



HAL
open science

VIBRATIONS ET RAYONNEMENT DE PLAQUES COMPLEXES EN FLUIDE LÉGER ET EN FLUIDE LOURD

Jean-Marie Nicolas, A. Berry

► **To cite this version:**

Jean-Marie Nicolas, A. Berry. VIBRATIONS ET RAYONNEMENT DE PLAQUES COMPLEXES EN FLUIDE LÉGER ET EN FLUIDE LOURD. Journal de Physique IV Proceedings, 1992, 02 (C1), pp.C1-487-C1-494. 10.1051/jp4:19921105 . jpa-00251059

HAL Id: jpa-00251059

<https://hal.science/jpa-00251059>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

VIBRATIONS ET RAYONNEMENT DE PLAQUES COMPLEXES EN FLUIDE LÉGER ET EN FLUIDE LOURD

J. NICOLAS et A. BERRY

*GAUS (Groupe d'Acoustique et Vibrations de l'Université de Sherbrooke), Sherbrooke (Québec)
J1K 2R1, Canada***Abstract**

Mechanical characteristics such as stiffeners, mass inhomogeneities and complex support conditions along the boundaries are known to affect the vibroacoustic behavior and are of interest for passive noise control. An analytical approach is proposed to study the vibrations and sound radiation into a light fluid or a heavy fluid, from baffled rectangular plates showing the above elements of complexity. The method is based on a variational formulation of the structural motion and a procedure of minimization over a functional subspace taking into account arbitrary boundary conditions along the plate contour. The selection of simple polynomials to generate this subspace is shown to have a number of advantages: (i) it is compatible with elastic boundary conditions (deflexion-rotation) along the contour, (ii) it allows the mass and stiffness operators of the structure to be easily calculated, (iii) it allows an analytical solution of the fluid-structure coupling, (iv) it provides a decomposition of the structure into multipoles of radiation. The case of radiation into a light fluid and the case of radiation into a heavy fluid are presented. Numerical results show the incidence on the sound radiation of the boundary conditions, addition of point mass, addition of stiffeners. Comparisons with the Boundary Element Method, and with measurements are also presented. [Work supported by the Defence Research Establishment Atlantic, Canada]

Introduction

Les méthodes modales permettent de prédire le comportement vibroacoustique de systèmes simples. Hors, les structures réelles présentent généralement des caractéristiques mécaniques complexes (forme, conditions aux limites, distribution des masses, raidisseurs); leur comportement vibroacoustique peut être traité par des méthodes numériques lourdes [1], ou peut être approché par des approches simplifiées [2]. Cette étude présente une approche analytique intermédiaire permettant de prendre en compte l'effet de conditions aux limites arbitraires, d'ajout ponctuel de masse ou de raideur, d'ajout de raidisseurs sur les vibrations et le rayonnement acoustique par une plaque mince, rectangulaire, baffle, immergée dans un fluide léger ou dans un fluide lourd, et excitée par des forces mécaniques.

On présente dans une première partie, pour le problème particulier abordé, les équations générales du comportement vibratoire (sous forme variationnelle), et du comportement acoustique. Dans une deuxième partie, la solution est développée dans le cas particulier d'un fluide léger, pour lequel la charge fluide est négligée, et des résultats numériques sont présentés. Dans une troisième partie, la solution est étendue au cas d'un fluide lourd, ce qui nécessite la prise en compte du couplage fluide-structure. Une méthode originale est proposée pour le calcul des impédances de rayonnement de la structure, qui caractérisent ce couplage; cette méthode généralise les solutions disponibles jusqu'alors et valables au seul cas d'appui simple [3,4], à la situation plus générale de conditions aux limites élastiques.

1 Equations générales du problème couplé

1.1 Position du problème

On considère un plaque mince, rectangulaire (dimensions a et b), insérée dans un baffle rigide infini séparant un milieu fluide (densité ρ_0 , vitesse du son c_0) en $z > 0$ du vide en $z < 0$ (Fig.1). Les caractéristiques mécaniques incluent N_s raidisseurs sollicités en flexion-torsion, N_m masses ponctuelles et N_k raideurs ponctuelles en des positions arbitraires; le contour est supporté de manière élastique en déflexion-rotation (Fig.2). Les indicateurs vibroacoustiques utilisés sont, pour une force mécanique appliquée (régime sinusoïdal de pulsation ω), la vitesse quadratique moyenne $\langle w^2 \rangle$ de la structure, la pression acoustique en champ lointain $p(R, \theta, \varphi)$, l'efficacité de rayonnement σ , et la puissance acoustique rayonnée dans le fluide W .

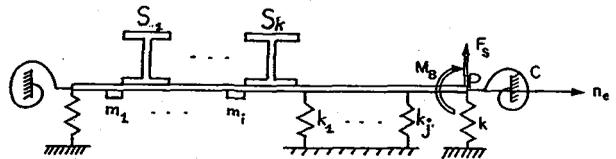
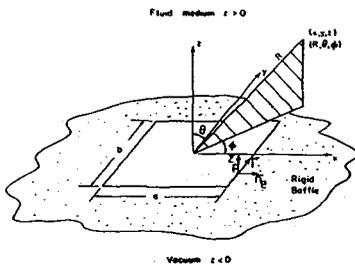


Fig.1 Géométrie du problème et systèmes de coordonnées

Fig.2 Caractéristiques mécaniques de la structure

1.2 Formulation intégrale du champ de pression acoustique

L'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz fournit la pression acoustique en un point du fluide,

$$p(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \int_{(S)} G(x, y, z / x', y', 0) w(x', y', 0) dx' dy' \tag{1}$$

où (S) est la surface de la plaque, w est le déplacement en flexion de la plaque et G est le noyau de Green du demi espace fluide avec condition de Neumann dans le plan $z=0$,

$$G(x, y, z / x', y', 0) = \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \tag{2}$$

avec $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ et $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}$

1.3 Formulation variationnelle du mouvement de la structure

La fonctionnelle de Hamilton pour la structure considérée a l'expression suivante,

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \tag{3}$$

avec

$$T = T(\text{plaque}) + \sum_{k=1}^{N_s} T_k(\text{raidisseur}) + \sum_{i=1}^{N_m} T_i(\text{masse}) \quad (4)$$

$$V = V(\text{plaque}) + \sum_{k=1}^{N_s} V_k(\text{raidisseur}) + \sum_{j=1}^{N_k} V_j(\text{raidieur}) + V(\text{contour}) \quad (5)$$

$$W = W(\text{méca}) + W(\text{acoust}) \quad (6)$$

où T , V , W sont respectivement l'énergie cinétique, l'énergie de déformation et le travail des forces appliquées ($W(\text{méca})$ est le travail des forces mécaniques et $W(\text{acoust})$ est le travail de la pression acoustique pariétale). L'ensemble des termes apparaissant dans les eq.(4)-(6) sont détaillés dans [5]. Le principe de Hamilton postule que le déplacement w de la structure rend H extrémal dans le sous-espace des fonctions de déplacement cinématiquement admissibles. L'extremum de H peut être approché à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz: on pose

$$w(x,y) = \{a_{mn}\}^T \{ \Phi_m(x) \psi_n(y) \} \quad (7)$$

où les fonctions $\phi_m(x)$ et $\psi_n(y)$ sont les fonctions-essai connues réalisant une base sur

$[-a/2, +a/2] \times [-b/2, +b/2]$ et respectant les conditions aux limites cinématiques sur le contour, et $\{a_{mn}\}$ est le vecteur des coefficients inconnus. Compte tenu des conditions aux limites élastiques en déflexion-rotation sur le contour de la plaque, un choix simple de fonctions-essai est

$$\{ \Phi_m(x) \psi_n(y) \} = \left\{ \left(\frac{2x}{a} \right)^m \left(\frac{2y}{b} \right)^n, m=0,1,\dots,N; n=0,1,\dots,N \right\} \quad (8)$$

La condition d'extremum de H conduit à l'équation du mouvement de la structure immergée,

$$(-\omega^2 [M_{mnpq}] + [K_{mnpq}]) \{a_{mn}\} = \{f_{mn}\} - j\omega [Z_{mnpq}] \{a_{mn}\} \quad (9)$$

où $[M_{mnpq}]$, $[K_{mnpq}]$ et $\{f_{mn}\}$ sont la matrice de masse, la matrice de rigidité et le vecteur des forces généralisées, projetés sur la base des fonctions-essai et $[Z_{mnpq}]$ est la matrice des impédances de rayonnement, avec

$$Z_{mnpq} = j\rho_0\omega \int_{(S)} \int_{(S)} \phi_m(x) \psi_n(y) G(x,y,0/x',y',0) \phi_p(x') \psi_q(y') dx dy dx' dy' \quad (10)$$

Les expressions de $[M_{mnpq}]$, $[K_{mnpq}]$ et $\{f_{mn}\}$ peuvent être trouvées dans [5]. Le calcul de la matrice $[Z_{mnpq}]$ constitue la principale difficulté du problème couplé; le principe de ce calcul est exposé dans la partie 3 du texte.

2 Vibrations et rayonnement en fluide léger

2.1 Réponse de la structure

L'hypothèse de fluide léger consiste à négliger le terme de charge fluide dans l'équation du mouvement (9); l'équation du mouvement se réduit alors à sa forme *in-vacuo*

$$(-\omega^2 [M_{mnpq}] + [K_{mnpq}]) (a_{mn}) = (f_{mn}) \tag{11}$$

La résolution des coefficients $\{a_{mn}\}$ peut être effectuée par une méthode de Gauss, dès lors que $[M_{mnpq}]$, $[K_{mnpq}]$ et $\{f_{mn}\}$ sont connus.

2.2 Pression acoustique en champ lointain

La pression rayonnée en champ pointain est donnée par

$$p(R, \theta, \varphi) = -\rho_0 \omega \frac{2e^{-jkR}}{2\pi r} \tilde{w}(\lambda, \mu) \tag{12}$$

où $\tilde{w}(\lambda, \mu)$ est la transformée de Fourier spatiale du déplacement de structure ($\lambda = k_0 \sin\theta \cos\varphi$, $\mu = k_0 \sin\theta \sin\varphi$), et se calcule à l'aide des relations suivantes,

$$\tilde{w}(\lambda, \mu) = \frac{a^2}{4r} \{a_{mn}\}^T \{ \tilde{g}_m(\lambda a/2) \tilde{g}_n(\mu b/2) \} \tag{13}$$

$$\tilde{g}_p(\kappa) = \int_{-1}^{+1} u^p e^{j\kappa u} du \tag{14}$$

avec la relation de récurrence

$$\tilde{g}_p(\kappa) = \frac{1}{j\kappa} [e^{j\kappa} + (-1)^{p-1} e^{-j\kappa}] - \frac{p}{j\kappa} \tilde{g}_{p-1}(\kappa) \quad p \geq 1 \tag{15}$$

$$\tilde{g}_0(\kappa) = \frac{2 \sin \kappa}{\kappa} \tag{16}$$

La puissance acoustique rayonnée dans le fluide peut être déduite en sommant l'intensité radiale en champ lointain sur un hémisphère.

2.3 Résultats numériques

On présente à la fig.3 le rayonnement dans l'air d'une plaque d'acier de dimensions 0,455m x 0,375m x 1mm, excitée en son centre par une force ponctuelle, pour différentes conditions aux limites: appuyée (S-S), encastree (C), libre (F) et guidée (G). La fig.3-a montre l'efficacité de rayonnement et la fig.3-b montre la puissance rayonnée dans l'air. L'efficacité de rayonnement s'avère plus faible dans les cas F et G que dans les cas S-S et C. Le spectre de puissance dans les cas F et G est dominé par le mode piston de la plaque, et est caractérisé par l'absence de résonances du fait du très faible rayonnement des modes de plaque libre ou guidée. Au total, le paramètre qui contrôle le rayonnement en ce qui concerne les conditions aux limites est la rigidité en déflexion des limites.

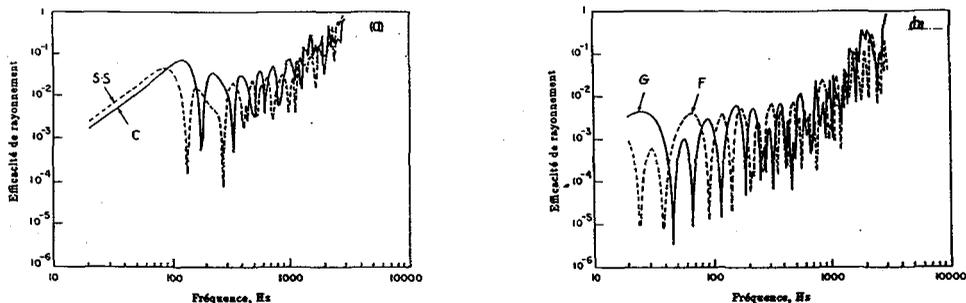


Fig.3-a Efficacité de rayonnement dans l'air d'une plaque pour différentes conditions aux limites

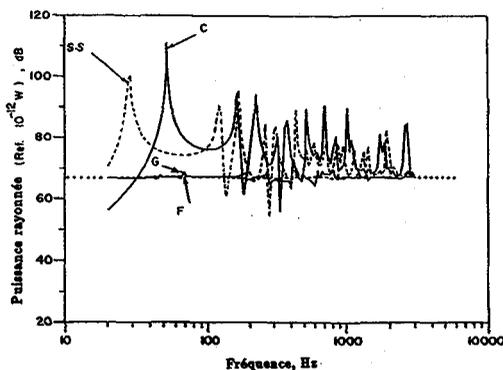


Fig.3-b Puissance rayonnée dans l'air par une plaque pour différentes conditions aux limites

On présente à la fig.4 le rayonnement dans l'air par une plaque raidie ou non raidie excitée en son centre par une force ponctuelle. Les fig.4-a, 4-b et 4-c montrent respectivement la vitesse quadratique moyenne de la plaque, l'efficacité de rayonnement et la puissance rayonnée dans l'air. La chute de niveau vibratoire après adjonction des raidisseurs est partiellement compensée par l'augmentation d'efficacité de rayonnement: le niveau de puissance rayonnée est donc diminué dans des proportions moindres que le niveau vibratoire.

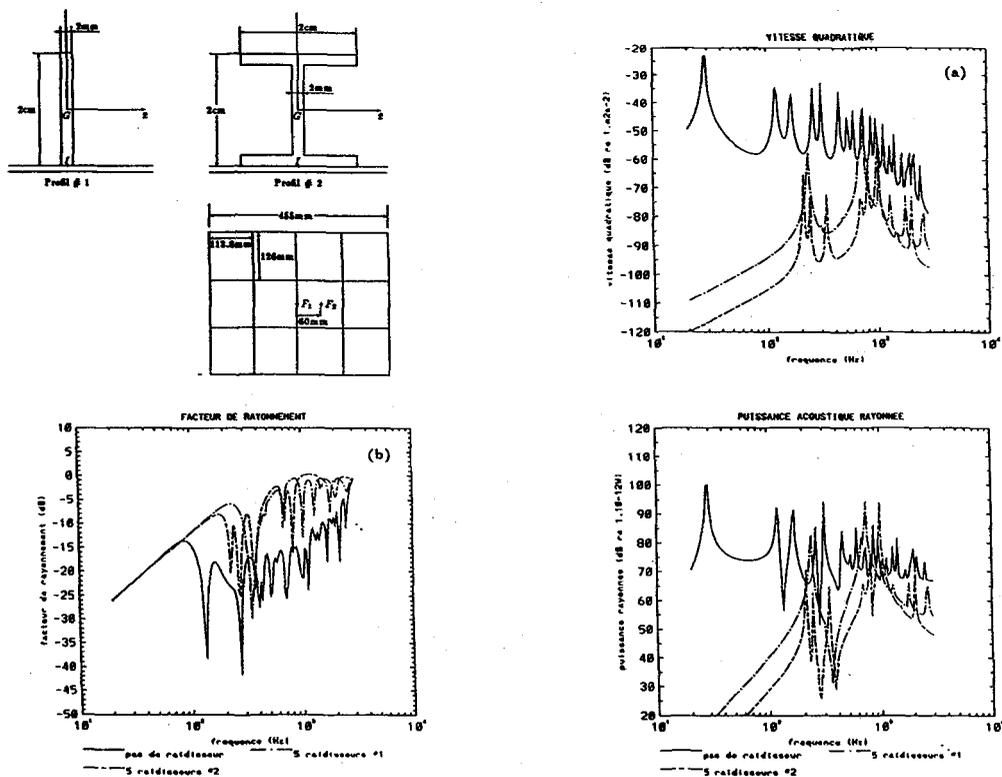


Fig.4 Rayonnement dans l'air d'une plaque raidie

3 Vibrations et rayonnement en fluide lourd

3.1 Impédance de rayonnement de la structure

La réponse de la structure en fluide lourd s'obtient comme la solution du système (9) et passe par le calcul des coefficients d'impédance de rayonnement, relation (10). En écrivant

$$Z_{mnpq} = \frac{\rho_0 \omega k_0}{2\pi} \int_{(s)} \int_{(s')} \phi_m(x) \psi_n(y) \frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r} \phi_p(x') \psi_n(y') dx dy dx' dy' \tag{17}$$

et en développant la fonction $\frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r}$ en série de Taylor (cette opération rejette la singularité sur le premier terme seulement du développement),

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r} = \frac{1}{-jk_0 r} + 1 + \frac{-jk_0 r}{2} + \dots + \frac{(-jk_0 r)^{k-1}}{k!} + \dots \tag{18}$$

on obtient finalement

$$Z_{mnpq} = \frac{\rho_0 \omega k_0}{2\pi} \frac{a^4}{16r_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} J_{mnpq}^{(k)} + j(-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k-1}}{(2k)!} I_{mnpq}^{(k)} \right] \tag{19}$$

avec

$$r_0 = \frac{a}{b} \tag{20}$$

$$I_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n \left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r_0^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{k-1/2} \alpha^p \beta^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \tag{21}$$

$$J_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n \left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r_0^2} (\beta - \beta')^2 \right]^k \alpha^p \beta^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \tag{22}$$

Les remarques suivantes peuvent être faites:

□ L'équation (19) permet de séparer explicitement l'amortissement par rayonnement (partie réelle de Z_{mnpq} , ou résistance de rayonnement), de la masse ajoutée par le fluide (partie imaginaire de Z_{mnpq} , ou réactance de rayonnement).

□ Les coefficients résistifs $J_{mnpq}^{(k)}$ et les coefficients réactifs $I_{mnpq}^{(k)}$ peuvent être calculés analytiquement. L'intégration des $J_{mnpq}^{(k)}$ ne pose pas de difficulté puisque les fonctions à intégrer sont des polynômes; l'intégration des $I_{mnpq}^{(k)}$ est plus délicate mais peut être effectuée en suivant un schéma de récurrence sur l'ensemble des cinq indices m, n, p, q, k [5].

□ Le nombre de coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ à calculer en pratique est fortement réduit compte tenu des propriétés de symétrie:

$$I_{mnpq}^{(k)} = 0 \text{ lorsque } (m+p) \text{ est impair ou } (n+q) \text{ est impair}$$

$$I_{mnpq}^{(k)} = I_{pnmq}^{(k)} = I_{mqpn}^{(k)} = I_{pqmn}^{(k)}$$

Les mêmes relations s'appliquent aux coefficients $J_{mnpq}^{(k)}$.

□ Les coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ et $J_{mnpq}^{(k)}$ sont indépendants de la fréquence et représentent un couplage spatial pur des différentes fonctions-essai. Ces coefficients peuvent donc être "pré-calculés", indépendamment de la fréquence, des conditions aux limites et des éléments mécaniques ajoutés sur la structure, ce qui autorise des gains en temps-calcul importants.

3.2 Convergence de la méthode

La fig.5 représente l'impédance de rayonnement (partie réelle et partie imaginaire) dans le cas particulier simple d'un piston rectangulaire (dimensions 0,455m x 0,375m) rayonnant dans l'air. Les différentes courbes ont été obtenues pour des ordres croissants de développement de G dans l'équation (19), $k=0,3,6,8$, et les résultats obtenus ont été comparés avec les valeurs tabulées de BURNETT et SOROKA [6]. L'accord est concluant en basses fréquences et s'améliore en hautes fréquences si les termes d'ordre supérieur sont pris en compte. On constate que, pour $k=6$, la solution exacte est correctement reconstruite jusqu'à la fréquence critique du piston.

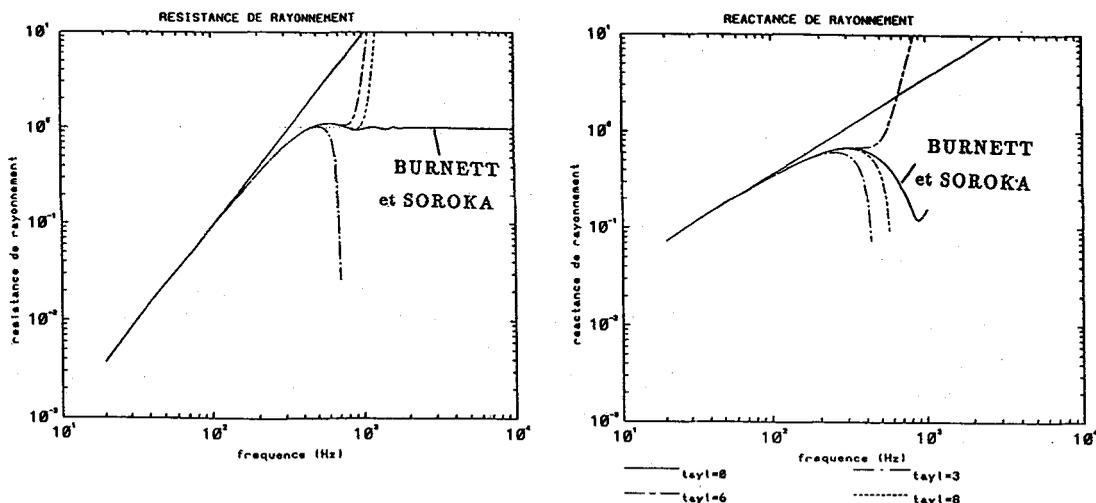


Fig.5 Impédance de rayonnement d'un piston rectangulaire

La fig.6 représente la puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire en acier 0,455m x 0,375m x 1mm, excitée en son centre par une force ponctuelle. La puissance acoustique rayonnée a été calculée soit à partir de l'information de champ lointain en sommant la pression en champ lointain calculée selon les relations (12)-(16), soit à partir de l'information de champ pariétal, selon la relation

$$W = \frac{\rho_0 c_0 \omega^2 a^2}{16\pi r_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a / r_0)^{2(k+1)}}{(2k+1)!} \{a_{mn}\}^T [J_{mnpq}^{(k)}] \{a_{pq}^*\} \quad (23)$$

et en tronquant la série aux ordres $k=0,2,4$. Il est à noter que la relation (23) n'est autre qu'une décomposition de la puissance rayonnée en contributions monopolaire

($k=0$), dipolaire ($k=1$), ... 2^l -upolaire ($k=l$). Les deux méthodes de calcul conduisent à des valeurs numériques de la puissance très proches; la convergence s'améliore lorsque l'ordre du développement de G augmente. Il est à noter qu'un nombre restreint de termes dans le développement (multipôles de rayonnement) suffit à caractériser le rayonnement de la structure sur une gamme de fréquences étendue. Un critère précis de convergence n'a pu être encore établi.

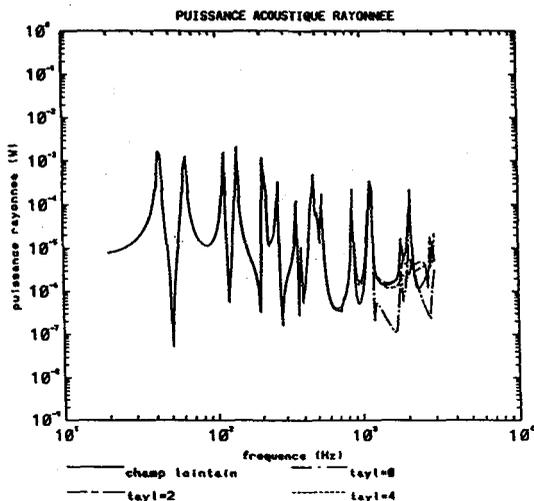


Fig.6 Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire

4 Conclusions

On a présenté une méthode de calcul pour le rayonnement dans l'air ou dans l'eau par des plaques finies complexes. Cette approche permet d'appréhender l'effet de modifications mécanique de la structure en vue de minimiser la puissance rayonnée, tout en conservant les avantages d'une solution analytique (précision et temps de calcul raisonnables).

Références

- [1] M.A. Hamdi, in "Rayonnement Acoustique des Structures", pp 305-406, Collection Département Etudes et Recherches EDF, Eyrolles, 1988.
- [2] H.W. Mueller, W. Langer, H.P. Richter, and R. Storm, "Praxisreport Maschinenakustik", rapport technique, Technische Hochschule Darmstadt, 1982.
- [3] H.G. Davies, "Low frequency random excitation of water-loaded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 15(1):107-126, 1971.
- [4] L.D. Pope and R.C. Leibowitz, " Intermodal coupling coefficients for a fluid-loaded rectangular plate", *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(2):408-415, 1974.
- [5] A. Berry, "Vibrations et Rayonnement Acoustique de Structures planes complexes immergées dans un Fluide léger ou dans un Fluide lourd", thèse de PhD, Université de Sherbrooke, 1991.
- [6] D.S. Burnett and W.W. Soroka, "Tables of rectangular piston radiation impedance functions, with applications to sound transmission through deep apertures", *J. Acoust. Soc. Am.*, 51:1618-1623, 1969