



Calcul des zéros d'une fonction analytique avec points de branchements

P. Cristini

► To cite this version:

P. Cristini. Calcul des zéros d'une fonction analytique avec points de branchements. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-869-C5-872. 10.1051/jp4:19945189 . jpa-00252871

HAL Id: jpa-00252871

<https://hal.science/jpa-00252871>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul des zéros d'une fonction analytique avec points de branchements

P. CRISTINI

CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 Chemin Joseph Aiguier, 13009 Marseille, France

Abstract : The determination of roots of a function is a problem that manifests itself in almost every branch of acoustics. The usual way to determine them involves using Newton-Raphson iteration to refine their positions from approximate initial values which often leads to problems. This paper deals with an entirely different method based on winding number integral. This method has already been used but not when the function has branch points. In this paper, we give the strategy to use in order to deal with branch points arising from square root functions.

1 Introduction

La détermination des zéros d'une fonction est un problème auquel on est confronté dans presque toutes les branches de l'acoustique. Pour résoudre ce problème, la technique la plus souvent utilisée se sert de la méthode de Newton-Raphson pour déterminer, de manière itérative, les solutions à partir de valeurs initiales. Cette technique présente un certain nombre de difficultés. Souvent on est confronté à des problèmes de convergence

La méthode que nous proposons dans cet article procède de manière complètement différente en déterminant les zéros de la fonction à l'intérieur d'un contour dans le plan complexe. Le principe de cette méthode pour des fonctions analytiques n'est pas nouveau [1,2,3]. En revanche la prise en compte du caractère multiforme des fonctions racines carrées que l'on rencontre fréquemment en acoustique n'a pas été abordé. Nous nous proposons donc de donner la stratégie à suivre pour étendre le champ d'application de cette méthode au calcul des zéros de fonctions présentant des points de branchement issus de fonctions racines carrées.

2 Principe de la résolution

Soit f une fonction méromorphe, φ une fonction analytique et C un contour fermé sur lequel la fonction f ne présente ni zéros, ni pôles, ces deux fonctions vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \varphi(z) dz = \sum_{k=1}^p n_k \varphi(a_k) - \sum_{l=1}^q n_l \varphi(b_l) \quad (1)$$

où les a_k et b_l représentent les zéros et les pôles de f à l'intérieur de C avec les ordres de multiplicité n_k et n_l .

Supposons que f ne présente pas de pôles à l'intérieur de C et prenons comme fonction φ la fonction suivante : $\varphi(z) = z^n$. On pourra donc accéder à la connaissance des paramètres suivants :

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^N n_k a_k^n \quad (2)$$

2.1 Relation de Newton entre les sommes des puissances semblables des racines et les coefficients

On suppose connu les nombres de zéros de la fonction f à l'intérieur du contour C .

$$\text{On connaît les : } S_n = \sum_{k=1}^N a_k^n \quad \text{et on pose : } P_N = \prod_{j=1}^N (z - a_j) = \sum_{j=0}^N A_j z^{N-j}$$

En dérivant les deux expressions du polynôme, il est possible grâce au processus itératif suivant d'obtenir les coefficients du polynôme qui possède les mêmes racines que la fonction f .

$$\begin{cases} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ \dots \\ S_n + A_1 S_{n-1} + A_2 S_{n-2} + \dots + A_{n-1} S_1 + nA_n = 0 \end{cases}$$

On aura donc $N+1$ quantités à calculer. S_0 donnera le nombre de racines et les $S_n : n = 1, \dots, N$ conduiront aux coefficients du polynôme possédant les mêmes racines que f .

Les S_n sont calculés à partir d'une méthode de trapèzes [1].

2.2 Choix du contour d'intégration

On présente dans le tableau suivant les avantages et les inconvénients des deux types de contour possibles :

Cercle :	+ Convergence exponentielle de l'évaluation de S_n
	- Quadrillage du plan complexe difficile
Rectangle :	+ Quadrillage du plan complexe facile
	- Mauvaise convergence de l'évaluation de S_n

Un choix optimal peut être le suivant : utilisation d'un rectangle pour déterminer les zéros de manière approximative puis pour chaque valeur de zéros obtenues prendre un cercle centré sur cette valeur afin de déterminer de manière précise les racines.

3 Résolution en présence de points de branchement

Nous nous intéressons dans cette partie au calcul des zéros d'une fonction analytique possédant des points de branchement. En acoustique, les fonctions multiformes que nous sommes susceptibles de rencontrer sont de type racine carrée. Nous nous attacherons donc à donner la stratégie de résolution uniquement en présence de ce type de fonction. Pour bien comprendre les problèmes auxquels on est confronté, il est nécessaire d'étudier le comportement de la fonction racine carrée dans le plan complexe (fig 1).

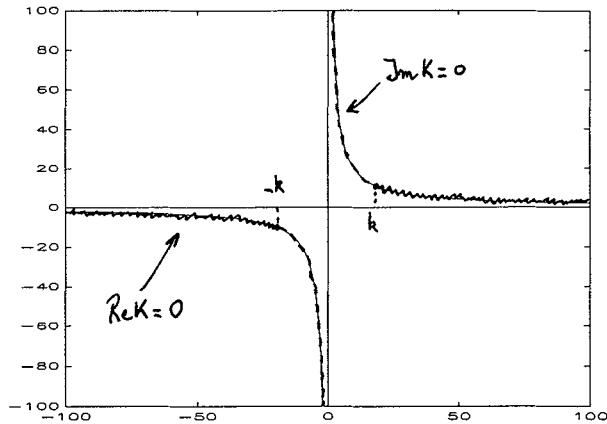


Figure 1: Comportement de la fonction racine carrée dans le plan complexe

Les difficultés proviennent de la présence de fonctions du type : $K(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ qui possèdent un point de branchement en $\xi = k$. Cette fonction est multiforme et il faut faire un choix quant à sa valeur en définissant une coupure dans le plan complexe. Un choix judicieux est de considérer par exemple un critère sur la partie réelle ou sur la partie imaginaire.

L'intérêt de ces deux définitions provient du fait que le support des deux coupures suivant que l'on place le critère sur la partie réelle ou la partie imaginaire est le même.

Ainsi, suivant la région du plan complexe dans laquelle on désire trouver les racines, on choisira la coupure adéquate de manière à ce qu'elle ne traverse pas la région choisie puis on envisagera successivement les deux valeurs de la fonction racine carrée. Dans ce paragraphe, nous avons abordé le cas où il n'y a qu'un seul point de branchement, mais ce raisonnement peut facilement s'étendre à la prise en compte de plusieurs points de branchement.

4 Résolution de l'équation caractéristique pour le guide de Pekeris

Le guide d'onde de Pekeris [4] correspond au cas où le fond marin est constitué d'un fond fluide semi-infini. L'équation caractéristique donnant les différents modes de propagation s'écrit sous la forme suivante :

$$1 + V(\xi) \exp(2iKh) = 0 \quad \text{avec : } K = \sqrt{k^2 - \xi^2}$$

$$V = \frac{\rho_2 K_1 - \rho_1 K_2}{\rho_2 K_1 + \rho_1 K_2} \quad \text{avec : } K_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \text{ et } K_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$$

ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les densités de l'eau et du fluide et k_1 et k_2 les nombres d'onde dans ces deux milieux.

Dans ce cas, il y a deux points de branchement k_1 et k_2 . La résolution se fera donc en considérant deux zones dans le plan complexe : une zone pour les nombres d'ondes dont la partie réelle est comprise entre $\Re(k_1)$ et $\Re(k_2)$ qui correspond aux modes dits propagatifs et une autre zone pour les nombres d'ondes dont la partie réelle est comprise entre $\Re(k_2)$ et 0. La méthode utilisée pour résoudre cette équation caractéristique est illustrée par la figure 2 où l'on cherche à résoudre l'équation caractéristique pour un guide de Pekeris dans les conditions suivantes :

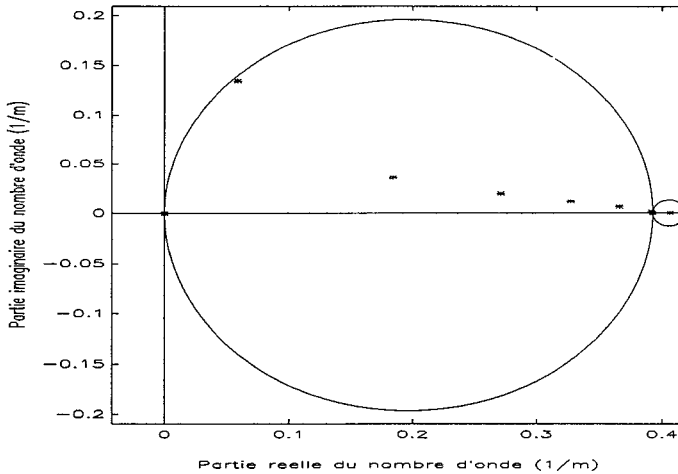


Figure 2: Résultat de la résolution de l'équation caractéristique pour un fond fluide semi-infini

$f=100$ Hz, $H = 54$ m, $c_1 = 1500$ m/s, $c_2 = 1600$ m/s, $\rho_1/\rho_2 = 1.25$ et $\alpha_2 = 0.3125$ dB/m/kHz

Les résultats fournis par la méthode proposée (cf fig 2) sont identiques à ceux que cite la référence [5] comme étant exacts.

5 Conclusion

La détermination des racines de l'équation $f(z) = 0$ par la méthode que nous venons de présenter dans cet article présente un grand nombre d'avantages. Premièrement, il n'est pas nécessaire de connaître des valeurs approchées des racines pour les déterminer donc pas de problèmes de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson. Deuxièmement, les résultats obtenus sont extrêmement précis et plusieurs racines peuvent être obtenues simultanément. Les temps de calculs sont réduits de l'ordre de quelques secondes pour le cas présenté sur un ordinateur de type PC 486.

Son champ d'application n'est pas limité à la résolution de l'équation caractéristique des petits fonds. Il peut être étendu à la résolution des équations de dispersion en général, mais dans ce cas, il faut bien sur adapter la stratégie de prise en compte des points de branchements à la nature du problème.

Bibliographie

- [1] B. DAVIES, "Locating the zeros of an analytic function", J. Comp. Physics **66** (1986) 36-49
- [2] S. IVANSSON and I. KARASALO, "Computation of modal wavenumbers using an adaptative winding-number integral method with error control", J. Sound and Vib.
- [3] P.R. BRAZIER-SMITH and J.F. M. SCOTT, "On the determination of the roots of dispersion equations by the use of winding number integrals", J. Sound and Vib. **145** (3) (1991) 503-510
- [4] C.L. PEKERIS, "Theory of propagation of explosive sound in shallow water", Geol. Soc. Am, Memoir **27** (1948)
- [5] Z.Y. ZHANG and C.T. TINDLE, "Complex effective depth of the ocean bottom", J. Acous. Soc. Am. **93** (1) (1993) 205-213