm = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_\pm^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_\pm}$$

elle s'écrit :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{p}_+ + \dot{p}_-$$

La loi d'écoulement plastique est alors équivalente à l'inclusion différentielle :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\dfrac{\sigma_Y \boldsymbol{X}}{X_\infty} = 0 \end{cases} \tag{IV.40}$$

où $\Psi_K$ désigne la fonction indicatrice du domaine élastique $K$.

On introduit les vitesses $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$, les variables associées $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})$ et la fonction séparément convexe :

$$\begin{aligned} b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) \;=\; & \dot{p}_+ + \dot{p}_- + \dot{p}_+\sigma_Y \frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}}{X_\infty} + \dot{p}_-\sigma_Y \frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}}{X_\infty} + \Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) \\ & + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\sigma_Y \boldsymbol{X}}{X_\infty}\right) \end{aligned} \tag{IV.41}$$

**Proposition.**
La fonction (IV.41) est un bipotentiel.

**Preuve :**
Il suffit de montrer que pour tout couple $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$ tel que :

(i) $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \in K$

(ii) $\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\dfrac{\sigma_Y \boldsymbol{X}}{X_\infty} = 0$

on a :

$$\dot{p}_+ + \dot{p}_- + \dot{p}_+\sigma_Y \frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}}{X_\infty} + \dot{p}_-\sigma_Y \frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}}{X_\infty} \geq \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{IV.42}$$

En effet, si une des deux conditions précédentes n'est pas vérifiée, le bipotentiel $b$ prend la valeur $+\infty$ et l'inégalité est trivialement satisfaite. Dans le cas où les deux conditions sont satisfaites, il vient :

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{q}})$$

En remarquant que :

$$(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})^T\dot{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{Q}_+-\boldsymbol{X}_+)^T\dot{\boldsymbol{q}}_+ + (\boldsymbol{Q}_--\boldsymbol{X}_-)^T\dot{\boldsymbol{q}}_-$$

on en déduit :

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{Q}_+-\boldsymbol{X}_+)^T\dot{\boldsymbol{q}}_+ + (\boldsymbol{Q}_--\boldsymbol{X}_-)^T\dot{\boldsymbol{q}}_- - \boldsymbol{X}^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}})$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée, on obtient ensuite :

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq \dot{p}_+\overline{f}_+(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) + \dot{p}_-\overline{f}_-(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}})$$

Comme $(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) \in K$, il vient :

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq \dot{p}_+ + \dot{p}_- - \boldsymbol{X}^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}})$$

L'usage de la règle d'écrouissage (IV.37) conduit alors à (IV.42). Nous avons donc montré que la fonction (IV.41) est un bipotentiel. Il faut maintenant montrer la proposition suivante :

**Proposition.**
Les couples extrémaux pour (IV.41) vérifient la loi de comportement (IV.40), et réciproquement.

**Preuve :**
Supposons que $((\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}),(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}))$ soit un couple extrémal pour le bipotentiel. Le bipotentiel $b$ doit donc prendre une valeur finie pour $((\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}),(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}))$, ce qui implique :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) \in K \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\dfrac{\sigma_Y\boldsymbol{X}}{X_\infty} \end{cases}$$

Il nous reste donc à montrer que :

$$\dot{\boldsymbol{q}} \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})$$

Comme $((\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}),(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}))$ est un couple extrémal pour le bipotentiel (IV.41), il vérifie donc pour tout $(\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{X}')$ tel que :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{Q}'-\boldsymbol{X}') \in K \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\dfrac{\sigma_Y\boldsymbol{X}'}{X_\infty} \end{cases}$$

l'inégalité suivante :

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}},\boldsymbol{\pi}') - b(\dot{\boldsymbol{\kappa}},\boldsymbol{\pi}) \geq \dot{\boldsymbol{\kappa}}.(\boldsymbol{\pi}'-\boldsymbol{\pi})$$

soit :

$$\frac{\sigma_Y}{X_\infty}\left(\dot{p}_+\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}' + \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}' - \dot{p}_+\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X} - \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}\right) \geq (\boldsymbol{Q}'-\boldsymbol{Q})^T\dot{\boldsymbol{q}} - (\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})^T\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma_Y}{X_\infty}\left(\dot{p}_+\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}' + \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}' - \dot{p}_+\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X} - \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}\right) \geq \\ &\quad [(\boldsymbol{Q}'-\boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})]^T\dot{\boldsymbol{q}} - (\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}})\end{aligned}$$

Or de :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} + \sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}$$
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} + \sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\boldsymbol{X}'}{X_\infty}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}-(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}) &= -\boldsymbol{X}'^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{X}^T(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}) \\ &= \frac{\sigma_Y}{X_\infty}\left(\dot{p}_+\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}' + \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}' - \dot{p}_+\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X} - \dot{p}_-\,\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}\right)\end{aligned}$$

Un couple extrémal est donc un couple satisfaisant :

$$0 \geq [(\boldsymbol{Q}'-\boldsymbol{X}') - (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})]^T\dot{\boldsymbol{q}}$$

ce qui démontre :

$$\dot{\boldsymbol{q}} \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})$$

Réciproquement, soit un couple vérifiant :

$$\dot{\boldsymbol{q}} \in \partial\Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})$$
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{q}} + \sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\boldsymbol{X}}{X_\infty}$$

Montrons qu'il est extrémal pour le bipotentiel (IV.41), i.e. que

$$b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}.\boldsymbol{\pi}$$

Puisque la loi d'écoulement est satisfaite, on a :

$$b((\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}),(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}})) = \dot{p}_+ + \dot{p}_- + \sigma_Y\dot{p}_+\frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}}{X_\infty} + \sigma_Y\dot{p}_-\frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}}{X_\infty}$$

De plus, avec la règle d'écrouissage, on peut écrire :

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})^T\dot{\boldsymbol{q}} + \sigma_Y\dot{p}_+\frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{X}}{X_\infty} + \sigma_Y\dot{p}_-\frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}_-\boldsymbol{X}}{X_\infty}$$

En outre, comme les fonctions $\Psi_K$ et $\varphi$ sont polaires l'une de l'autre, on a d'après l'annexe B, paragraphe B.2 :

$$\Psi_K(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) + \varphi(\dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X})^T\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{p}_+ + \dot{p}_-$$

Finalement, il vient :

$$b((\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}),(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}})) = \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

ce qui achève la démonstration.

### IV.4.3 Formulation des problèmes de bornes

A présent, puisque nous avons construit un bipotentiel pour les structures de type coques minces avec une règle d'écrouissage cinématique non linéaire, nous pouvons formuler, dans ce cas, les problèmes de borne statique et cinématique établis au chapitre I.

Commençons par le problème statique. En adaptant la formulation du problème de borne statique pour les matériaux standards implicites (I.61) au modèle construit, on peut proposer un problème d'optimisation à résoudre pour obtenir le facteur d'adaptation :

$$\underset{\lambda,\,\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}}}{Sup}\left\{\lambda-\int_\Omega\oint\left(\dot p_+ + \dot p_- + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^+\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot p_+ + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^-\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot p_-\right)dt\;d\Omega\right\}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{Q}}\text{ est un champ de contrainte résiduel}\\ \Psi_K(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})=0,\;\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\\ \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}+\sigma_Y(\dot p_+\boldsymbol{B}_+ + \dot p_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\right)=0,\;\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\end{cases}$$

La recherche d'une borne supérieure finie nécessite l'annulation des fonctions indicatrices figurant parmi les contraintes du problème d'optimisation. En détaillant alors les contraintes imposées par les fonctions indicatrices caractérisant l'appartenance au domaine élastique $K$ et la vérification de la règle d'écrouissage, le problème précédent devient :

$$\underset{\lambda,\,\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}}}{Sup}\left\{\lambda-\int_\Omega\oint\left(\dot p_+ + \dot p_- + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^+\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot p_+ + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^-\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot p_-\right)dt\;d\Omega\right\}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{Q}}\text{ est un champ de contrainte résiduel}\\ (\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})^T\boldsymbol{B}_+(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})-1\le 0,\;\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\\ (\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})^T\boldsymbol{B}_-(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})-1\le 0,\;\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}+\sigma_Y(\dot p_+\boldsymbol{B}_+ + \dot p_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}=0,\;\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\end{cases}\tag{IV.43}$$

L'observation de ce problème conduit aux mêmes remarques qu'au chapitre III : étant fortement couplé, la détermination des champs statiques et cinématiques ne pourra se faire séparément mais devra être effectuée simultanément. Il est donc nécessaire de formuler aussi le problème

cinématique (I.58) à résoudre ici :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{Sup}\left\{\lambda-\int_\Omega\oint\left(\dot{p}_+ + \dot{p}_- + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^+\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_+ + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^-\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_-\right)dt\;d\Omega\right\}$$

$$\text{sous les contraintes}\begin{cases}\Delta\boldsymbol{q}=\oint\dot{\boldsymbol{q}}\;dt \text{ est cinématiquement admissible } \forall\boldsymbol{x}\in\Omega\\ \Delta\boldsymbol{\alpha}=\oint\dot{\boldsymbol{\alpha}}\;dt=0\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega\\ \displaystyle\int_\Omega\oint\lambda(\boldsymbol{Q}^{e0})^T\dot{\boldsymbol{q}}\,dt\;d\Omega=1\\ \displaystyle\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\dot{\boldsymbol{q}}+\sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}=0,\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,\;\forall t\end{cases}$$

Comme dans le chapitre III, on peut limiter le nombre d'inconnues de ce problème en éliminant les variables $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ avec :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\boldsymbol{q}}-\sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}$$

En outre, la condition d'admissibilité de $\Delta\,\boldsymbol{q}$ sous sa forme forte s'écrit :

$$\boldsymbol{C}\Delta\,\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{u}$$

Finalement, le problème cinématique à résoudre s'écrit :

$$\underset{\dot{\boldsymbol{q}},\Delta\boldsymbol{u}}{Sup}\left\{\lambda-\int_\Omega\oint\left(\dot{p}_+ + \dot{p}_- + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^+\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_+ + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^-\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_-\right)dt\;d\Omega\right\}$$

$$\text{sous les contraintes}\begin{cases}\boldsymbol{C}\Delta\,\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{u}\\ \displaystyle\oint\left(\dot{\boldsymbol{q}}-\sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\right)\;dt=0\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega\\ \displaystyle\int_\Omega\oint\lambda(\boldsymbol{Q}^{e0})^T\dot{\boldsymbol{q}}\,dt\;d\Omega=1\end{cases}\tag{IV.44}$$

Remarquons que, dans chacun des deux problèmes (IV.43) et (IV.44) construits, les termes de la fonction objectif constants lors du processus d'optimisation pourraient être retirés sans que les solutions soient modifiées. Néanmoins, de manière à pouvoir comparer les valeurs des fonctions objectives prises en sortie des modules d'optimisation, ils sont laissés car dans ce cas, les fonctions objectives des problèmes statiques et cinématiques sont identiques.

On peut aussi constater que, lorsque $X_\infty$ tend vers $+\infty$, non seulement on retrouve la règle d'écrouissage de Prager, mais que les problèmes de bornes redonnent aussi ceux obtenus dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité.

L'observation de ces deux problèmes d'optimisation fortement couplés, de nature similaire à ceux construits dans le chapitre III dans le cas d'une éprouvette sous traction constante et

torsion alternée avec la règle d'écrouissage cinématique non linéaire de Armstrong et Frederick (1966), pourrait conduire à penser que les mêmes difficultés risquent d'être rencontrées lors de l'implémentation. Néanmoins, nous allons voir dans le paragraphe suivant que ce n'est pas tout à fait le cas.

### IV.4.4 Sur l'implémentation de ce modèle

La nature des problèmes cinématique (IV.44) et statique (IV.43), analogues aux problèmes qui ont été construits pour l'état de traction constante et torsion alternée homogène dans le chapitre III ne garantit pour autant pas de retrouver les mêmes comportements au cours du processus d'optimisation. Les raisons éventuelles de ces différences seront discutées ultérieurement. Tout au moins, le couplage fort entre les deux problèmes nécessite ici aussi une résolution simultanée.

Comme dans l'exemple étudié au chapitre III, on débute la phase d'implémentation en utilisant le principe de construction d'un suite minimisante convergente (paragraphe III.2.4.a du chapitre III). Pour cet algorithme, on retrouve le même phénomène de stationnarité du processus itératif. Le fait de laisser la règle d'écrouissage parmi les contraintes des problèmes d'optimisation statique et cinématique semble encore empêcher la construction d'une suite minimisante pour la fonction objectif et ainsi rend la convergence impossible. En effet, l'erreur globale en loi de comportement définie au chapitre III par :

$$E_{globale} = \left| \frac{\beta_e(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{X}}, \lambda)}{\lambda} \right|$$

avec :

$$\beta_e(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{X}}, \lambda) = \int_\Omega \oint \left\{ b[(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}), (\overline{\boldsymbol{Q}} + \lambda \boldsymbol{Q}^{e0}, \overline{\boldsymbol{X}})] - \overline{\boldsymbol{Q}}^T \dot{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{X}}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right\} dt \; d\Omega - \lambda$$

prend des valeurs significativement trop importantes ce qui montre la non convergence du processus mis en œuvre. Il faut donc proposer une alternative.

On décide alors de suivre la méthode employée avec succès dans le chapitre III. Pour cela, on construit une formulation relaxée du problème statique en enlevant la règle d'écrouissage cinématique non linéaire des contraintes du problème de borne statique. La raison invoquée reste inchangée : puisque cette condition apparaît sous forme relaxée dans les conditions d'optimalité, peut-être est-il possible de se contenter de cette forme implicite lors du processus itératif. Cela nous conduit à proposer le problème statique relaxé suivant :

$$\underset{\lambda, \overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{X}}}{Sup} \left\{ \lambda - \int_\Omega \oint \left( \dot{p}_+ + \dot{p}_- + \sigma_Y \frac{1}{2} \frac{\overline{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{B}^+ \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \dot{p}_+ + \frac{1}{2} \sigma_Y \frac{\overline{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{B}^- \overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty} \dot{p}_- \right) dt \; d\Omega \right\}$$

sous les contraintes

(IV.45)

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{Q}} \text{ est un champ de contrainte résiduel} \\ (\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}})^T \boldsymbol{B}_+ (\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}) - 1 \leq 0, \; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \forall t \\ (\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}})^T \boldsymbol{B}_- (\lambda \boldsymbol{Q}^{e0} + \overline{\boldsymbol{Q}} - \overline{\boldsymbol{X}}) - 1 \leq 0, \; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \forall t \end{cases}$$

Mais dans le cas présent, la convergence n'est pas effective car le non-dépassement de la surface limite des contraintes internes n'est pas assuré au cours du processus itératif. Puisque des solutions déterminées au cours du processus ne sont mécaniquement pas admissibles, on ne peut que stopper le processus itératif. Il est donc probable que la solution envisagée au chapitre III ne fonctionne que pour l'étude d'exemples particulièrement simples. Plusieurs éléments peuvent être mis en jeu pour expliquer ce phénomène. Ainsi, dans l'exemple de l'état de traction constante et torsion alternée homogène, un seul point de calcul géométrique est considéré, et vu le chargement imposé, l'écoulement plastique est effectif pour tous les points du domaine de chargement. Dans le cas des coques minces, on ne peut évidemment pas se contenter d'un seul point pour modéliser géométriquement celles-ci. Puisque l'on a besoin d'un nombre minimum de points de calcul, il y a des chances pour qu'en un certain nombre l'écoulement plastique ne soit pas effectif. Ce phénomène est d'autant plus probable du fait que le critère d'écoulement se présente comme l'intersection de deux surfaces. Il est donc possible que pour un point de calcul et un point du domaine de chargement une seule des deux surfaces d'écoulement soit active et que même dans ce cas le non-dépassement de la surface limite de soit pas assuré. Il semblerait donc que la non convergence de cette méthode dans le cas des coques minces soit probablement due à l'utilisation d'un critère d'écoulement plastique multi-surfaces.

Pour les structures de type coques minces, la nature fortement couplée des problèmes cinématique et statique conduit donc à leur résolution simultanée et alors, a priori à la résolution d'un seul problème d'optimisation :

$$\underset{\substack{\dot{\boldsymbol{q}},\Delta\boldsymbol{u}\\ \overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}}}}{Sup}\left\{\lambda-\int_\Omega\oint\left(\dot{p}_+ + \dot{p}_- + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^+\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_+ + \sigma_Y\frac{\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{B}^-\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\dot{p}_-\right)dt\;d\Omega\right\}$$

$$\text{sous les contraintes}\begin{cases}\boldsymbol{C}\Delta\,\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{u}\\ \oint\left(\dot{\boldsymbol{q}}-\sigma_Y(\dot{p}_+\boldsymbol{B}_+ + \dot{p}_-\boldsymbol{B}_-)\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{X_\infty}\right)dt=0\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega\\ \displaystyle\int_\Omega\oint\lambda(\boldsymbol{Q}^{e0})^T\dot{\boldsymbol{q}}\,dt\;d\Omega=1\\ \overline{\boldsymbol{Q}}\text{ est un champ de contrainte résiduel}\\ (\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})^T\boldsymbol{B}_+(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})-1\le 0,\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,\forall t\\ (\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})^T\boldsymbol{B}_-(\lambda\boldsymbol{Q}^{e0}+\overline{\boldsymbol{Q}}-\overline{\boldsymbol{X}})-1\le 0,\;\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,\forall t\end{cases}$$

regroupant les problèmes de bornes statique et cinématique. Ce dernier problème ne s'inscrit plus dans le cadre de l'optimisation convexe mais dans le cadre plus général de l'optimisation dite globale, qui constitue une branche des mathématiques en pleine expansion depuis quelques années. Des classifications des modèles d'optimisation globale sont proposées (voir par exemple Horst et Pardalos (1995)) suivant les propriétés de la fonction objectif et des contraintes du problème à résoudre. En examinant le problème ci-dessus, compte tenu de la biconvexité[20] de

[20] c'est-à-dire sa convexité par rapport à $(\dot{\boldsymbol{q}},\Delta\boldsymbol{u})$ lorsque $(\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}})$ est fixé et sa convexité par rapport à $(\overline{\boldsymbol{Q}},\overline{\boldsymbol{X}})$ lorsque $(\dot{\boldsymbol{q}},\Delta\boldsymbol{u})$ est fixé

la fonction objectif et des contraintes inégalités et le caractère affine des contraintes égalités, il semblerait que celui-ci rentre dans la catégorie des problèmes dits biconvexes. Par conséquent, il s'avère comme nécessaire d'effectuer une étude approfondie des différentes méthodes d'optimisation globale (et probablement plus spécifiquement des méthodes d'implémentation des problèmes d'optimisation biconvexe) pour les problèmes d'adaptation élastoplastique des coques minces avec une règle d'écrouissage cinématique non linéaire.

Enfin, ne perdons pas de vue que la formulation d'un bipotentiel pour une loi de comportement n'est pas unique. On peut donc aussi se poser la question de savoir s'il existe éventuellement une autre formulation du bipotentiel qui permettrait de rester dans le cadre de l'optimisation convexe. De ce point de vue, le développement d'une méthode de construction systématique du bipotentiel pourrait s'avérer fort utile pour la suite des travaux sur ce sujet.

## IV.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'introduction de l'écrouissage cinématique (linéaire et non linéaire) pour les structures de type coques minces dans le cadre de l'adaptation élastoplastique. En particulier, nous avons pu constater que la formulation du modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988) n'est pertinente qu'en imposant explicitement la limitation des contraintes internes, de sorte à aboutir à un résultat mécaniquement acceptable. En considérant ensuite l'écrouissage cinématique linéaire limité du point de vue des matériaux standards implicites, nous avons pu construire un problème de borne cinématique. L'implémentation de celui-ci a permis d'encadrer de manière très précise le facteur d'adaptation entre les facteurs d'adaptation cinématique et statique. Cela souligne le fait que l'approche du bipotentiel, qui permet de construire conjointement les problèmes de bornes statique et cinématique, peut s'avérer particulièrement intéressante pour des modèles s'inscrivant dans le cadre des matériaux standards généralisés. Enfin, en ce qui concerne l'introduction de l'écrouissage cinématique non linéaire pour les coques minces, l'utilisation du modèle de Mróz et de la règle d'écoulement sous forme généralisée de Koiter mène à une règle d'écrouissage cinématique non linéaire adaptée au problème. Cela permet finalement de construire un bipotentiel et des problèmes de borne statique et cinématique pour l'adaptation élastoplastique. Néanmoins, la nature fortement couplée de ces deux problèmes semble nécessiter pour leur résolution la mise en œuvre de méthodes rentrant dans la catégorie de l'optimisation globale, ce qui pourra constituer une des perspectives de ce travail.

# Conclusion générale

L'étude menée dans ce mémoire est une contribution théorique et numérique à l'adaptation élastoplastique dans le cadre de la plasticité non associée. Dans ce contexte, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'introduction de l'écrouissage cinématique non linéaire dans les études d'adaptation élastoplastique à l'aide du concept de matériaux standards implicites.

Pour mener à bien ce travail, nous avons d'abord effectué un travail d'analyse bibliographique qui a permis de clarifier et d'illustrer les principales études concernant l'introduction de l'écrouissage dans la théorie de l'adaptation élastoplastique. La démarche que nous avons adoptée est progressive. Elle a consisté d'abord à présenter le phénomène de l'adaptation élastoplastique de manière à montrer l'intérêt de son étude. Dans un second temps, nous avons rappelé les fondements de la théorie de l'adaptation élastoplastique et les premières introductions de l'écrouissage dans l'étude de ce phénomène tout en restant dans le cadre des matériaux standards généralisés. Nous nous sommes ensuite intéressés aux lois non associées, qui jouent un rôle important dans la modélisation mécanique. Après avoir effectué une revue non exhaustive des résultats existants dans la littérature, nous avons présenté le concept de matériaux standards implicites qui permet une généralisation de celui des matériaux standards généralisés aux matériaux dont le comportement est non associé. Dans ce cadre, bien que la généralisation du théorème de Melan (1936) n'ait pu être prouvée jusqu'à maintenant, les théorèmes de bornes ont pu être étendus. Après cette présentation du cadre de travail, nous nous sommes consacrés à l'étude d'exemples caractéristiques en adaptation élastoplastique par le modèle des matériaux standards implicites.

Le premier exemple étudié, concernant un état de traction constante et torsion alternée homogène, a dans un premier temps été considéré du point de vue de la méthode pas à pas classique et ce, de manière à s'assurer de la cohérence des résultats obtenus ensuite par l'approche du bipotentiel. La comparaison des résultats pour le facteur d'adaptation fournis dans le cas de l'écrouissage cinématique non linéaire avec ceux provenant du cas où l'écrouissage est cinématique linéaire limité montre une différence conséquente. Le fait de pouvoir prendre en compte la non linéarité de l'écrouissage s'est donc révélé important pour la suite des études d'adaptation élastoplastique. En ce qui concerne la solution analytique exacte obtenue par l'approche du bipotentiel, sa confrontation avec les résultats de la méthode pas à pas a montré un très bon accord, ce qui assure la cohérence de la solution développée dans le cadre des matériaux standards implicites. Du point de vue de la programmation mathématique, nous avons pu constater que le couplage très important existant entre les problèmes de bornes statique et cinématique construits par l'approche du bipotentiel entraînait la nécessité d'aborder les approches statique et cinématique simultanément. En outre, la linéarité de la règle d'écrouissage et sa présence dans les deux problèmes d'optimisation nous a amené à remplacer le problème statique par un problème statique relaxé de façon à construire un processus de résolution itératif tout en restant dans le cadre de l'optimisation convexe. Pour l'exemple simple de l'état de traction constante et torsion alternée homogène traité au chapitre III, cela fournit effectivement des solutions en très bonne concordance avec la méthode pas à pas classique et la solution analytique exacte.

La dernière partie de notre étude a été consacrée à l'introduction de l'écrouissage cinématique (linéaire et non linéaire) dans le cadre de l'adaptation élastoplastique pour les structures de type coques minces. Dans un premier temps, nous avons pu constater que seule la formulation du modèle à deux surfaces de Weichert et Gross-Weege (1988) imposant explicitement la limitation des contraintes internes était pertinente, puisque seule celle-ci aboutit à un résultat mécaniquement acceptable. En effet, nous avons pu noter que le fait d'imposer explicitement le non dépassement de la surface limite des contraintes ne permettait pas de garantir implicitement que les contraintes internes soient bornées. Nous avons ensuite pu observer que le cadre des matériaux standards implicites fournissait un environnement de travail particulièrement avantageux même pour les matériaux standards généralisés. En effet, l'approche par bipotentiel nous a permis non seulement de retrouver le problème de borne statique, mais surtout de construire un problème de borne cinématique pour l'écrouissage cinématique linéaire. L'implémentation de celui-ci a permis d'encadrer de manière très précise le facteur d'adaptation entre les facteurs d'adaptation cinématique et statique. Il en ressort donc que cette approche, puisqu'elle permet de construire conjointement les problèmes de bornes statique et cinématique, représente également un outil particulièrement attrayant en plasticité associée. Enfin, en ce qui concerne l'introduction de l'écrouissage cinématique non linéaire pour les coques minces, l'utilisation du modèle de Mróz et de la règle d'écoulement sous forme généralisée de Koiter mène à une règle d'écrouissage cinématique non linéaire adaptée au problème. Cela a permis de construire un bipotentiel et des problèmes de borne statique et cinématique pour l'adaptation élastoplastique. Cependant, la mise en œuvre numérique de ces problèmes n'a pas pu être complètement effectuée dans le cadre de l'optimisation convexe.

Cette dernière remarque constitue une première perspective à ce travail de thèse. La question de la méthode d'optimisation appropriée pour la résolution numérique des problèmes de bornes pour l'adaptation élastoplastique avec une règle d'écrouissage cinématique non linéaire reste ouverte. Le couplage particulièrement important entre les deux problèmes semble exiger la résolution d'un seul problème regroupant les approches cinématique et statique. Une méthode de résolution plus appropriée devra donc être développée dans le cadre de l'optimisation globale et non dans celui de l'optimisation convexe. De manière plus précise, il semblerait que l'optimisation biconvexe soit la plus adaptée.

La théorie des matériaux standards implicites nécessite elle-même quelques développements supplémentaires. Parmi les fondements théoriques de l'approche du bipotentiel dédiée à l'adaptation élastoplastique, il subsiste des éléments non prouvés jusqu'à présent. Ainsi, le théorème de Melan, démontré dans le cadre des matériaux standards généralisés, n'a pu l'être pour les matériaux admettant un bipotentiel. De plus, puisque la formulation d'un bipotentiel pour une loi de comportement n'est pas unique, le développement d'une méthode de construction systématique du bipotentiel pourrait jouer un rôle prépondérant dans l'analyse des problèmes d'adaptation.

A plus long terme, remarquons que les études d'adaptation élastoplastique ne permettent que la détection du domaine à l'intérieur duquel le comportement de la structure redevient élastique après un certain nombre de cycles. Plus exactement, cela ne permet pas de garantir complètement la sauvegarde de la structure. Le développement d'une théorie de fatigue polycyclique basée sur les outils proposés dans ce mémoire pourrait donc également constituer une piste de recherche intéressante.

# Bibliographie


Armstrong, P.-J., Frederick, C.-O. 1966 A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *In C.E.G.B., Report No. RD/B/N731.*

Batoz, J.-L., Dhatt, G. 1992 *Modélisation des structures par éléments finis, volume 3 : coques.* Hermès. Paris.

Benders, J.-F. 1962 Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems. *Numer. Math.*, 4, 238-252.

Bodovillé, G. 1999 Sur l'endommagement et les matériaux standards implicites. *CR. Acad. Sci. II B-Mec.*, 327, 715-720.

Bodovillé, G. 2002 A kinematic elastic nonshakedown theorem for implicit standard materials. *Arch. Appl. Mech.*, 72, 266-278.

Bodovillé, G., de Saxcé, G. 2001 Plasticity with non linear kinematic hardening: modelling and shakedown analysis by the bipotential approach. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 20, 99-112.

Borkowski, A., Kleiber, M. 1980 On a numerical approach to shakedown analysis of structures. *Comput. Method. Appl. M.*, 22(1), 101-119.

Bouby, C., de Saxcé, G., Tritsch, J.-B. 2006 A comparison between analytical calculations of the shakedown load by the bipotential approach and step-by-step computations for elastoplastic materials with non linear kinematic hardening. *Int. J. Solids Struct.*, 43(9), 2670-2692.

Boulbibane, M., Weichert, D. 1997 Application of shakedown theory to soils with non associated flow rules. *Mech. Res. Commun.*, 24(5), 513-519.

Bousshine, L., Chaaba, A., de Saxcé, G. 2001 Softening in stress-strain curve for Drucker-Prager non-associated plasticity. *Int. J. Plasticity*, 17(1), 21-46.

Bousshine, L., Chaaba, A., de Saxcé, G. 2002 Plastic limit load of plane frames with frictional contact supports. *Int. J. Mech. Sci.*, 44, 2189-2216.

Bousshine, L., Chaaba, A., de Saxcé, G. 2003 A new approach to shakedown analysis for non standard elastoplatic material by the bipotential. *Int. J. Plasticity*, 19(5), 583-598.

Chaaba, A., Bousshine, L., De Saxcé, G. 1998 A new approach of shakedown analysis for non-standard elasto-plastic materials by the bipotential theory. *Euromech Colloquium 385*, September 8-11, Aachen, Germany.

Chaboche, J.-L. 1991 On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *Int. J. Plasticity*, 7(7), 661-678.

Chaboche, J.-L. 1994 Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 13(4), 501-518.

Chen, H., Ponter, A. R. S. 2001 A method for the evaluation of a ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 20(4), 555-571.

Choteau, M. 1999 *Caractérisation de l'effet Bauschinger en sollicitations uniaxiales d'un acier inoxydable auténitique X2CrNiMo17-12-2.* Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.

Coffin, L. F. 1953 A Study of Cyclic Thermal Stresses in a Ductile Metal. *Trans. ASME*, 76, 931-950.

Conn, A. R., Gould, N. I. M., Toint, Ph. L. 1992 *LANCELOT: a Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization (Release A).* Springer Verlag, New York.

Corigliano, A., Maier, G., Pycko, S. 1995 Dynamic shakedown analysis and bounds for elastoplastic structures with nonassociative, internal variable constitutive laws. *Int. J. Solids Struct.*, 32(21), 3145-3166.

Dang Van, K., Papadopoulos, I.V(eds) 1999 *High Cycle Metal Fatigue, From Theory to Applications*, CISM Courses and Lectures, No 392, Springer Wien, New-York.

Debordes, O., Nayroles, B. 1976 Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques. *J. Mécanique*, 15(1).

de Saxcé, G. 1986 *Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes.* Thèse de Doctorat, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.

DE SAXCÉ, G. 1992 Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *CR. Acad. Sci. II*, 314, 125-129.

DE SAXCÉ, G. 1995 A variational deduction of upper and lower bound shakedown theorems by Markov's and Hill's principles over a cycle. In *Inelastic Behavior of Structures Under Variable Loads* (ed. Z. Mròz et al.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

DE SAXCÉ, G., FENG, Z. Q. 1998 The bipotential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathl. Comput. Modelling*, 28, 225-245.

DE SAXCÉ, G., BOUSSHINE, L. 1998 The limit analysis theorems for the implicit standard materials: Application to the unilateral contact with dry friction and the non associated flow rules in soils and rocks. *Int. J. Mech. Sci.*, 40(4), 387-398.

DE SAXCÉ, G., TRITSCH, J.-B., HJIAJ, M. 2000 Shakedown of elastic-plastic structures with non linear kinematic hardening by the bipotential approach. In *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads* (ed. D. Weichert & G. Maier), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 167-182.

DRÜCKER, D. C., PRAGER, W. 1952 Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 10, 157.

DURAN, M., GROSSMANN, I. E. 1986 An outer-approximation algorithm for a class of Mixed-Integer Nonlinear Programs. *Math. Program.*, 36, 307-339.

EKELAND, I., TEMAM, A. 1974 *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels.* Coll. Et. Math. Dunod-Gauthier-Villars, Paris.

FENCHEL, W. 1949 On conjugate convex functions. *Canadian J. Math.*, 1, 73-77.

FLOUDAS, C. A., VISWESWARAN, V. 1993 A Primal-Relaxed Dual Global Optimization Approach. *J. Optimiz. Theory App.*, 78(2), 187-225.

FORTIN, M., GLOWINSKI, R. 1982 Méthodes de Lagrangien augmenté. Dunod, Paris.

FORTIN, J., HJIAJ, M., DE SAXCÉ, G. 2002 An improved discrete element method based on a variational formulation of the frictional contact law. *Comput. Geotech.*, 29, 609-640.

GEOFFRION, A. M. 1972 Generalized Benders Decomposition. *J. Optimiz. Theory App.*, 10, 237-259.

GOH, C.-H., NEU, R. W., MCDOWELL, D. L. 2003 Crystallographic plasticity in fretting of Ti-6AL-4V. *Int. J. Plasticity*, 19(10), 1627-1650.

GROSS-WEEGE, J. 1988 *Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken.* Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, vol. 53.

HALPHEN, B. 1978 Periodic solutions in plasticity and viscoplastcity. In *Proceedings of IUTAM Symposium on Variational Methods in Mechanics of Solids*, (ed. Nemat-Nasser), Pergamon Press, Oxford.

HALPHEN, B., NGUYEN QUOC, S. 1975 Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mécanique*, 14, 39-63.

HEITZER, M., STAAT, M., REINERS, H., SCHUBERT, F. 2003 Shakedown and ratchetting under tension-torsion loadings: analysis and experiments. *Nucl. Eng. Des.*, 225, 11-26.

HEITZER, M., STAAT 2003 Basis reduction technique for limit and shakedown problems. In *Numerical Methods for Limit and Shakedown analysis*, ed. M.Staat & M. Heitzer, NIC Series Volume 15, Jülich, Germany.

HILL, R. 1948 A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1, 18.

HIRIART-URRUTY, J.-B. 1998 *Optimisation et analyse convexe.* Presses universitaires de France. Paris.

HIRIART-URRUTY, J.-B., MARTINEZ-LEGAZ, J.-E. 2003 New formulas for the Legendre-Fenchel transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 288, 544-555.

HJIAJ, M. 1999 *Sur la classe des matériaux standards implicites : Concept, Aspects discrétisés et Estimation de l'erreur a posteriori.* Thèse de doctorat, Faculté Polytechnique de Mons.

HJIAJ, M., FORTIN, J., DE SAXCÉ, G. 2003 A complete stress update algorithm for the non-associated Drucker-Prager model including treatment of the apex. *Int. J. Eng. Sci.*, 41, 1109-1143.

HORST, R. AND PARDALOS, P.M. 1995 *Handbook of Global Optimization.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

JOSPIN, J. 1992 *Etats limites des tuyauteries par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique.* Thèse de doctorat de l'Université de Liège.

KHOI, V. D., YAN, A. M., NGUYEN-DANG, H. 2004 A dual form for discretized kinematic formulation in shakedown analysis. *Int. J. Solids Struct.*, 41(1), 267-277.

KLEIBER, M., KÖNIG, J. A. 1984 Incremental shakedown analysis in the case of thermal effects. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 1567-1573.

KOITER, W. T. 1953 Stress-strain relations, uniqueness, and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Q. Appl. Math.*, 11, 350-354.

KOITER, W.T. 1960 General theorems for elastic-plastic solids. In *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1 (ed. I.N. Sneddon, R. Hills), North Holland, Amsterdam.

KÖNIG, J.A. 1987 *Shakedown of Elastic-Plastic Structures.* Elsevier. North Holland, Amsterdam.

LADEVÈZE, P. 1996 *Mécanique non linéaire des structures : une nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales.* Hermès. Paris.

LEERS, K., KLIE, W., KONIG, J.A., MAHRENHOLTZ, O. 1985 Experimental Investigation on Shakedown Tubes. *Int. Symp. Plasticity Today, CISM, Udine*, 1983, Proc. Elsevier, London.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L. 1990 *Mechanics of solid materials.* Cambridge University Press. Cambridge.

MAGOARIEC, H., BOURGEOIS, S., DÉBORDES, O. 2005 Adaptation élastoplastique de milieux périodiques. *17ème Congrès Français de Mécanique*, Septembre 2005, Troyes, France.

MAIER, G. 1969 Shakedown theory in perfect elasto-plasticity with associated and non associated flow laws: a finite element programming approach. *Meccanica*, 4, 250-260.

MAIER, G. 1972 A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects. In *Foundations in Plasticity*, ed. A. Sawczuk, North-Holland, Amsterdam, 417-433.

MAIER, G., CARVELLI, V., COCCHETTI, G. 2000 On direct methods for shakedown and limit analysis. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 19 (Special Issue), S79-S100.

MAIER, G., WEICHERT, D. (eds) 2002 *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads.*, CISM Courses and Lectures, No 432, Springer Wien, New-York.

MANDEL, J. 1966 Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 2 : Mécanique des Solides. Gauthier-Villars. Paris.

MANDEL, J. 1976 Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations. *Mech. Res. Comm.*, 3, 483-488.

MANSON, S. S. 1953 Behaviour of materials under conditions of thermal stresses, *Technical Report TN 2933*, NACA.

MARKOV, A. A. 1947 On variational principles in theory of plasticity. *Prek. Math. Mech.*, 11, 339.

MARQUIS, D. 1979 *Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des métaux.* Thèse de 3ème cycle de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

MARTIN, J.-B. 1975 *Plasticity: fundamentals and general results*. Cambridge (Massachusetts) and London M.I.T. Press.

MELAN, E. 1936 Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff. *Sitber. Akad. Wiss. Wien, Abt IIA*, 145, 195-218.

MELAN, E. 1938 Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. *Ing. Arch.*, 9, 116-126.

MOREAU, J.-J. 1966 *Séminaire sur équations aux dérivées partielles, Fonctionnelles convexes.* Collège de France, Paris.

MOREAU, J.-J. 1968 La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *CR. Acad. Sci. A Math.*, 267, 954-957.

MORELLE, P., NGUYEN-DANG, H. 1983 Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre. *J. Méc. Théor. Appl.*, 2(4), 567-599.

MRÒZ, Z. 1967 On the Description of Anisotropic Work Hardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 163-175.

NAYROLES, B., WEICHERT, D. 1993 La notion de sanctuaire d'élasticité et d'adaptation des structures. *CR. Acad. Sci. II*, 316, 1493-1498.

NGUYEN QUOC, S. 2003 On shakedown in hardening plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 51(1), 101-125.

PHAM, D. C., WEICHERT, D. 2001 Shakedown analysis for elastic-plastic bodies with limited kinematic hardening. *P. Roy. Soc. A-Math. Phy.*, 457, 1097-1110.

PIERRE, D. A., LOWE, M. J. 1975 *Mathematical Programming Via Augmented Lagrangians, An introduction with Computer Programs.* Addison-Wesley Publishing Company.

POLIZZOTTO, C., BORINO, G., CADDEMI, S., FUSCHI, P. 1991 Shakedown problems for material models with internal variables. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 10(6), 621-639.

PONTER, A. R. S. 1975 A general shakedown theorem for elastic plastic-bodies with workhardening. In *Proc. SMIRT-3*, paper L5-2.

PONTER, A. R. S., CHEN, H. 2001 A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 20(4), 539-553.

PYCKO, S., MAIER, G. 1995 Shakedown theorems for some classes of non associative hardening elastic-plastic material models. *Int. J. Plasticity*, 11(4), 367-395.

SAVE, M. A., DE SAXCÉ, G., BOROKOWSKI, A. 1991 *Computation of shake-down loads, feasibility study.* Commission of the European Communities, Nuclear Science and Technology, report EUR 13618.

SAVE, M. A., MASSONNET, C. E., DE SAXCÉ, G. 1997 *Plastic Limit Analysis of Plates, Shells and Disks.* North Holland Series, Amsterdam.

SAWCZUK, A. 1982 On plastic shell theories at large strains and displacements. *Int. J. Mech. Sci.*, 24, 231-244.

STEIN, E., ZHANG, G., MAHNKEN, R. 1993 Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials. In *Progress in computational analysis of inelastic structures*, ed. E. Stein, Springer, Wien, 175-244.

TRITSCH, J.-B. 1993 *Analyse d'adaptation des structures élastoplastiques avec prise en compte des effets géométriques.* Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.

Visweswaran, V., Floudas, C.A., 1997 *cGOP: A Deterministic Global Optimization Package, User's Guide.* Department of Chemical Engineering, Princeton University.

Weichert, D., Gross-Weege, J. 1988 Assessment of elasto-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition. *Int. J. Mech. Sci.*, 30, 757-767.

Weichert, D. 1989 Shakedown of shell-like structures allowing for certain geometrical linearities. *Arch. Mech.*, 41, 61-71.

Zarka, J., Casier, J. 1981 Elastic-plastic response of structure to cyclic loading: Practical rules. In *Mech. Today*, (ed. Nemat-Nasser), 6, Pergamon, Oxford.

# Annexe A

# Compléments sur les théorèmes de base de l'adaptation élastoplastique

Dans cette annexe, nous rappelons les démonstrations des théorèmes de bornes de Koiter (1960) telles qu'elles ont été formulées par de Saxcé dans de Saxcé (1986, 1995). Ces démonstrations sont basées sur les généralisations des principes variationnels de Markov (1947) et Hill (1948) dans le cadre de l'adaptation élastoplastique, que nous désignerons respectivement dans la suite par « Principe de Markov sur un cycle » et « Principe de Hill sur un cycle ».

## A.1 Démonstration des théorèmes de bornes de Koiter

Le problème d'adaptation élastoplastique peut être caractérisé par le problème aux limites suivant :

Trouver le couple $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(P_s) \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \text{ est un champ de vitesses admissible} \\ \bar{\boldsymbol{\rho}} \text{ est un champ de contraintes résiduelles admissible} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \text{ et } (\bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\sigma}^e) \text{ sont reliés par la loi de normalité dans } \Omega \text{ à chaque instant} \end{cases}$$

### A.1.1 Principe de Markov sur un cycle

D'après de Saxcé (1986, 1995), la proposition suivante peut être démontrée :

**Principe de Markov sur un cycle.**
Si $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est une solution du problème $(P_s)$, il est solution du problème suivant :

Trouver $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ tel que la fonctionnelle

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\, dt\; d\Omega - \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\; d\Omega \tag{A.1}$$

soit minimum sur l'ensemble des champs de vitesses de déformations plastiques admissibles.

**Preuve :**
En tenant compte de la définition des champs de contraintes résiduelles et de la convexité de la dissipation $D$, on a pour tout champ admissible $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) - \phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \int_\Omega \oint \bar{\boldsymbol{\rho}} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) dt\; d\Omega$$

$\bar{\boldsymbol{\rho}}$ étant admissible, il est donc indépendant du temps. On obtient alors :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) - \phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p\,\prime} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)\; d\Omega$$

Comme $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p\,\prime}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont des champs de vitesses de déformations plastiques admissibles et comme $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles admissible, l'application du principe des puissances virtuelles (I.15) fournit :

$$\int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p\,\prime}\; d\Omega = 0$$
$$\int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\; d\Omega = 0$$

et ainsi la preuve est achevée :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) \geq \phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

Notons que ce principe pourrait aussi être désigné par « Principe de Ponter » puisqu'il a été indépendamment établi par Ponter, bien qu'il ne soit apparu que récemment dans la littérature (Ponter et Chen (2001) et Chen et Ponter (2001)).

### A.1.2 Principe de Hill sur un cycle

Des considérations similaires peuvent être développées pour la formulation statique, menant à la proposition suivante (de Saxcé (1986, 1995)) :

**Principe de Hill sur un cycle.**
Si $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est une solution du problème $(P_s)$, il est solution du problème suivant :

Trouver $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ parmi les champs de contraintes résiduelles admissibles.

**Preuve :**
La proposition est triviale. Remarquons que, comme pour le principe de Hill restreint à l'analyse limite, le problème statique est dégénéré au sens où il n'y a pas de fonctionnelle à minimiser. Par convention, on suppose que le problème statique est un principe variationnel avec des contraintes admissibles et une fonctionnelle nulle :

$$\Pi_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}) = 0 \tag{A.2}$$

Comme dans le cas de l'analyse limite, on peut montrer que les principes variationnels sont duaux au sens où pour tout couple $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}, \bar{\boldsymbol{\rho}}^s)$ de champs admissibles, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}) + \Pi_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}^s) \geq 0 \tag{A.3}$$

En tenant compte du principe de la dissipation maximum, de la définition des champs de contraintes résiduelles, des équations (A.1) et (A.2) et du fait que $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$ est indépendant du temps, on obtient :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}) + \Pi_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}^s) \geq \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pk} d\Omega$$

Comme $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pk}$ est un champ de vitesses de déformations plastiques admissible et comme $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles admissible, l'application du principe des puissances virtuelles (I.15) fournit :

$$\int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pk}\, d\Omega = 0$$

et on obtient alors l'inégalité (A.3).

En particulier, pour un couple $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ solution exacte du problème $(P_s)$, on a :

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

Il vient alors :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \Pi_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}^s) = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega$$

L'application du principe des puissances virtuelles (I.15) fournit ensuite l'égalité :

$$\phi_s(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \Pi_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}^s) = 0 \tag{A.4}$$

### A.1.3 Théorème de borne cinématique

En tenant compte des équations (A.2) et (A.4), on peut noter que pour la solution $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ du problème $(P_s)$ correspondant au domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$ (c'est-à-dire pour un champ de contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}^e = \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}$), on a :

$$\phi_s^a(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\, dt\, d\Omega - \lambda^a \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\, d\Omega = 0 \tag{A.5}$$

D'une manière similaire, suivant Martin (1975), le facteur de charge cinématique $\lambda^k$ associé à un champ de vitesses de déformations plastiques admissible $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}$ est défini par l'égalité :

$$\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk})\, dt\, d\Omega = \lambda^k \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt\, d\Omega \tag{A.6}$$

Comme la dissipation est toujours positive et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}$ est admissible, cette dernière relation a bien un sens. Ainsi, on peut montrer la proposition suivante :

**Théorème de borne cinématique de Koiter.**
Si une solution $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ du problème $(P_s)$ existe pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$, alors $\lambda^a$ est la borne inférieure des facteurs cinématiques $\lambda^k$ :

$$\lambda^a \leq \lambda^k \tag{A.7}$$

De plus, le principe de Markov sur un cycle n'a pas de solution pour $\lambda^a < \lambda^k$.

**Preuve :**
Tout d'abord, montrons que $\lambda^a \leq \lambda^k$. Avec le principe de Markov sur un cycle et l'équation (A.5), pour tout champ de vitesses de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}$ et pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$, on a :

$$\phi_s^a(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}) = \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk})\, dt\, d\Omega - \lambda^a \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt\, d\Omega \geq \phi_s^a(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0$$

En tenant compte ensuite de la définition (A.6) du facteur de charge cinématique, on obtient :

$$(\lambda^k - \lambda^a) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt\, d\Omega \geq 0$$

L'application de la condition de normalisation fournit alors (A.7).

Montrons ensuite que le principe de Markov sur un cycle n'a pas de solution pour $\lambda^a < \lambda^k$. Pour cela, il suffit de prouver que la fonctionnelle (A.1) n'est pas coercive (voir Ekeland et Temam (1974)), c'est-à-dire que sa limite, quand $\| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \|$ tend vers $+\infty$ n'est pas $+\infty$. En effet, on a pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^k \Sigma^0$ :

$$\phi_s^k(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\, dt\, d\Omega - \lambda^k \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\, d\Omega = 0$$

En utilisant alors l'égalité (A.5) et le fait que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est plastiquement admissible, il vient :

$$\phi_s^k(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = (\lambda^a - \lambda^k) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt\, d\Omega < 0$$

Ainsi, en choisissant une suite minimisante $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)$ définie par : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\ (n = 1, 2, ...)$, il est facile de montrer que $\phi_s^k(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) < 0$ tend vers $-\infty$ quand $\| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \|$ tend vers $+\infty$, l'espace de champs de vitesses de déformations plastiques étant muni d'une norme convenable.

Le théorème de borne cinématique de Koiter conduit à la résolution du *problème de borne cinématique* :

$$\left\| \begin{array}{l} \displaystyle \inf_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}} \left\{ \lambda^k = \frac{\displaystyle\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk})\, dt\, d\Omega}{\displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt\, d\Omega} \right\} \\ \\ \text{sous la contrainte} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} \text{ admissible} \end{array} \right. \tag{A.8}$$

Remarquons que si $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est admissible au sens de Koiter et $\alpha > 0$, alors $\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est admissible aussi. Ainsi, si $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ est une solution du problème aux limites $(P_s)$, $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\sigma}^e$ est associé à $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, et par conséquent à $\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, par la règle d'écoulement normale. En effet, le principe de la dissipation maximum de Hill (I.7) appliqué à $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ implique :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}' \in K, (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : (\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0$$

Ainsi, $(\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ est aussi solution du problème aux limites $(P_s)$. Dans la résolution de $(P_s)$, la valeur du facteur $\alpha$ n'est donc pas significative et il est permis de la fixer en ajoutant une condition supplémentaire, appelée *condition de normalisation* :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt \; d\Omega = 1 \tag{A.9}$$

Le *problème de borne cinématique* peut alors se mettre sous la forme :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}}{\text{Inf}} \left\{ \displaystyle\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk}) \, dt \; d\Omega \right\} \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} \text{ admissible} \\ \displaystyle\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pk} dt \; d\Omega = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{A.10}$$

### A.1.4 Théorème de borne statique

La proposition suivante peut être démontrée :

> **Théorème de borne statique de Koiter.**
> Si une solution $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ du problème $(P_s)$ existe pour le domaine de chargement $\Sigma = \lambda^a \Sigma^0$, le principe de Hill sur un cycle a une solution $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$ pour $\Sigma = \lambda^s \Sigma^0$ si et seulement si
>
> $$\lambda^s \leq \lambda^a \tag{A.11}$$
>
> De plus, si $\lambda^s < \lambda^a$, la structure s'adapte pour le facteur de charge $\lambda^s$.

**Preuve :**
*Condition nécessaire.* En introduisant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \in K \\ \boldsymbol{\sigma}^s &= \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \bar{\boldsymbol{\rho}}^s \in K \end{aligned}$$

et en tenant compte du fait que $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ et $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$ sont indépendants du temps, il vient :

$$\int_\Omega \oint (\boldsymbol{\sigma}^s - \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega = \int_\Omega (\bar{\boldsymbol{\rho}}^s - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega + (\lambda^s - \lambda^a) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega \tag{A.12}$$

Le premier terme du membre de droite s'annule par application du principe de puissances virtuelles (I.15) à $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ et $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$ qui sont des champs de contraintes résiduelles admissibles. Avec le principe de la puissance maximum (I.9), il vient :

$$(\lambda^s - \lambda^a) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega \leq 0$$

L'utilisation de la condition de normalisation fournit alors (A.11).

*Condition suffisante.* Comme $0 \in K$, en utilisant l'inégalité (A.11) et la convexité du domaine élastique $K$, on a :

$$\forall \alpha \in [0,1], \quad \alpha(\bar{\boldsymbol{\rho}} + \lambda^a \boldsymbol{\sigma}^{e0}) \in K$$

D'après l'inégalité (A.11), on peut choisir la valeur particulière suivante : $\alpha = \dfrac{\lambda^s}{\lambda^a}$. Ainsi, le champ de contraintes résiduelles $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s = \alpha \bar{\boldsymbol{\rho}}$ est plastiquement admissible ($\bar{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0} \in K$) et par conséquent est admissible au sens de Melan. Alors, $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$ est une solution du principe de Hill sur un cycle.

Par ailleurs, on doit montrer que la structure s'adapte pour un facteur de charge $\lambda^s < \lambda^a$. Supposons qu'il existe un champ de vitesses de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}$ admissible et associé à $(\bar{\boldsymbol{\rho}}^s + \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0})$ par la loi de normalité dans $\Omega$ à chaque instant. Ainsi, il est permis de remplacer $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ par $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ par $\boldsymbol{\sigma}^s$ dans l'inégalité (A.12) et à l'aide d'arguments similaires, on peut conclure que :

$$(\lambda^a - \lambda^s) \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps} dt \, d\Omega \leq 0 \tag{A.13}$$

De plus, comme $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}$ est associé à $\bar{\boldsymbol{\rho}}^s$, on a :

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}) = \boldsymbol{\sigma}^s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}$$

Le principe des puissances virtuelles fournit alors :

$$\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}) dt \, d\Omega = \lambda^s \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^{e0} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps} dt \, d\Omega \tag{A.14}$$

Des inégalités (A.13) et (A.14), on peut déduire :

$$\left( \frac{\lambda^a}{\lambda^s} - 1 \right) \int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}) dt \, d\Omega \leq 0$$

Le premier facteur de membre de gauche étant positif, on obtient :

$$\int_\Omega \oint D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}) dt \, d\Omega = 0$$

Comme la dissipation est positive, on en déduit que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ps}$ s'annule et donc que la structure s'adapte pour le facteur de charge $\lambda^s$.
De la même manière que pour le théorème de borne cinématique, le théorème de borne statique peut se mettre sous la forme d'un *problème de borne statique* :

$$\left\| \begin{array}{l} \underset{\bar{\boldsymbol{\rho}}^s, \lambda^s}{\text{Sup}} \quad \{\lambda^s\} \\ \\ \\ \text{sous les contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{\rho}}^s \text{ admissible} \\ \lambda^s \boldsymbol{\sigma}^{e0} + \bar{\boldsymbol{\rho}}^s \in K \\ \lambda^s \text{ associé à } \bar{\boldsymbol{\rho}}^s \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{A.15}$$

## A.2 Théorème de Halphen

Le théorème dual du théorème de Melan, énoncé et démontré par Halphen (1978) peut s'écrire sous la forme suivante :

> **Théorème de Halphen.**
> Si la structure ne s'adapte pas, le champ de vitesses de déformations plastiques tend vers un champ admissible.

**Preuve :**
Supposons que le chargement est périodique de période T. Soient $\boldsymbol{\rho}'(\boldsymbol{x},t)$ et $\boldsymbol{\rho}''(\boldsymbol{x},t)$ deux évolutions de champs de contraintes résiduelles correspondant à des conditions initiales différentes, respectivement $\boldsymbol{\rho}'(\boldsymbol{x},t_0)$ et $\boldsymbol{\rho}''(\boldsymbol{x},t_0)$. La distance entre les deux champs peut être caractérisée par l'énergie élastique résiduelle correspondante :

$$R = \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'') : \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'')\, d\Omega$$

En raisonnant de la même façon que pour le théorème de Melan, on peut montrer facilement que :

$$\dot{R} = \int_\Omega \left[(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'') : (\dot{\boldsymbol{\eta}}' - \dot{\boldsymbol{\eta}}'') - (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'') : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime})\right]\, d\Omega$$

En utilisant ensuite le principe des puissances virtuels (I.15) et la décomposition des champs de contraintes résiduelles (I.12), il vient :

$$\dot{R} = -\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'') : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime})\, d\Omega \tag{A.16}$$

Du principe de dissipation plastique maximale (I.9) et de l'expression (I.10) de la dissipation, on déduit que :

$$\begin{cases} \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime}\ \ D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime}) - D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) \geq \boldsymbol{\sigma}' : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) \\ \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}\ \ D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime}) - D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime}) \geq \boldsymbol{\sigma}'' : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime}) \end{cases}$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient :

$$(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'') : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,\prime\prime}) \geq 0$$

d'où on déduit que :

$$\dot{R} \leq 0$$

Introduisons la norme élastique sur l'espace vectoriel décrivant l'ensemble des champs de contraintes résiduelles :

$$\| \boldsymbol{\rho} \|_e = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\rho}\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

On vient donc de démontrer que l'application $t \mapsto \| \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}'(t) \|_e$ est décroissante. Il vient par

conséquent, sur un cycle de chargement de période T :

$$\| \boldsymbol{\rho}(t_0 + T) - \boldsymbol{\rho}'(t_0 + T) \|_e \leq \| \boldsymbol{\rho}(t_0) - \boldsymbol{\rho}'(t_0) \|_e$$

L'application $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t_0) \mapsto \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t)$ est donc contractante sur l'ensemble des champs de contraintes résiduelles plastiquement admissibles. Si cet ensemble est borné, le théorème de Brouwer permet d'établir qu'il existe un point fixe et ainsi, il existe une solution périodique (Halphen (1978)) :

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t_0 + T) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t_0)$$

Comme les vitesses de déformations résiduelles sont associées à la solution périodique par la loi de Hooke :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = S : \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

en intégrant sur un cycle de chargement, on obtient :

$$\oint \dot{\boldsymbol{\eta}} \, dt = \oint (S : \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \; dt = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

car les incréments de contraintes résiduelles s'annulent. Ainsi, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ est un champ de déformations résiduelles admissible. Il reste à montrer qu'il est plastiquement admissible. Pour cela, on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\rho} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\rho} : (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\rho}})$$

En intégrant sur un cycle et sur le domaine $\Omega$, on obtient :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \; dt \; d\Omega = \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \; dt \; d\Omega - \int_\Omega \oint \boldsymbol{\rho} : \dot{\boldsymbol{\eta}} \; dt \; d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega \oint \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\rho}}) \; dt \; d\Omega$$

Le deuxième terme du second membre est nul vu le principe des travaux virtuels (I.15), et à la limite, le dernier terme s'annule à cause de la périodicité de $\boldsymbol{\rho}$. Il en résulte, à la limite :

$$\int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \; d\Omega = \int_\Omega \oint \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \; dt \; d\Omega > 0$$

ce qui montre que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ est plastiquement admissible.

# Annexe B

# Quelques résultats d'analyse convexe

Dans cette annexe, on se propose de rappeler quelques définitions et propriétés d'analyse convexe utilisées dans le mémoire. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra se reporter à Ekeland et Temam (1974) ou plus récemment à Hiriart-Urruty (1998).

## B.1 Ensembles et fonctions convexes

Soient $E$ un espace vectoriel réel. Soit $f$ une fonction convexe, à variable dans $E$ et à valeur réelle pouvant prendre les valeurs $-\infty$ et $+\infty$.

**Ensemble convexe :**
Un ensemble $K \subset E$ est dit convexe si pour tout couple $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ d'éléments de K, le segment $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$ est inclus dans $K$. En d'autres termes :

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in K,\ \forall \mu \in [0,1],\ (1-\mu)\boldsymbol{x}_1 + \mu \boldsymbol{x}_2 \in K \tag{B.1}$$

**Epigraphe d'une fonction convexe :**
On appelle épigraphe de la fonction $f$ l'ensemble des $(\boldsymbol{x}, r) \in E \times \mathbb{R}$ « au-dessus du graphe de $f$ ». En d'autres termes, l'épigraphe de $f$, noté *epi* $f$ est l'ensemble suivant :

$$epi\ f = \{(\boldsymbol{x}, r) \in E \times \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq r\} \tag{B.2}$$

**Fonction convexe :**
La fonction $f$ est dite convexe si son épigraphe est convexe. En d'autres termes :

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E,\ \forall \mu \in [0,1],\ f((1-\mu)\boldsymbol{x}_1 + \mu \boldsymbol{x}_2) \leq (1-\mu) f(\boldsymbol{x}_1) + \mu f(\boldsymbol{x}_2) \tag{B.3}$$

**Domaine d'une fonction convexe :**
On appelle domaine de la fonction $f$, noté $dom\ f$, l'ensemble des éléments $\boldsymbol{x}$ de $E$ en lesquels elle prend une valeur finie :

$$dom\ f = \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) < +\infty\} \tag{B.4}$$

**Fonction semi-continue inférieurement :**
On dira que la fonction $f$ est semi-continue inférieurement sur $E$ si son épigraphe $epi\ f$ est fermé ou si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) \leq \alpha\} \text{ est fermé} \tag{B.5}$$

## B.2 Sous-différentiels

Soit $E$ un espace vectoriel réel et $E^*$ son dual. Soit $f$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement, à variable dans $E$ et à valeur réelle pouvant prendre les valeurs $-\infty$ et $+\infty$, mais non nécessairement dérivable.

**Sous-gradient :**
On dira que $\boldsymbol{y} \in E^*$ est un sous-gradient de $f$ en $\boldsymbol{x} \in dom\ f$ si :

$$\forall \boldsymbol{x}' \in E,\ f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{y}.(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \tag{B.6}$$

où « . » désigne le produit scalaire.

**Sous-différentiel :**
L'ensemble des sous-gradients d'une fonction $f$ en $\boldsymbol{x}$ est appelé sous-différentiel de $f$ en $\boldsymbol{x}$ et est noté $\partial f(\boldsymbol{x})$. Dire que $\boldsymbol{y}$ est un sous-gradient de $f$ en $\boldsymbol{x}$ peut être symbolisé par l'inclusion différentielle :

$$\boldsymbol{y} \in \partial f(\boldsymbol{x}) \tag{B.7}$$

On peut ajouter à cette définition quelques propriétés :
- le sous-différentiel de $f$ en $\boldsymbol{x}$ est un ensemble convexe,
- si $f$ est différentiable en $\boldsymbol{x}$, le seul sous-gradient est le gradient de la fonction $f$.

## B.3 Transformée de Legendre-Fenchel

Soient $E$ et $E^*$ deux espaces vectoriels munis de topologies localement convexes compatibles avec leur dualité et $f$ une fonction définie sur $E$, convexe et semi-continue inférieurement.

**Transformée de Legendre-Fenchel :**
La transformée de Legendre-Fenchel de $f$ (ou encore la conjuguée de $f$), notée $f^*$, est définie sur $E^*$ par

$$f^*(\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{x}\in E}{\mathrm{Sup}} \left\{\boldsymbol{y}.\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})\right\}, \forall \boldsymbol{y} \in E^* \tag{B.8}$$

Par construction, $f^*$ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.

Comme conséquence de cette définition, nous avons l'inégalité suivante :

$$f(\boldsymbol{x}) + f^*(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \forall \boldsymbol{y} \in E^* \tag{B.9}$$

appelée inégalité de Fenchel.

Une propriété montrant l'étroite relation entre la notion de sous-différentiel et la transformation de Legendre-Fenchel peut-être ajoutée :

$$\boldsymbol{y} \in \partial f(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) + f^*(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} \in \partial f^*(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) + f^*(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x}$$

De même, on peut ajouter à cette définition de la transformée de Legendre-Fenchel, la définition de l'inf-convolution :

**Inf-convolution :**
Etant donné deux fonctions $f_1$ et $f_2$ minorées par une fonction affine commune, l'inf-convolution (ou somme épigraphique) de $f_1$ et $f_2$ est la fonction notée $f_1 \square f_2$ définie comme suit :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ (f_1 \square f_2)(\boldsymbol{x}) = \underset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2}{\mathrm{Inf}} \left\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2)\right\} \tag{B.10}$$

# Annexe C

# Compléments sur les discrétisations en éléments finis

## C.1 Compléments sur la discrétisation en éléments statiquement admissibles

La discrétisation des coques minces que nous utilisons est basée sur les travaux de Morelle et Nguyen-Dang Hung (1983) et a été développée par Gross-Weege (1988). Nous détaillons dans cette annexe les formes que nous avons obtenues pour les matrices en travaillant sur l'élément de référence.

Soit une coque cylindrique de rayon $R$, d'épaisseur $h$ et de longueur $L$.

### C.1.1 Discrétisation du champ de contraintes

Le champ de contraintes a été choisi de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{c}$$

où :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{pmatrix} n_Z & n_\theta & m_Z \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

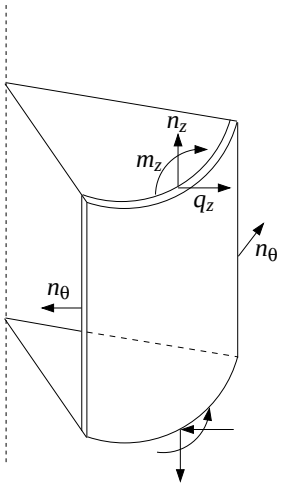



*Figure C.1 - Schématisation des efforts*

Les grandeurs adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{h}{4L} \\ C_2 &= \frac{R}{L} \\ C_3 &= \frac{h}{L} \\ \xi &= 2\frac{s - s_a}{s_b - s_a} - 1 \end{aligned}$$

où $s$ est la position du point où l'on désire déterminer le champ de contraintes, $\xi$ est la position du point de l'élément de référence qui lui correspond et $s_a$ et $s_b$ les positions des nœuds de l'élément considéré. En notant $l_e$ pour $s_b - s_a$, les matrices $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ telles que les équations d'équilibre soient vérifiées, sont alors données par :

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 2C_1C_2 & 2C_1C_2\frac{l_e}{2}\xi & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi^2 & \frac{1}{3}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi^3 & \frac{l_e}{2}\xi & 1 & -C_3\left(w_3\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi^2 + w_4\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi^3\right) \end{pmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi^2 & -\frac{1}{6C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi^3 \end{pmatrix}$$

Les termes $w_3$ et $w_4$ proviennent de l'approximation du déplacement adimensionné $\overline{w} = \dfrac{w}{h}$ sous la forme :

$$\overline{w} = w_1 + w_2\xi + w_3\xi^2 + w_4\xi^3$$

et peuvent être exprimés en fonction des déplacements $w_a$, $w_b$ et des rotations $\varphi_a$, $\varphi_b$ des noeuds de l'élément (voir figure C.2) :

$$w_3 = \frac{1}{8}\left(s_b - s_a\right) L \left(\varphi_a - \varphi_b\right)$$
$$w_4 = \frac{1}{4}\left(w_a - w_b\right) - \frac{1}{8}(\varphi_a + \varphi_b)L(s_b - s_a)$$

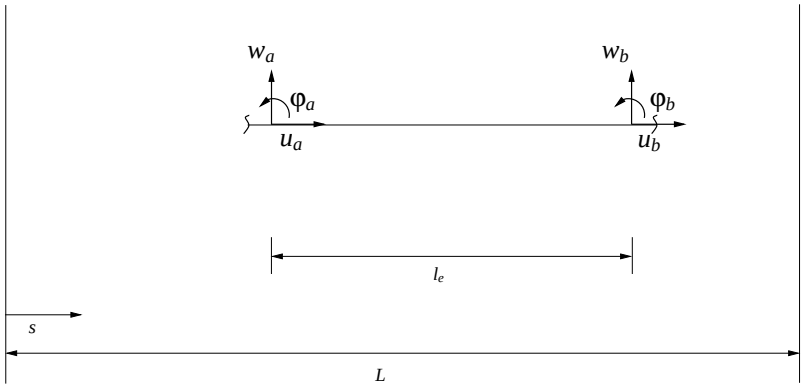



*Figure C.2 - Déplacements aux noeuds*

### C.1.2 Matrices de connexions statiques

Les connecteurs choisis, représentés sur la figure C.3, sont définis par :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{c}$$

avec :

$$\boldsymbol{g}^T = \begin{pmatrix} n_1 & q_1 & m_1 & n_2 & q_2 & m_2 \end{pmatrix}$$

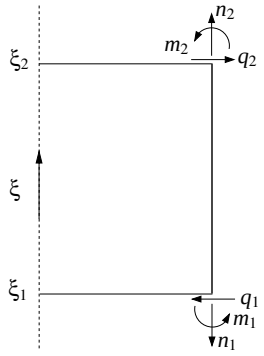



*Figure C.3 - Connecteurs aux noeuds*

En notant $\xi_1$ et $\xi_2$ les abscisses des nœuds de l'élément considéré, les matrices de connexions statiques peuvent alors être exprimées par :

$$\boldsymbol{C}_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ -2C_1\frac{l_e}{2}\xi_1 & -C_1\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2 & -C_1 & 0 & C_1C_3\left(2w_3\frac{l_e}{2}\xi_1 + 3w_4\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2\right) \\ -\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2 & -\frac{1}{3}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_1^3 & -\frac{l_e}{2}\xi_1 & -1 & C_3\left(w_3\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2 + w_4\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_1^3\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 2C_1\frac{l_e}{2}\xi_2 & C_1\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2 & C_1 & 0 & -C_1C_3\left(2w_3\frac{l_e}{2}\xi_2 + 3w_4\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2\right) \\ \left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2 & \frac{1}{3}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_2^3 & \frac{l_e}{2}\xi_2 & 1 & -C_3\left(w_3\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2 + w_4\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_2^3\right) \end{pmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{C}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_e}{2}\xi_1 & \frac{1}{2}\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2 \\ \frac{1}{2C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_1^2 & \frac{1}{6C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_1^3 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l_e}{2}\xi_1 & -\frac{1}{2}\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2 \\ -\frac{1}{2C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^2\xi_2^2 & -\frac{1}{6C_1}\left(\frac{l_e}{2}\right)^3\xi_2^3 \end{pmatrix}$$

### C.1.3 Matrices complémentaires pour le calcul de la solution élastique

La résolution du problème élastique nécessite la connaissance de deux matrices supplémentaires $\boldsymbol{F}_{bb}$ et $\boldsymbol{F}_{bc}$, définies dans le chapitre IV, équation (IV.10) par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{bb} = \displaystyle\int_V \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{S}dV \\ \boldsymbol{F}_{bc} = \displaystyle\int_V \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{T}dV \end{cases}$$

avec :

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \frac{\sigma_Y}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}(1-\nu^2) \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

où $\sigma_Y$, $E$ et $\nu$ désignent respectivement, le seuil d'écoulement plastique, le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Ces deux matrices prennent alors les formes suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{bb} = \pi C_2 l_e \displaystyle\int_{-1}^{1} \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{E}^{-1} \boldsymbol{S} d\xi = \pi C_2 l_e \overline{\boldsymbol{F}}_{bb} \\ \boldsymbol{F}_{bc} = \pi C_2 l_e \displaystyle\int_{-1}^{1} \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{E}^{-1} \boldsymbol{T} d\xi = \pi C_2 l_e \overline{\boldsymbol{F}}_{bc} \end{cases}$$

avec :

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{bb} = \frac{\sigma_Y}{E} \begin{pmatrix} 4C_1^2C_2^2I_0 + 3\beta I_4 & 0 & 0 & 3\beta I_2 & -2C_1^2C_2\nu I_0 - 3\beta C_3 w_3 I_4 \\ & 4C_1^2C_2^2I_2 + \frac{1}{3}\beta I_6 & \beta I_4 & 0 & -\beta C_3 w_4 I_6 \\ & & 3\beta I_2 & 0 & -3\beta C_3 w_4 I_4 \\ & sym. & & 3\beta I_0 & -3\beta C_3 w_3 I_2 \\ & & & & C_1^2 I_0 + 3\beta C_3 w_3 I_2 \end{pmatrix}$$

où l'on a posé $\beta = \dfrac{1}{4}(1-\nu^2)$ et :

$$I_n = \left(\frac{l_e}{2}\right)^n \int_{-1}^{1} \xi^n d\xi = \frac{1^{n+1} - (-1)^{n+1}}{n+1}$$

et :

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{bc} = \frac{\sigma_Y}{2C_1 E} \begin{pmatrix} -3\beta I_4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\beta I_6 \\ 0 & -\beta I_4 \\ -3\beta I_2 & 0 \\ 3C_3\beta w_3 I_4 & C_3\beta w_4 I_6 \end{pmatrix}$$

## C.2 Compléments sur la discrétisation en éléments cinématiquement admissibles

La seule matrice qui nous est nécessaire pour la résolution des problèmes de borne cinématique est la matrice de compatibilité. Etant donné les déplacements aux nœuds (voir figure C.2), d'après Batoz et Dhatt (1992), les déformations au point d'abscisse $\xi$ s'expriment en fonction

des déplacements aux nœuds par :

$$\begin{pmatrix} \gamma_Z \\ \gamma_\theta \\ \chi_Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_\xi \begin{pmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{pmatrix}$$

où :

$$\boldsymbol{C}_\xi = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{L} & 0 & 0 & \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & k_1(1-\xi)^2(2+\xi) & -k_2(1-\xi^2)(1-\xi) & 0 & k_1(1+\xi)^2(2-\xi) & -k_2(-1+\xi^2)(1+\xi) \\ 0 & -k_3\xi & k_4(-1+3\xi) & 0 & k_3\xi & k_4(1+3\xi) \end{pmatrix}$$

avec :

$$k_1 = \frac{1}{4R},\ k_2 = \frac{L}{8R},\ k_3 = \frac{6h}{L^2},\ k_4 = \frac{h}{L}$$

Pour obtenir la matrice de compatibilité globale $\boldsymbol{C}$ de la structure, il suffit ensuite de procéder à l'assemblage et à l'élimination des colonnes correspondant aux déplacements bloqués.

# Annexe D

# Calcul des fonctions de dissipation pour les coques minces

## D.1 Calcul de la fonction de dissipation pour les coques minces en plasticité parfaite

Soit $K$ le cône définissant le domaine élastique

$$K = \{\boldsymbol{Q} \text{ tel que } \overline{\mathcal{F}}_+(\boldsymbol{Q}) - 1 \leq 0 \text{ et } \overline{\mathcal{F}}_-(\boldsymbol{Q}) - 1 \leq 0\}.$$

où l'on a posé :

$$\overline{\mathcal{F}}_\pm(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{\boldsymbol{Q}_\pm{}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_\pm}$$

Déterminons la fonction de dissipation associée à cette définition du domaine élastique. Pour cela, nous devons déterminer la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice du domaine élastique $K$. Introduisons

$$K_+ = \{\boldsymbol{Q} \text{ tel que } \overline{\mathcal{F}}_+(\boldsymbol{Q}) - 1 \leq 0\}.$$

et

$$K_- = \{\boldsymbol{Q} \text{ tel que } \overline{\mathcal{F}}_-(\boldsymbol{Q}) - 1 \leq 0\}.$$

Alors, la fonction indicatrice du domaine élastique $K$, notée $\Psi_K$, peut s'exprimer à l'aide des fonctions indicatrices des domaines $K_+$ et $K_-$, notées respectivement $\Psi_{K+}$ et $\Psi_{K-}$ :

$$\Psi_K(\boldsymbol{Q}) = \Psi_{K+}(\boldsymbol{Q}) + \Psi_{K-}(\boldsymbol{Q})$$

La transformée de Legendre-Fenchel de $\Psi_K$, notée $(\Psi_K)^*$, est donc définie par :

$$(\Psi_K(\boldsymbol{Q}))^* = (\Psi_{K+}(\boldsymbol{Q}) + \Psi_{K-}(\boldsymbol{Q}))^*$$

D'après la propriété de conjugaison d'une somme de fonctions[21] (que l'on pourra trouver par exemple dans Hiriart-Urruty (1998)), on a :

$$(\Psi_K)^*(\dot{\boldsymbol{q}}) = (\Psi_{K+}(\boldsymbol{Q}))^* \square (\Psi_{K-}(\boldsymbol{Q}))^*$$

où $\square$ désigne l'opération d'inf-convolution.

Dans un premier temps, déterminons $\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = (\Psi_{K-}(\boldsymbol{Q}))^*$. Etant donné la définition de $K_-$, la fonction indicatrice de cet ensemble est :

$$\Psi_{K-}(\boldsymbol{Q}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(\overline{f}_-(\boldsymbol{Q}))$$

où l'on a posé :

$$\overline{f}_\pm(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{\boldsymbol{Q}_\pm{}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_\pm} - 1$$

D'après la propriété de conjugaison de fonctions composées (voir Hiriart-Urruty (2003)), il vient :

$$\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}}} \left[ \Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\alpha) + \alpha \overline{f}^*_- \left( \frac{\dot{\boldsymbol{q}}}{\alpha} \right) \right] \tag{D.1}$$

Calculons donc $\Psi^*_{\mathbb{R}^-}$. D'après la définition de la transformée de Legendre-Fenchel :

$$\Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\alpha) = \sup_x (\alpha x - \Psi_{\mathbb{R}^-}(x))$$

soit :

$$\Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\alpha) = \sup_{x \leq 0} (\alpha x) = \Psi_{\mathbb{R}^+}(\alpha)$$

Il nous faut maintenant déterminer $\overline{f}^*_-$. En appliquant une nouvelle fois la définition de la transformée de Legendre-Fenchel, on a :

$$\overline{f}^*_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sup_{\boldsymbol{Q}} \left[ \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{Q} - \overline{f}_-(\boldsymbol{Q}) \right]$$

En remplaçant $\overline{f}_-(\boldsymbol{Q})$ par son expression, en introduisant :

$$\dot{\boldsymbol{q}}_\pm = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\gamma}} \pm \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\chi}}$$

et en remarquant que :

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{Q} = \dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{Q}_+ + \dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{Q}_-$$

on obtient :

$$\overline{f}^*_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sup_{\boldsymbol{Q}_-} \left[ \dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{Q}_- - \sqrt{\boldsymbol{Q}_-^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_-} \right] + \sup_{\boldsymbol{Q}_+} \left[ \dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{Q}_+ \right] + 1$$

[21] Les bonnes propriétés de convexité pour l'application de cette propriété sont évidemment vérifiées puisque nous considérons des fonctions indicatrices d'ensembles convexes, donc elles-mêmes convexes.

Cela nous fournit finalement

$$\overline{f}_-^* (\dot{\boldsymbol{q}}) = \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{q}}_+ \right) + \Psi_{\mathbb{R}^-} \left( \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} - 1 \right) + 1$$

De la même manière, on obtiendrait :

$$\overline{f}_+^* (\dot{\boldsymbol{q}}) = \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{q}}_- \right) + \Psi_{\mathbb{R}^-} \left( \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+} - 1 \right) + 1$$

En reportant les expressions de $\Psi_{\mathbb{R}^-}^*$ et $\overline{f}_-^*$ dans (D.1), on peut calculer :

$$\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+, \dot{\boldsymbol{q}}_-}} \left[ \Psi_{\mathbb{R}^+}(\alpha) + \alpha \left\{ \Psi_{\{0\}} \left( \frac{\dot{\boldsymbol{q}}_+}{\alpha} \right) + \Psi_{\mathbb{R}^-} \left( \sqrt{\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_-}{\alpha}^T \boldsymbol{A}^{-1} \frac{\dot{\boldsymbol{q}}_-}{\alpha}} - 1 \right) + 1 \right\} \right]$$

Comme la borne inférieure doit être déterminée pour $\alpha$ positif ou nul, on a :

$$\Psi_{\mathbb{R}^+}(\alpha) = 0$$

De plus, la borne inférieure sera réalisée si :

$$\dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0$$

Il vient alors :

$$\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0, \dot{\boldsymbol{q}}_-}} \left[ \Psi_{\mathbb{R}^-} \left( \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} - \alpha \right) + \alpha \right]$$

La borne inférieure sera donc réalisée si :

$$\sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} - \alpha \leq 0$$

Il en résulte :

$$\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0 \\ \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} - \alpha \leq 0}} \left[ \, \alpha \, \right]$$

soit :

$$\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} + \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{q}}_+ \right)$$

De la même manière, on déterminerait $\varphi_+$ :

$$\varphi_+(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+} + \Psi_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{q}}_- \right)$$

Il nous reste à calculer l'inf-convolution de ces deux dernières fonctions :

$$\left(\Psi_K\right)^* (\dot{\boldsymbol{q}}) = \left(\varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}})\right) \square \left(\varphi_+(\dot{\boldsymbol{q}})\right)$$

D'après la définition de l'inf-convolution, on a :

$$\left(\Psi_K\right)^* (\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}^1 + \dot{\boldsymbol{q}}^2} \left[ \varphi_-(\dot{\boldsymbol{q}}^1) + \varphi_+(\dot{\boldsymbol{q}}^2) \right]$$

Il vient donc :

$$(\Psi_K)^*(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=\dot{\boldsymbol{q}}_+^1+\dot{\boldsymbol{q}}_+^2 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=\dot{\boldsymbol{q}}_-^1+\dot{\boldsymbol{q}}_-^2}} \left[ \sqrt{(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-^1} + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1\right) + \sqrt{(\dot{\boldsymbol{q}}_+^2)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+^2} + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\right) \right]$$

Pour que la borne inférieure soit atteinte, il faut donc que :

$$\dot{\boldsymbol{q}}_-^2 = 0$$
$$\dot{\boldsymbol{q}}_+^1 = 0$$

On obtient alors :

$$(\Psi_K)^*(\dot{\boldsymbol{q}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=\dot{\boldsymbol{q}}_+^2 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=\dot{\boldsymbol{q}}_-^1}} \left[ \sqrt{(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-^1} + \sqrt{(\dot{\boldsymbol{q}}_+^2)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+^2} \right]$$

Il en résulte donc :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}) = (\Psi_K)^*(\dot{\boldsymbol{q}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} + \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+}$$

ou encore, en introduisant les déformations équivalentes $\dot{p}_\pm$ :

$$\dot{p}_\pm = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_\pm^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_\pm} = \| \dot{\boldsymbol{q}}_\pm \|^*$$

la fonction de dissipation s'écrit :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}) = \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* = \dot{p}_+ + \dot{p}_-$$

## D.2 Calcul de la fonction de dissipation pour les coques minces avec la règle d'écrouisssage cinématique linéaire limité

Soit $K_E$ le domaine élastique défini par :

$$K_E = K_{E+} \cap K_{E-}$$

où l'on a posé :

$$K_{E+} = \left\{ (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \sqrt{\left(\boldsymbol{Q}_+ - \boldsymbol{X}_+\right)^T \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{Q}_+ - \boldsymbol{X}_+\right)} - 1 \leq 0 \right\}$$

et :

$$K_{E-} = \left\{ (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \sqrt{\left(\boldsymbol{Q}_- - \boldsymbol{X}_-\right)^T \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{Q}_- - \boldsymbol{X}_-\right)} - 1 \leq 0 \right\}$$

Définissons ensuite le domaine limite des contraintes internes de la même manière :

$$K_L = K_{L+} \cap K_{L-}$$

avec :

$$K_{L+} = \left\{ (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \sqrt{\boldsymbol{X}_+^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}_+} - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \right\}$$

et :

$$K_{L-} = \left\{ (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) \text{ tel que } \sqrt{\boldsymbol{X}_-^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}_-} - \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \leq 0 \right\}$$

La fonction indicatrice $\Psi_K$ de $K$, intersection des domaines élastique et limite des contraintes internes :

$$K = K_L \cap K_E$$

peut s'exprimer à l'aide des fonctions indicatrices des domaines $K_E$ et $K_L$, notées respectivement $\Psi_{K_E}$ et $\Psi_{K_L}$ :

$$\Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) = \Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})$$

La fonction de dissipation, notée $\varphi$, est déterminée par le calcul de la transformée de Legendre-Fenchel de $\Psi_K$ :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = [\Psi_K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^*$$

D'après la définition de $\Psi_K$ comme la somme des fonctions indicatrices de $K_L$ et $K_E$, on obtient :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = [\Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) + \Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^*$$

D'après la propriété de conjugaison d'une somme de fonctions[22] (voir par exemple dans Hiriart-Urruty (1998)), on a :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = [\Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^* \square [\Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^*$$

où $\square$ désigne l'opération d'inf-convolution.

En notant :

$$\begin{cases} [\Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^* = \varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ [\Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^* = \varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \end{cases}$$

la fonction de dissipation devient :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \square \varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$$

Dans un premier temps, déterminons $\varphi_E$. En remarquant que l'ensemble $K_E$ est lui-même l'intersection des ensembles $K_{E+}$ et $K_{E-}$ on obtient :

$$[\Psi_{K_E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})]^* = \left[\Psi_{K_{E+}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \square \left[\Psi_{K_{E-}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^*$$

ou encore :

$$\varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \square \varphi_{E-}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$$

avec :

$$\begin{cases} \varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \left[\Psi_{K_{E+}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \\ \varphi_{E-}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \left[\Psi_{K_{E-}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \end{cases}$$

[22] On note ici aussi que les bonnes propriétés de convexité pour l'application de cette propriété sont évidemment vérifiées puisque nous considérons des fonctions indicatrices d'ensembles convexes.

Commençons par la détermination de $\varphi_{E+}$. Etant donné la définition de $K_{E+}$, la fonction indicatrice de cet ensemble est :

$$\Psi_{K_{E+}}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(\overline{f}_+(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}))$$

où l'on a posé :

$$\overline{f}_\pm(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}) = \sqrt{(\boldsymbol{Q}_\pm - \boldsymbol{X}_\pm)^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_\pm - \boldsymbol{X}_\pm)} - 1$$

D'après la propriété de conjugaison de fonctions composées (voir Hiriart-Urruty (2003)), il vient :

$$\varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\mu\geq 0\\ \dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}}} \left[\Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\mu) + \mu\overline{f}^*_+\left(\frac{\dot{\boldsymbol{q}}}{\mu},-\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\mu}\right)\right] \tag{D.2}$$

Calculons donc $\Psi^*_{\mathbb{R}^-}$. D'après la définition de la transformée de Legendre-Fenchel :

$$\Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\mu) = \sup_x \left(\mu x - \Psi_{\mathbb{R}^-}(x)\right)$$

soit :

$$\Psi^*_{\mathbb{R}^-}(\mu) = \sup_{x\leq 0}(\mu x) = \Psi_{\mathbb{R}^+}(\mu)$$

Il nous faut maintenant déterminer $\overline{f}^*_+$. En appliquant une nouvelle fois la définition de la transformée de Legendre-Fenchel, on a :

$$\overline{f}^*_+(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sup_{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}}\left[\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{Q} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{X} - \overline{f}_+(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X})\right]$$

En remplaçant $\overline{f}_+(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X})$ par son expression, en introduisant :

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_\pm = \dfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\gamma}} \pm \dfrac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\chi}}\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm = \dfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n \pm \dfrac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_m\end{cases}$$

et en remarquant que :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{Q} &= \dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{Q}_+ + \dot{\boldsymbol{q}}_-^T\boldsymbol{Q}_-\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{X} &= \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T\boldsymbol{X}_+ + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^T\boldsymbol{X}_-\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{f}^*_+(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sup_{\boldsymbol{Q}_+,\boldsymbol{X}_+}&\left[\dot{\boldsymbol{q}}_+^T(\boldsymbol{Q}_+ - \boldsymbol{X}_+) - \sqrt{(\boldsymbol{Q}_+ - \boldsymbol{X}_+)^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_+ - \boldsymbol{X}_+)}\right]\\ &+ \sup_{\boldsymbol{X}_+}\left[(\dot{\boldsymbol{q}}_+ - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+)^T\boldsymbol{X}_+\right] + \sup_{\boldsymbol{Q}_-}\left[\dot{\boldsymbol{q}}_-^T\boldsymbol{Q}_-\right] + \sup_{\boldsymbol{X}_-}\left[\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^T\boldsymbol{X}_-\right] + 1\end{aligned}$$

ce qui fournit finalement :

$$\overline{f}^*_+(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}\left(\sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+} - 1\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-\right) + 1$$

Comme nous avons déterminé $\Psi_{\mathbb{R}^-}$ et $\overline{f}^*_+$, on peut calculer $\varphi_{E+}$ à l'aide de (D.2) :

$$\varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\mu\geq 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_+,\dot{\boldsymbol{q}}_-\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+,\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-}} \left[\Psi_{\mathbb{R}^+}(\mu) + \mu\left\{\Psi_{\mathbb{R}^-}\left(\sqrt{\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T}{\mu}\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_+}{\mu}}-1\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_-}{\mu}\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+}{\mu}-\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_+}{\mu}\right) + \Psi_{\{0\}}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-}{\mu}\right)+1\right\}\right]$$

Comme la borne inférieure doit être déterminée pour $\mu$ positif ou nul, on a :

$$\Psi_{\mathbb{R}^+}(\mu) = 0$$

De plus, la borne inférieure sera réalisée si :

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_- = 0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- = 0\end{cases}$$

Il vient alors :

$$\varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\mu\geq 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_+,\dot{\boldsymbol{q}}_-=0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+,\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+-\dot{\boldsymbol{q}}_+=0}} \left[\Psi_{\mathbb{R}^-}\left(\sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+}-\mu\right)+\mu\right]$$

La borne inférieure sera donc réalisée si :

$$\sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+}-\mu\leq 0$$

Il en résulte :

$$\varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\mu\geq 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_+,\dot{\boldsymbol{q}}_-=0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+,\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+-\dot{\boldsymbol{q}}_+=0\\ \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+}-\mu\leq 0}} \left[\,\mu\,\right]$$

soit :

$$\varphi_{E+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+-\dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-)$$

De la même manière, on déterminerait $\varphi_{E-}$ :

$$\varphi_{E-}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_-} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_--\dot{\boldsymbol{q}}_-) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+)$$

Il reste à calculer $\varphi_E$ à partir de $\varphi_{E+}$ et $\varphi_{E-}$. D'après la définition de l'inf-convolution, on a :

$$\varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=\dot{\boldsymbol{q}}_+^1+\dot{\boldsymbol{q}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=\dot{\boldsymbol{q}}_-^1+\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}} \left[\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1\right)^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+^1} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1-\dot{\boldsymbol{q}}_+^1) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1) + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\right)^T\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_-^2} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2-\dot{\boldsymbol{q}}_-^2) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+^2) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2)\right]$$

Pour que la borne inférieure soit atteinte, il faut donc que :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_-^1 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+^2 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_+^1 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2 - \dot{\boldsymbol{q}}_-^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit alors à :

$$\varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+ = \dot{\boldsymbol{q}}_+^1 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_- = \dot{\boldsymbol{q}}_-^2 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_+^1 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2 - \dot{\boldsymbol{q}}_-^2 = 0}} \left[ \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+^1} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-^2} \right]$$

d'où finalement :

$$\varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \left( \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+} + \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} \right) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_-)$$

Passons maintenant à la détermination de $\varphi_L$. Comme dans le cas de $\varphi_E$, on remarque que l'ensemble $K_L$ est lui-même l'intersection des ensembles $K_{L+}$ et $K_{L-}$, donc :

$$\left[\Psi_{K_L}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* = \left[\Psi_{K_{L+}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \square \left[\Psi_{K_{L-}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^*$$

ou encore :

$$\varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \square \varphi_{L-}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}})$$

avec :

$$\begin{cases} \varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \left[\Psi_{K_{L+}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \\ \varphi_{L-}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \left[\Psi_{K_{L-}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X})\right]^* \end{cases}$$

Déterminons $\varphi_{L+}$. Etant donné la définition de $K_{L+}$, la fonction indicatrice de cet ensemble est :

$$\Psi_{K_{L+}}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(\overline{g}_+(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}))$$

où l'on a posé :

$$\overline{g}_\pm(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}) = \sqrt{\boldsymbol{X}_\pm{}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}_\pm} - \frac{X_\infty}{\sigma_Y}$$

D'après la propriété de conjugaison de fonctions composées (voir Hiriart-Urruty (2003)), il vient :

$$\varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\mu \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}}} \left[ \Psi_{\mathbb{R}^-}^*(\mu) + \mu \overline{g}_+^* \left( \frac{\dot{\boldsymbol{q}}}{\mu}, -\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\mu} \right) \right] \tag{D.3}$$

Le calcul de $\Psi^*_{\mathbb{R}^-}$ ayant déjà été effectué lors du calcul de $\varphi_E$, il nous reste à effectuer celui de $\overline{g}^*_+$. D'après la définition de la transformée de Legendre-Fenchel, on a :

$$\overline{g}^*_+ \left(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) = \underset{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}}{\mathrm{Sup}} \left[\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{Q} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{X} - \overline{g}_+(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X})\right]$$

En remplaçant $\overline{g}_+(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X})$ par son expression, et en procédant comme pour le calcul de $\overline{f}^*_+$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{g}^*_+ \left(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) =& \underset{\boldsymbol{Q}_+}{\mathrm{Sup}} \left[\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{Q}_+\right] + \underset{\boldsymbol{Q}_-}{\mathrm{Sup}} \left[\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{Q}_-\right] + \underset{\boldsymbol{X}_+}{\mathrm{Sup}} \left[-\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{X}_+ - \sqrt{{\boldsymbol{X}_+}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}_+}\right] \\ &+ \underset{\boldsymbol{X}_-}{\mathrm{Sup}} \left[-\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^T \boldsymbol{X}_-\right] + \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\end{aligned}$$

Cela nous fournit alors :

$$\overline{g}^*_+ \left(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) = \Psi_{\mathbb{R}^-} \left(\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} - 1\right) + \Psi_{\{0\}} \left(\dot{\boldsymbol{q}}_-\right) + \Psi_{\{0\}} \left(\dot{\boldsymbol{q}}_+\right) + \Psi_{\{0\}} \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-\right) + \frac{X_\infty}{\sigma_Y}$$

Comme nous avons déterminé $\Psi_{\mathbb{R}^-}$ et $\overline{g}^*_+$, on peut calculer $\varphi_{L+}$ à l'aide de (D.3) :

$$\begin{aligned}\varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \underset{\substack{\mu \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+, \dot{\boldsymbol{q}}_- \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-}}{\mathrm{Inf}} \Bigg[ \Psi_{\mathbb{R}^+}(\mu) + \mu \Bigg\{ \Psi_{\mathbb{R}^-} \left(\sqrt{\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T}{\mu} \boldsymbol{A}^{-1} \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+}{\mu}} - 1\right) + \Psi_{\{0\}} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_+}{\mu}\right) \\ + \Psi_{\{0\}} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{q}}_-}{\mu}\right) + \Psi_{\{0\}} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-}{\mu}\right) + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \Bigg\} \Bigg]\end{aligned}$$

Comme la borne inférieure doit être déterminée pour $\mu$ positif ou nul, on a :

$$\Psi_{\mathbb{R}^+}(\mu) = 0$$

De plus, la borne inférieure sera réalisée si :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_- = 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- = 0 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \underset{\substack{\mu \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0, \dot{\boldsymbol{q}}_- = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- = 0}}{\mathrm{Inf}} \left[\Psi_{\mathbb{R}^-} \left(\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} - \mu\right) + \mu \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\right]$$

La borne inférieure sera donc réalisée si :

$$\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} - \mu \leq 0$$

Il en résulte :

$$\varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \underset{\substack{\mu \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_+ = 0, \dot{\boldsymbol{q}}_- = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- = 0 \\ \sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} - \mu \leq 0}}{\mathrm{Inf}} \left[\frac{X_\infty}{\sigma_Y} \mu\right]$$

soit :

$$\varphi_{L+}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-)$$

De la même manière, on déterminerait $\varphi_{L-}$ :

$$\varphi_{L-}(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+)$$

Il reste à calculer $\varphi_L$ à partir des expressions de $\varphi_{L+}$ et $\varphi_{L-}$. D'après la définition de l'inf-convolution, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=\dot{\boldsymbol{q}}_+^1+\dot{\boldsymbol{q}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=\dot{\boldsymbol{q}}_-^1+\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}} \Bigg[ &\frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1)\\ &+\frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2} + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-^2) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+^2) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2)\Bigg]\end{aligned}$$

Pour que la borne inférieure soit atteinte, il faut donc que :

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_+^1 = 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-^1 = 0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1 = 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_+^2 = 0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-^2 = 0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2 = 0\end{cases}$$

On obtient alors :

$$\varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=0\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=0\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}} \left[\frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1} + \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}\right]$$

D'où finalement :

$$\varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{X_\infty}{\sigma_Y}\left(\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+} + \sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-}\right) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-)$$

On peut maintenant procéder au calcul final de $\varphi(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ par :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \varphi_E(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \square \varphi_L(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}})$$

En utilisant la définition de l'inf-convolution, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(\dot{\boldsymbol{q}},-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+=\dot{\boldsymbol{q}}_+^1+\dot{\boldsymbol{q}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{q}}_-=\dot{\boldsymbol{q}}_-^1+\dot{\boldsymbol{q}}_-^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}} \Bigg[ &\left(\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_+^1} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_-^1}\right) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_+^1)\\ &+\Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_-^1) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_+^2) + \Psi_{\{0\}}(\dot{\boldsymbol{q}}_-^2)\\ &+\frac{X_\infty}{\sigma_Y}\left(\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

La borne inférieure sera donc atteinte si :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_+^2 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_-^2 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_+^1 = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^1 - \dot{\boldsymbol{q}}_-^1 = 0 \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \inf_{\substack{\dot{\boldsymbol{q}}_+ = \dot{\boldsymbol{q}}_+^1 \\ \dot{\boldsymbol{q}}_- = \dot{\boldsymbol{q}}_-^1 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2 = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2 = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_-}} \left[ \left( \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_+^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+^1} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{q}}_-^1\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-^1} \right) + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+^2} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_-^2} \right) \right]$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = & \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_+^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_+} + \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_-^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_-} \\ & + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+\right)} + \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_-\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_-\right)} \right) \end{aligned}$$

En notant :

$$\begin{aligned} \| \dot{\boldsymbol{q}}_\pm \|^* &= \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}_\pm^T \boldsymbol{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_\pm} \\ \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm \|^* &= \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm\right)^T \boldsymbol{A}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\pm - \dot{\boldsymbol{q}}_\pm\right)} \end{aligned}$$

on peut mettre $\varphi$ sous la forme condensée suivante :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \| \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* + \frac{X_\infty}{\sigma_Y} \left( \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_+ - \dot{\boldsymbol{q}}_+ \|^* + \| \dot{\boldsymbol{\alpha}}_- - \dot{\boldsymbol{q}}_- \|^* \right)$$

**Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écrouissage cinématique non linéaire et non associée**

L'introduction de l'écrouissage dans l'étude de l'adaptation élastoplastique est abordée ici, en particulier lorsque celle-ci impose de se placer en plasticité non associée. Le cadre des matériaux standards généralisés (MSG) n'étant plus adapté dans ce dernier cas, une approche alternative, fournie par le concept de matériaux standards implicites (MSI), est alors utilisée. En particulier, on présente dans ce travail l'étude d'exemples caractéristiques en adaptation élastoplastique par le modèle des MSI, soit par l'approche du bipotentiel.
Un premier exemple concernant un état de traction constante et torsion alternée homogène est traité en utilisant la méthode pas à pas puis dans le cadre des MSI. La confrontation des résultats porte aussi bien sur le facteur d'adaptation que sur les contraintes internes. La comparaison entre les prédictions du calcul incrémental et celles de la solution analytique puis de la programmation mathématique, construites par l'approche du bipotentiel, montre une très bonne concordance.
La deuxième partie de l'étude est consacrée aux structures de type coques minces. Après avoir constaté que l'implémentation du problème de borne statique dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire limité nécessite d'imposer explicitement la limitation des contraintes internes pour que les résultats soient mécaniquement acceptables, il est montré que le cadre des MSI permet de construire un problème de borne cinématique. Son implémentation donne un encadrement très précis du facteur d'adaptation entre les facteurs cinématique et statique. Enfin, une règle d'écrouissage cinématique non linéaire et un bipotentiel sont construits pour les coques.

**Mots clés :** Lois de comportement, Plasticité non associée, Adaptation élastoplastique, Matériaux standards implicites, Bipotentiel, Optimisation non linéaire.

**Shakedown of structures under variable loads with a kinematic non linear and non associated hardening rule**

The introduction of hardening into the study of elastoplastic shakedown analysis is considered in this work, in particular in the case of non associated plasticity. Due to the fact that the framework of generalized standard materials (GSM) is not well adapted in this last case, an alternative approach, provided by the concept of implicit standard materials (ISM), is then used. In particular, we study typical examples in elastoplastic shakedown by means of the ISM model through the theory of bipotential.
A first example of an homogeneous constant traction and alternating torsion state is considered ; it is analyzed by using the step by step computations and then within the ISM framework. The obtained results for the shakedown factor as well as the back stresses are examined. The comparison of the incremental method predictions to the analytical solution and the mathematical programming ones, built by means of the bipotential approach, shows a very good agreement.
The second part of the study is devoted to thin shell structures. After observing that the numerical implementation of the static bound problem in the case of a linear limited kinematic hardening requires an explicit limitation of back stresses in order to obtain mechanical relevant solutions, it is shown that the framework of ISM allows to built a kinematic bound problem. The numerical implementation provides a very accurate bounding of the exact shakedown factor between the kinematic and static factors. Finally, a non linear kinematic hardening rule and a bipotential are built for the thin shell structures.

**Keywords :** Constitutive behaviour, Non-associated plasticity, shakedown, Implicit standard materials, Bipotential, Non linear optimization.