

Méthodes de type éléments finis pour le calcul des champs électriques et magnétiques en électroencéphalographie et magnétoencéphalographie (*)

Christophe Guérin ^(1,**), Gildas Marin ⁽²⁾, Line Garnero ⁽²⁾
et Gérard Meunier ⁽³⁾

⁽¹⁾ CEDRAT-RECHERCHE, 10 chemin de Pré Carré, ZIRST, 38 246 Meylan Cedex, France

⁽²⁾ Unité de Psychophysiologie Cognitive, Hôpital de la Salpêtrière ^(**), LENA,
Université Paris VI, Paris, France et Institut d'Optique Théorique et Appliquée ^(****),
Université Paris XI, Orsay, France

⁽³⁾ Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble (LEG) ^(*****), BP 46,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France

(Reçu le 20 mars 1997, révisé le 19 août 1997, accepté le 8 septembre 1997)

PACS.02.70.Dh – Finite-element and Galerkin methods

PACS.87.59 -e – Medical imaging

Résumé. — Afin de calculer le potentiel électrique et l'induction créés par l'activité électrique du cerveau, nous avons développé des méthodes utilisant la Méthode des Éléments Finis. Ces méthodes, qui peuvent s'appliquer à des modèles réalistes de tête et qui permettent de tenir compte de la conductivité anisotrope de certains tissus comme l'os, sont présentées. Puis deux exemples numériques sont décrits : un modèle de sphères concentriques et un modèle réaliste de tête.

Abstract. — So as to compute the electric potential and the flux density generated by the electrical activity of the brain, numerical methods based on the Finite Element Method have been developed. These methods, which can treat realistic head models and can take into account anisotropy of conductivity, for instance in the skull, are presented. Then two numerical examples are described: a spherical model and a realistic head model.

(*) Le contenu de cet article a été présenté à NUMELEC 97. Les travaux ont été effectués dans le cadre d'une collaboration entre l'Unité de Psychophysiologie Cognitive, l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée et le Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble.

(**) Auteur auquel doit être adressée la correspondance
(e-mail : Christophe.Guerin@cedrat-grenoble.fr)

(***) CNRS URA 654

(****) CNRS URA 14

(*****) UMR 5529 ENSIEG/INPG/UJF CNRS

1. Introduction

L'imagerie électrique et magnétique du cerveau possède deux composantes : la magnétoencéphalographie (MEG) qui consiste à mesurer le champ magnétique sur la surface de la boîte crânienne et l'électroencéphalographie (EEG) qui consiste à mesurer le potentiel électrique en plaçant des électrodes sur le scalp. Le champ magnétique et le potentiel permettent de localiser les zones d'activation du cerveau par des méthodes de reconstruction. La précision de ce problème inverse est conditionnée par la précision du problème direct. La reconstruction peut être faite en EEG seule, c'est-à-dire d'après les données électriques (potentiel électrique), ou en MEG seule, c'est-à-dire d'après les données magnétiques (champ magnétique). La localisation des dipôles est beaucoup plus précise en MEG, alors qu'en EEG les résultats sont plus diffus et beaucoup plus sensibles à la géométrie et à la conductivité. Par contre, les sources radiales ne sont pas vues en MEG. Ainsi, l'utilisation conjointe de ces deux méthodes est souhaitable pour faciliter la reconstruction, par fusion des informations électriques d'une part et des informations magnétiques d'autre part [1]. Les machines de MEG actuelles permettent d'obtenir les deux types d'information.

Dans cet article nous nous intéressons à la résolution du problème direct, qui est en fait un problème de conduction électrique.

Les sources de courant sont décrites par des dipôles de courant qui expriment l'activité de groupes de neurones, en fait des colonnes de neurones, qui forment la région corticale et qui sont perpendiculaires à sa surface. La boîte crânienne, d'une grande complexité est formée de différents tissus : de l'extérieur vers l'intérieur, elle comprend la peau, l'os, une couche protectrice qui comprend la dure-mère, le liquide céphalo-rachidien, le cerveau formé de la matière grise, c'est-à-dire le cortex, de la matière blanche et de structures profondes. Certains tissus comme l'os et la matière blanche ont une conductivité anisotrope.

Les méthodes les plus utilisées pour résoudre le problème direct sont les méthodes analytiques [2], qui s'appuient sur des modèles de sphères emboîtées à trois ou quatre couches et la Méthode des Intégrales de Frontière (MIF). La Méthode des Différences Finies et la Méthode des Éléments Finis (MEF) [3,4] commencent à être employées. Les méthodes analytiques sont applicables à des géométries de forme simple et la MIF nécessite que les propriétés physiques des différents tissus soient homogènes isotropes. La MEF permet de tenir compte de formes géométriques complexes et de propriétés physiques anisotropes. Certains auteurs comme M. Thevenet [3,4] ont déjà utilisé de telles méthodes en potentiel scalaire réduit, uniquement en EEG. M. Thevenet a fait une étude systématique pour valider l'utilisation d'une telle méthode sur un modèle de sphères emboîtées. Il a aussi étudié l'influence de l'anisotropie de l'os et des trous des yeux, mais toujours sur le modèle sphérique. Afin de poursuivre son étude, nous avons développé des méthodes semblables, inspirées de celles décrites dans [4], qui utilisent la MEF, pour traiter des modèles à géométrie vraiment réaliste de tête et pour étudier l'influence de l'anisotropie de l'os. Ces méthodes, qui permettent de calculer le potentiel électrique, sont des formulations où les sources sont des dipôles de courant. Par rapport à celles décrites dans [3,4], où seul un potentiel réduit était employé, l'utilisation du potentiel total, associé au potentiel réduit, permet d'augmenter la précision du calcul du potentiel, comme nous allons le voir dans la partie suivante. Nous avons aussi mis en oeuvre des méthodes qui permettent de calculer le champ magnétique, ce qui, à la connaissance des auteurs, n'a jamais été fait avec une méthode de type éléments finis, ni sur un modèle réaliste de tête. Ces deux types de méthodes ont été validés sur un modèle de sphères concentriques et appliqués à un modèle réaliste de tête, en supposant la conductivité de l'os isotrope puis anisotrope. Seuls des résultats pour une conductivité isotrope sont présentés ici.

Le potentiel scalaire électrique est calculé en résolvant un problème de conduction électrique

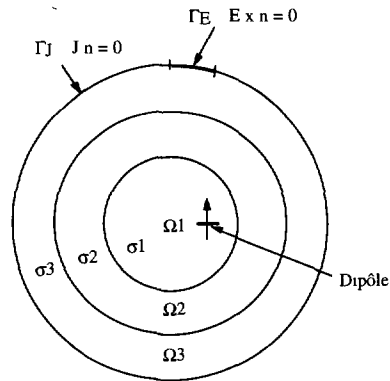


Fig. 1. — Problème électrocinétique à 3 couches.

[Conduction problem with 3 layers]

dans le volume de la tête, en utilisant la MEF, connaissant les dipôles de courant dans la tête, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire. Après résolution de ce système, le potentiel scalaire est connu en tous les noeuds du maillage, et permet de calculer la densité de courant $\mathbf{J}$ dans la tête. L'induction magnétique en certains points à l'extérieur de la tête est alors calculée en post-traitement, par la loi de Biot et Savart, en faisant une intégration de la densité de courant $\mathbf{J}$ sur tout le volume de la tête.

Cet article décrit plus particulièrement ces méthodes qui ont été implantées dans le logiciel FLUX3D, développé au Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble.

Dans une première partie, les méthodes sont présentées, puis, dans une deuxième partie, les deux exemples numériques sont décrits : un modèle de sphères concentriques et un modèle réaliste de tête.

2. Méthodes numériques

Nous considérons la boîte crânienne Ω , formée des régions emboîtées $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ respectivement de conductivités $\sigma_1, [\sigma_2], \dots [\sigma_i], \dots$. La région dans laquelle sont situés les dipôles est la région Ω_1 qui est supposée de conductivité isotrope σ_1 .

Pour notre modèle, nous avons trois régions qui sont de l'intérieur vers l'extérieur : Ω_1 , le cerveau, Ω_2 , l'os et Ω_3 , la peau, avec $\sigma_2 = \sigma_1 / 80$ et $\sigma_3 = \sigma_1$ (cf. Fig. 1).

Dans un premier temps, le potentiel scalaire électrique est obtenu en résolvant un problème électrocinétique dans le volume de la tête Ω par la MEF. Dans un deuxième temps, l'induction magnétique due aux courants dans le milieu conducteur Ω , qui est amagnétique, est obtenue par la loi de Biot et Savart.

2.1. CALCUL DU POTENTIEL SCALAIRE ÉLECTRIQUE. — Pour calculer la répartition du potentiel scalaire électrique V dans la tête, la densité de courant totale $\mathbf{J}$ doit être écrite comme la somme des courants $\mathbf{J}_i$ imposés par les dipôles et des courants de conduction $\mathbf{J}_c$ qui se propagent dans les tissus conducteurs :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_c = \mathbf{J}_i + [\sigma]\mathbf{E} = \mathbf{J}_i - [\sigma]\nabla V. \quad (1)$$

Pour un dipôle de moment $\mathbf{Q}$ situé au point $\mathbf{r}_0$, le courant $\mathbf{J}_1$ est non nul uniquement aux points des dipôles et s'écrit :

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{Q}\delta_{\mathbf{r}_0} \quad (2)$$

où δ est une distribution de Dirac.

L'équation de conservation de la densité de courant, associée aux conditions aux limites sur les frontières Γ_J où $\mathbf{J}_n = 0$ et sur les frontières Γ_E où $\mathbf{E}_t = 0$, est résolue :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3)$$

Le problème en termes de potentiel V à résoudre est donc l'équation :

$$\nabla \cdot ([\sigma]\nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}_1 \quad (4)$$

avec les conditions aux limites sur Γ_J et Γ_E .

Les opérateurs $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ et ∇ étant pris au sens des distributions, l'équation (3) contient les conditions de passage entre deux milieux différents Ω_i et Ω_j : $\mathbf{J}_{n_i} = \mathbf{J}_{n_j}$ et $\mathbf{E}_{t_i} = \mathbf{E}_{t_j}$.

Une singularité apparaît au point de chaque dipôle de courant, où le potentiel V devient infini et peut causer des problèmes numériques. Pour éviter cela, et tenir compte des sources dipolaires, un moyen couramment employé est de décomposer le potentiel V en deux potentiels tel que :

$$V = U + V_s. \quad (5)$$

V_s appelée "solution singulière" est le potentiel créé par les dipôles dans l'espace entier considéré comme un milieu homogène isotrope de conductivité σ_1 . Cette solution peut être calculée analytiquement. U est appelée "solution régulière" et ses valeurs restent finies en tout point de la boîte crânienne Ω . Soit $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$, l'espace entier.

La densité de courant $\mathbf{J}_c$ se décompose en deux termes :

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_U + \mathbf{J}_s \quad (6)$$

où

$$\mathbf{J}_U = -[\sigma]\nabla U \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_s = -[\sigma]\nabla V_s. \quad (8)$$

Dans $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$, pour un dipôle de moment $\mathbf{Q}$ situé au point $\mathbf{r}_0$, les valeurs du potentiel électrique V_s et du champ électrique $\mathbf{E}_s$ au point $\mathbf{r}_0$ sont calculées à l'aide des formules classiques [5] :

$$V_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = -\nabla V_s = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{3(\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \mathbf{Q}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5}. \quad (10)$$

Le potentiel U est calculé grâce à la MEF. Pour cela, la méthode de Galerkin est appliquée à (3) :

$$\int_{\Omega} w \nabla \cdot \mathbf{J} d\Omega = 0 \quad (11)$$

où w est la fonction de pondération associée à la variable U .

La "méthode en potentiel scalaire réduit" présentée ici, qui permet de calculer des potentiels scalaires électriques pour des problèmes de conduction électrique, est analogue à celles pour des problèmes de magnétostatique, où un potentiel scalaire magnétique est calculé.

Pour obtenir la formulation intégrale du problème électrocinétique, nous suivrons la même démarche que dans [6, 7] et dans l'Annexe 1 de [8]. La formule de Green, décrite dans [7], est appliquée à l'équation (11) qui devient :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{J} d\Omega - \int_{\Gamma} w \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (12)$$

où Γ est la frontière externe de Ω , de normale $\mathbf{n}$.

Le deuxième terme de (12) est nul sur les frontières Γ_E à champ électrique tangentiel nul ($\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$) où w est considérée nulle et sur les frontières Γ_J à densité de courant normale nulle ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$). L'équation (12), qui contient les conditions aux limites et les conditions de passage, devient donc :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{J} d\Omega = 0. \quad (13)$$

Les expressions (1), (6), (7) et (8) des courants $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_c$, $\mathbf{J}_U$ et $\mathbf{J}_s$ sont introduites dans (13) :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot [\sigma] \nabla U d\Omega = \int_{\Omega} \nabla w \cdot (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_s) d\Omega. \quad (14)$$

Le terme du membre de droite de (14) est une intégrale volumique. Pour les régions Ω_i ayant une conductivité isotrope, et en particulier dans la région Ω_1 contenant les dipôles, ce terme est transformé en des intégrales surfaciques sur la surface de ces régions, grâce à une nouvelle application de la formule de Green pour chaque région Ω_i isotrope. Le deuxième terme de (14) devient donc pour une région Ω_i isotrope :

$$- \int_{\Omega_i} w \nabla \cdot (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_s) d\Omega + \int_{\Gamma_i} w (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma \quad (15)$$

où $\mathbf{n}_i$ est la normale sortante de la région Ω_i isotrope.

Dans la région Ω_1 , $\nabla \cdot (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_s) = 0$ puisque $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_s$ est le courant total créé dans un milieu homogène isotrope infini. Il en est de même dans les autres régions, donc le premier terme de (15) disparaît.

En supposant que les dipôles ne peuvent pas se trouver sur la frontière Γ_1 , l'équation (14) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot [\sigma] \nabla U d\Omega = \int_{\Omega_{\text{aniso}}} \nabla w \cdot [\sigma] \mathbf{E}_s d\Omega + \sum_{i \in E_{\text{iso}}} \int_{\Gamma_i} w [\sigma] \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma_i. \quad (16)$$

Ω_{aniso} est l'ensemble des régions ayant une conductivité anisotrope, Γ_i est la frontière d'une région Ω_i ayant une conductivité isotrope, l'indice i décrivant l'ensemble E_{iso} des indices des régions Ω_i isotropes dans la relation (16). Il faut remarquer que dans cette relation où les opérateurs sont pris au sens des fonctions, le courant $\mathbf{J}_1$ n'intervient plus.

En pratique, la surface Γ_E où $\mathbf{E}_t = 0$, est réduite à un point, un noeud du maillage où une condition de Dirichlet nulle sur le potentiel U est imposée.

Comme la conductivité de l'os est faible par rapport à celle de la peau et du cerveau, cette région fait écran au potentiel V qui est donc faible dans la peau. Les imprécisions numériques dans cette dernière région peuvent donc être importantes, car U et V_s sont des grands nombres dont la somme est faible. Dans cette région, il est préférable d'utiliser une méthode en "potentiel scalaire total", analogue à celles pour des problèmes de magnétostatique [6, 8]. Dans ce cas, le potentiel total V est calculé directement. L'équation à résoudre dans l'ensemble des régions Ω_V où ce potentiel V est utilisé est l'équation (13) où le courant total $\mathbf{J}$ dérive du potentiel V ($\mathbf{J} = -\sigma \nabla V$) :

$$\int_{\Omega_V} \nabla w \cdot [\sigma] \nabla V d\Omega_v = 0. \quad (17)$$

Le couplage entre régions Ω_U décrites en potentiel scalaire réduit et régions Ω_V décrites en potentiel scalaire total se fait avec la relation (5). La région Ω_1 qui contient les dipôles est forcément décrite en potentiel scalaire réduit.

Pour trouver le système à résoudre, les potentiels sont interpolés aux noeuds du maillage par :

$$U = \sum_{i=1}^N w_i U_i \quad (18)$$

$$V = \sum_{i=1}^N w_i V_i \quad (19)$$

où U_i et V_i sont les valeurs de U , respectivement V , au noeud i du maillage.

Les équations (16) et (17) conduisent à un système linéaire où les inconnues sont U_i et V_i :

$$\sum_{i=1}^{N_U} R_{ij} U_i = S_j \quad \text{pour } j \in [1, N_U] \quad (20)$$

$$\sum_{i=N_U+1}^{N_U+N_V} R_{ij} V_i = 0 \quad \text{pour } j \in [N_U, N_U + N_V] \quad (21)$$

où N_U et N_V sont, respectivement, le nombre de noeuds des régions décrites en potentiel réduit et le nombre de noeuds des régions décrites en potentiel scalaire total.

$$R_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot [\sigma] \nabla w_j \, d\Omega \quad (22)$$

$$S_j = \int_{\Omega_{\text{aniso}}} \nabla w_j \cdot [\sigma] \mathbf{E}_s \, d\Omega + \sum_{i \in E_{\text{iso}}} \int_{\Gamma_i} w_j [\sigma] \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{n}_i \, d\Gamma_i \quad (23)$$

Le système final est obtenu après avoir éliminé, par un algorithme, les inconnues V_i sur les interfaces entre régions décrites en potentiel scalaire réduit et régions décrites en potentiel scalaire total, à l'aide des relations $V_i = U_i + V_{iS}$, où V_{iS} est la valeur de V_S au noeud i du maillage. La matrice du système obtenu est symétrique définie positive et très creuse.

Dans [3] et [4] M. Thevenet utilise une méthode en potentiel scalaire réduit analogue à celle décrite ci-dessus, où les termes source (23) sont différents. L'introduction du potentiel scalaire total dans notre méthode permet d'accroître la précision du calcul sur le potentiel V .

2.2. CALCUL DE L'INDUCTION MAGNÉTIQUE. — Connaissant le potentiel V dans la boîte crânienne Ω , qui a pour perméabilité μ_0 , l'induction peut être obtenue en un point $\mathbf{r}$ à l'intérieur ou à l'extérieur de la tête, par la loi de Biot et Savart :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, d\Omega. \quad (24)$$

L'intégration dans la région Ω_1 où sont situés les dipôles, en particulier dans les éléments qui les contiennent et dans les éléments voisins, est peu précise, car la densité de courant $\mathbf{J}$ est infinie aux points des dipôles. Nous avons donc calculé séparément l'induction due à $\mathbf{J}_s$ et celle due à $\mathbf{J}_U$. La densité de courant $\mathbf{J}_U$ reste finie, ainsi, l'induction qui en dérive peut être calculée par intégration sur les volumes des régions. L'induction due à $\mathbf{J}_s$ est calculée par intégration sur la surface de la région Ω_1 et en utilisant l'expression de l'induction créée par un dipôle de courant dans un milieu homogène infini.

2.2.1. Induction créée par un milieu homogène infini — L'expression de l'induction créée par un dipôle de courant de moment $\mathbf{Q}$, dans l'espace $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$ considéré comme un milieu homogène isotrope, de conductivité σ_1 , s'écrit d'après [5] :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (25)$$

2.2.2. Induction créée par un milieu homogène de dimensions finies. — Nous considérons ici que le milieu Ω est borné et formé d'une seule région Ω_1 de conductivité σ_1 . Dans cette région, le courant total $\mathbf{J}$ est la somme des trois courants $\mathbf{J}_U$, $\mathbf{J}_s$ et $\mathbf{J}_1$, qui sont définis, respectivement, par les relations (7), (8) et (1).

La contribution à l'induction du courant $\mathbf{J}_U$ et celle du courant $\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_1$ sont calculées séparément. Nous posons donc :

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_1. \quad (26)$$

L'induction en un point $\mathbf{r}$ s'écrit donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \mathbf{J}_U(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega. \quad (27)$$

Le premier terme de (27) sera calculé par intégration par la méthode de Gauss sur chaque élément fini de la région conductrice Ω_1 . Soit $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$, le deuxième terme de (27). Il va être transformé pour faire apparaître, d'une part, l'expression (25) de l'induction créée dans l'espace entier $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$ considéré comme un milieu homogène isotrope, d'autre part, des termes surfaciques. Soit Ω_x la région infinie extérieure à la région de la tête, telle que $\Omega_0 = \mathbb{R}^3 = \Omega_x \cup \Omega_1$.

Le terme $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ s'écrit :

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_x = \Omega_0} \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_x} \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_x. \quad (28)$$

Le premier terme de $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ est l'expression de l'induction créée dans l'espace entier $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$ considéré comme un milieu homogène isotrope (25). Le deuxième terme de $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ est transformé en utilisant l'identité

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') \quad (29)$$

et :

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (30)$$

où ∇' et $\nabla' \times$ sont les opérateurs gradient pour lesquels les dérivées sont faites par rapport à $\mathbf{r}'$. Il vient donc :

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \times \mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (31)$$

Le second terme de $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ devient, avec cette identité :

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_x} \frac{\nabla' \times \mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_x} \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Omega. \quad (32)$$

Comme,

$$\nabla' \times \mathbf{J}_a = \nabla' \times \mathbf{J}_1 - \sigma_1 \nabla' \times \nabla' V_S = \nabla' \times \mathbf{J}_1 \quad (33)$$

le premier terme de (32) n'est que fonction de $\nabla' \times \mathbf{J}_1$. Il est nul parce que la densité de courant $\mathbf{J}_1$ est nul sauf au point du dipôle qui n'est pas localisé dans la région Ω_x . Le théorème de Stokes est appliqué au second terme de (32) qui devient :

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_x} \frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{r}') \times d\Gamma_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (34)$$

Γ_1 et Γ_x sont les frontières, respectivement, de Ω_1 et de Ω_x , qui sont en fait confondues, et $d\Gamma_1$ et $d\Gamma_x$ sont les vecteurs éléments de surface de ces frontières orientées vers l'extérieur des régions, respectivement, Ω_1 et Ω_x , ainsi : $d\Gamma_1 = -d\Gamma_x$.

Le courant $\mathbf{J}_a$ peut être remplacé par le courant $\mathbf{J}_s$ dans le terme ci-dessus, en supposant que les dipôles ne peuvent pas se trouver sur la frontière Γ_1 . L'induction totale due au dipôle est donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \mathbf{J}_U(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times d\Gamma_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (35)$$

2.2.3. Induction créée par un milieu non homogène borné. — Nous considérons ici que la tête Ω est formée de la région Ω_1 précédente entourée d'une région Ω_2 qui ne comporte pas de dipôle. La région Ω_1 est forcément décrite en potentiel scalaire réduit U et Ω_2 peut être décrite en potentiel scalaire total V , ou en potentiel scalaire réduit U , et comporte une conductivité isotrope ou anisotrope.

Le raisonnement décrit dans la partie 2.2.2., qui est valable pour un milieu conducteur homogène isotrope, n'est pas valable si la conductivité de la région Ω_2 est anisotrope.

L'induction est alors calculée par la somme d'une intégrale sur la région Ω_1 et d'une intégrale sur la région Ω_2 .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_2 \quad (36)$$

La contribution à l'induction de la région Ω_2 sera calculée par une intégration volumique sur cette région. La contribution à l'induction de la région Ω_1 sera calculée comme dans le paragraphe 2.2.2., par la relation (35). L'expression de l'induction s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \mathbf{J}_U(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times d\Gamma_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega_2 + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \end{aligned} \quad (37)$$

Si la région Ω_2 est décrite en potentiel scalaire total V , le courant $\mathbf{J}$ du troisième terme de (37) s'écrit :

$$\mathbf{J} = -[\sigma] \nabla V. \quad (38)$$

Si elle est en potentiel scalaire réduit U , le courant $\mathbf{J}$ s'écrit suivant les relations (6), (7), (8) et (10), c'est-à-dire :

$$\mathbf{J} = -[\sigma] \nabla U + [\sigma] \mathbf{E}_s \quad (39)$$

Si la région Ω_2 , qui ne comporte pas de dipôle, est à conductivité isotrope, la troisième intégrale de (37) peut être remplacée par une intégrale de surface, par un raisonnement analogue à celui de la partie précédente 2.2.2. :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times d\Gamma_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (40)$$

La méthode présentée ci-dessus pour calculer l'induction de façon précise est généralisable sans difficulté à plusieurs dipôles et à plus de deux régions.

Ainsi, la contribution à l'induction des régions isotropes, autres que la région Ω_1 contenant les dipôles, doit être traitée par une intégration du courant $\mathbf{J}$ sur les frontières des régions, avec le terme (40), et la contribution des régions anisotropes doit être traitée par une intégration de $\mathbf{J}$ dans les volumes. Cette solution n'a pas encore été implantée par les auteurs. La solution implantée et testée est la suivante : la contribution à l'induction des régions décrites en potentiel scalaire réduit qui ont une conductivité isotrope est calculée par une intégration de $\mathbf{J}_U$ dans les volumes ainsi qu'une intégration de $\mathbf{J}_s$ sur leurs surfaces, et celle des autres régions par une intégration de $\mathbf{J}$ dans les volumes.

3. Exemples Numériques

Nous avons implanté dans le logiciel FLUX3D les méthodes présentées ci-dessus, et nous les avons validées sur un modèle de sphères concentriques à trois couches. Puis ces méthodes ont été appliquées à un modèle réaliste de tête. Ces modèles comportent trois tissus différents : le cerveau, l'os et la peau. L'os est la seule région où la conductivité peut être anisotrope. Dans ce cas, la conductivité radiale est 10 fois plus faible que la valeur tangentielle. Les valeurs des conductivités qui ont été prises pour les calculs sont de 0,33 S/m pour la peau et le cerveau, et $4,125 \times 10^{-3}$ S/m pour la valeur tangentielle de l'os. Ces conductivités ont été mesurées par certains auteurs cités dans [4]. La valeur du moment du dipôle qui a été prise pour les calculs est de 1 Am.

Les géométries et les maillages des modèles ont été obtenus sur le logiciel IDEAS de SDRC version VI.

Deux configurations pour les formulations des trois régions ont été utilisées :

- 1^{er} cas : formulation en potentiel scalaire réduit dans toutes les régions,
- 2^{ème} cas : formulation en potentiel scalaire réduit dans le cerveau et l'os et formulation en potentiel scalaire total dans la peau.

Seuls des résultats correspondant au 2^{ème} cas et pour une conductivité isotrope de la région de l'os sont présentés ci-après. Le traitement des régions anisotropes ne présente pas de difficulté supplémentaire et les résultats obtenus sur des modèles où la conductivité dans l'os est anisotrope, seront publiés dans un prochain article.

3.1. MODÈLE DE SPHÈRES CONCENTRIQUES. — Les trois couches du modèle de sphères ont pour rayons 10 cm pour la peau, 9,2 cm pour l'os et 8,7 cm pour le cerveau. Un dipôle, orienté suivant l'axe Oz est situé aux coordonnées $x = 3$ cm, $y = z = 0$ cm, l'origine O étant le centre de la sphère. Le maillage comporte 41 368 éléments tétraédriques du 2^{ème} ordre, qui ont une taille moyenne de 10 mm (cf. Fig. 2).

Des valeurs de potentiel électrique et d'induction magnétique ont été calculées dans le logiciel FLUX3D à l'aide des méthodes de type MEF présentées dans la partie 2, et comparées aux valeurs données par la solution analytique de ce modèle. Les valeurs analytiques ont été calculées grâce aux formules données dans [2]. Les écarts entre valeurs obtenues par les deux types de méthodes ont été calculés par la formule suivante (avec des notations implicites) .

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{val}_2 - \text{val}_1}{(\text{val}_1 + \text{val}_2)/2} \right|. \quad (41)$$

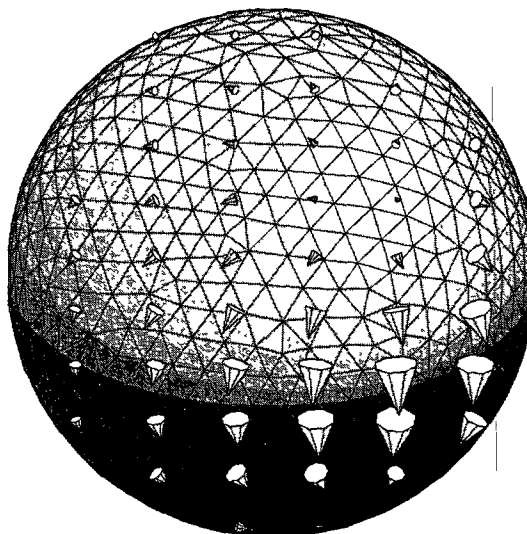


Fig. 2. — Dégradés de couleur représentant les valeurs du potentiel électrique V , cônes représentant les vecteurs densité de courant J sur la surface de la sphère. Le maillage surfacique est aussi tracé.

[Shaded off colours representing the values of the electric potential V , cones representing the vectors of the current density J on the surface of the sphere. The surface mesh is also drawn.]

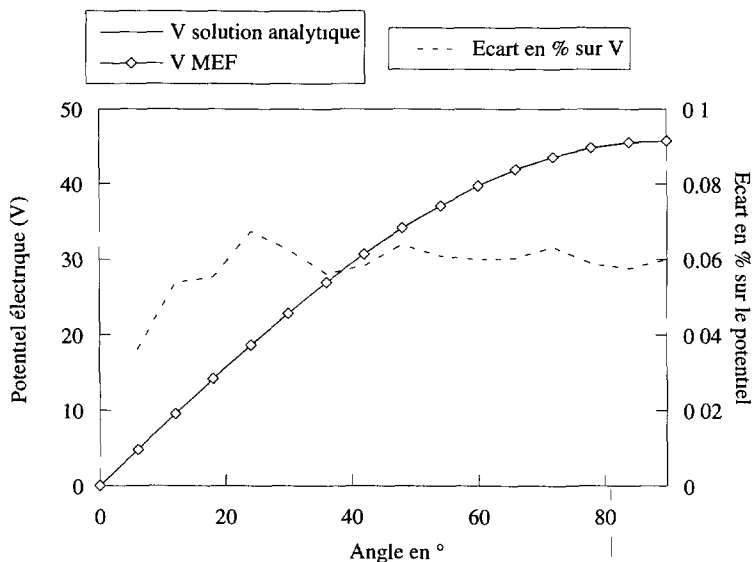


Fig. 3. — Potentiel électrique calculé avec la méthode de type MEF, présentée dans le paragraphe 2.1, et avec la solution analytique, et écart en % entre les deux méthodes, suivant un quart de cercle proche de la surface de la sphère. Les faibles écarts montrent une bonne adéquation entre les deux méthodes, ce qui valide la méthode de type MEF.

[Electric potential computed with the MEF type method presented in section 2.1. and the analytical method, and difference in % between the two methods. As the difference is small, the two methods are in good agreement, so that the MEF type method is validated.]

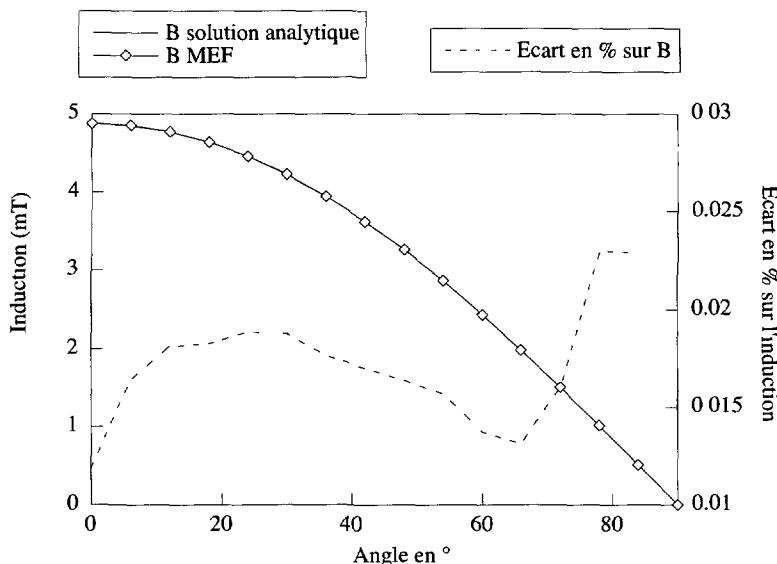


Fig 4. — Composante radiale de l'induction magnétique calculée avec la méthode de type MEF, présentée dans le paragraphe 2 et avec la solution analytique, et écart en % entre les deux méthodes, suivant un quart de cercle proche de la surface de la sphère. Les faibles écarts montrent une bonne adéquation entre les deux méthodes, ce qui valide la méthode de type MEF.

[Magnetic flux density computed with the MEF type method presented in section 2. and the analytical method, and difference in % between the two methods. As the difference is small, the two methods are in good agreement, so that the MEF type method is validated.]

Sur la figure 3 sont tracées des courbes donnant les valeurs du potentiel et les écarts. Les points de calcul sont situés sur un quart de cercle, centré en O, de rayon 9,5 cm, situé dans le premier quadrant du plan xOz , proche de la surface externe de la sphère. Le potentiel de référence $V = 0$ V a été pris sur le premier point des courbes présentées figure 3, pour les méthodes de type MEF et la méthode analytique. Les écarts sur les valeurs du potentiel obtenues par les 2 types de méthodes sont inférieures à 0,07 %.

Sur la figure 4 sont tracées des courbes donnant les valeurs de l'induction et les écarts. Les points de calcul sont situés sur un quart de cercle, centré en O, de rayon 12 cm, situé dans le premier quadrant du plan xOz , à l'extérieur de la sphère. Les écarts sur les valeurs de l'induction obtenues par les 2 types de méthodes sont inférieures à 0,025 %, et sont plus faibles que les écarts sur le potentiel. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'induction est une grandeur globale, obtenue par intégration du courant $\mathbf{J}$ sur le volume du milieu conducteur Ω , que les méthodes de type MEF sont des méthodes globales, qui minimisent l'énergie du modèle, et que les imprécisions numériques sur le calcul de l'induction s'annulent.

La valeur non réaliste du moment du dipôle fait que les ordres de grandeur des valeurs de potentiel et d'induction données par les figures 3 et 4 ne correspondent pas à celles qui peuvent être réellement mesurées, qui sont de l'ordre de 100 fT pour l'induction et du μ V pour les potentiels. Ceci n'est pas gênant pour la résolution du problème inverse, qui permet de retrouver la position ou les directions de dipôles.

Le temps CPU sur station HP 110C est de 418 s pour le calcul du potentiel, et de 127 s pour le calcul de l'induction en un point. Pour la place mémoire du calcul du potentiel, seuls les

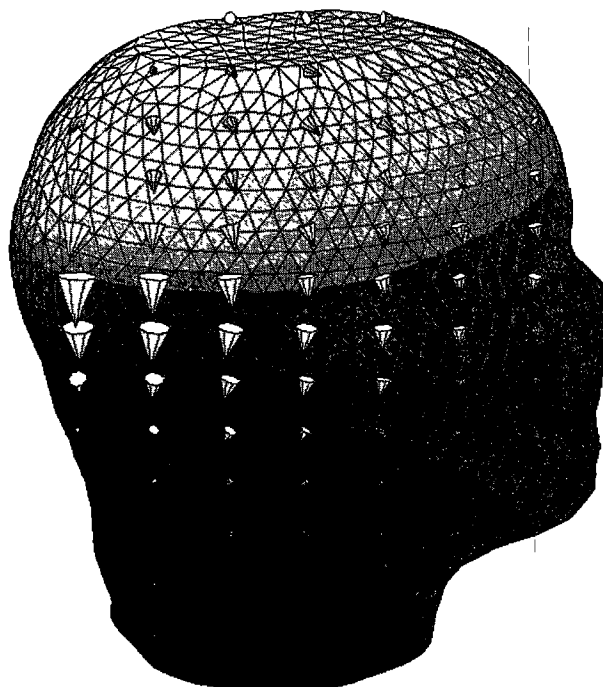


Fig. 5. — Dégradés de couleur représentant les valeurs du potentiel électrique V , cônes représentant les vecteurs densité de courant $\mathbf{J}$ sur la surface de la tête. Le maillage surfacique est aussi tracé

[Shaded off colours representing the values of the electric potential V , cones representing the vectors of the current density $\mathbf{J}$ on the surface of the head. The surface mesh is also drawn.

termes susceptibles d'être non nuls de la matrice de raideur, qui est très creuse, sont stockés, ce qui correspond à 702 904 réels en double précision.

3 2. MODÈLE RÉALISTE DE TÊTE. — La géométrie de ce modèle a été obtenue à partir de 56 images d'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) d'une tête. À l'aide d'une segmentation de ces images, les contours des trois tissus ont pu être obtenus. Puis, à partir de ces contours, qui ont été lissés pour faciliter le maillage, des surfaces splines ont été créées pour former les trois régions emboîtées. L'obtention du maillage a constitué l'étape suivante. Il comporte 43 742 éléments tétraédriques du 2^{ème} ordre. Le modèle a ensuite été résolu et les résultats exploités dans le logiciel FLUX3D (*cf.* Fig. 5).

Le temps CPU sur station HP 110C est de 496 s pour le calcul du potentiel, et de 131 s pour le calcul de l'induction en un point, et la taille de la matrice de raideur où seuls les termes susceptibles d'être non nuls sont stockés, de 892 089 réels en double précision

4. Conclusion

Nous avons développé des méthodes numériques de type éléments finis pour le calcul du potentiel électrique et de l'induction créés par les sources de courant dipolaires dans la boîte crânienne. Contrairement aux méthodes analytiques, les méthodes de type éléments finis peuvent s'appliquer à des modèles réalistes de tête, et permettent de tenir compte de propriétés

physiques comme la conductivité anisotrope ou variable dans l'espace. Elles permettent d'étudier, par exemple, l'influence de l'anisotropie de conductivité de l'os ou l'influence des trous des yeux dans cet os, sur la précision de la reconstruction de l'activité électrique du cerveau. Les résultats présentés ont montré la précision de ces méthodes. Elles nécessitent des temps de calcul et une place mémoire importantes comparés à ceux des méthodes analytiques où les temps de calcul sont de l'ordre de la seconde. Un prochain article présentera des résultats plus complets de calculs de potentiel, sur le modèle de sphères concentriques et sur le modèle réaliste de tête, avec la conductivité de l'os supposée isotrope ou anisotrope et des résultats de reconstruction sur ces modèles.

Bibliographie

- [1] Wood C., *et al*, Electrical sources in human somatosensory cortex : identification by combined magnetic and potential recordings, *Science* **227** (1985) 1051-1053.
- [2] De Munck J.C., The potential distribution in a layered anisotropic spheroidal volume conductor, *J. Appl. Phys.* **64** (1988) 464-470.
- [3] Thevenet M., Bertrand O., Perrin F., Dumont T. and Pernier J., The finite element method for a realistic head model of electrical brain activities: preliminary results, *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **12** Suppl. A (1991) 89-94
- [4] Thevenet M., Modélisation de l'activité électrique cérébrale par la méthode des éléments finis, Thèse de Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (Juin 1992)
- [5] Sarvas J., Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem, *Phys. Med. Biol.* **32** (1987) 11-22.
- [6] Simkin J., Trowbridge C.W., On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics, *Int. J. num. Meth. Engng.* **14** (1979) 423-440.
- [7] Bossavit A., Introduction aux formulations variationnelles en électromagnétisme, note EDF/DER HI-70/6284 Clamart, France (Janvier 1989).
- [8] Guérin C., Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique, Thèse de Docteur Ingénieur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, (Septembre 1994).