



**HAL**  
open science

## Décomposition de la densité de force dans l'induit d'un moteur linéaire

Gérard Vinsard, Bernard Laporte, Nouredine Takorabet, Jean-Pierre  
Brancher

► **To cite this version:**

Gérard Vinsard, Bernard Laporte, Nouredine Takorabet, Jean-Pierre Brancher. Décomposition de la densité de force dans l'induit d'un moteur linéaire. *Journal de Physique III*, 1997, 7 (10), pp.1995-2001. 10.1051/jp3:1997238 . jpa-00249697

**HAL Id: jpa-00249697**

**<https://hal.science/jpa-00249697>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Décomposition de la densité de force dans l'induit d'un moteur linéaire (\*)

Gérard Vinsard (\*\*), Bernard Laporte, Noureddine Takorabet et Jean-Pierre Brancher

Groupement de Recherches en Électrotechnique et Électronique de Nancy INPL/GREEN (\*\*\*),  
2 avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France

(Reçu le 20 mars 1997, accepté le 24 juin 1997)

PACS.41.20 -q – Electric, magnetic and electromagnetic fields

PACS.84.50 +d – Electric motors

PACS.07.05.-t – Computer experimental physics

**Résumé.** — Le champ de densité de force dans l'induit d'un moteur linéaire est calculé et sa décomposition en parties gradient et rotationnelle est expliquée. Cette démarche est illustrée par un exemple pratique.

**Abstract.** — The force density field in the secondary of a linear motor is computed and its decomposition into rotational and gradient parts is explained. This approach is illustrated with a practical exemple.

## 1. Introduction

Le moteur linéaire peut servir à des applications de pompage de métaux liquides. L'effet attendu de la densité de force électromagnétique est de fournir une pression motrice qui met le fluide en mouvement. Un effet secondaire, mais néfaste, est que cette densité de force contient des composantes rotationnelles qui contribuent à déstabiliser l'écoulement. L'objectif de cet article est d'analyser directement la densité de force et de quantifier l'importance relative des éléments de sa décomposition.

## 2. Calcul de la densité de force

Si les courants des  $N$  encoches (Fig. 1) sont donnés comme (en convenant de noter les nombres complexes  $\bar{z} = \Re\{\bar{z}\} + j\Im\{\bar{z}\}$  et leur conjugué  $\bar{z}^*$ )

$$j_n(t) = \sqrt{2}\Re\{\bar{j}_n e^{j\omega t}\} \text{ pour } n = 1 \dots N \quad (1)$$

(\*) Le contenu de cet article a été présenté à NUMELEC 97

(\*\*) Auteur auquel doit être adressée la correspondance (e-mail . gerard.vinsard@ensem.u-nancy.fr)

(\*\*\*) URA 1438

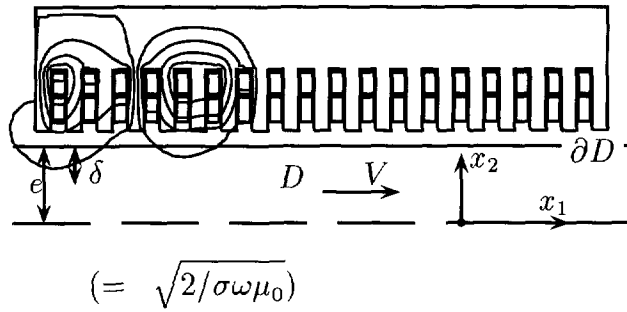


Fig. 1. — Le moteur linéaire avec son induit

[The linear motor and its secondary.]

et, à condition qu'il n'y ait pas de non linéarité magnétique, le potentiel vecteur bidimensionnel  $a$  dans le référentiel lié à l'inducteur est de la forme

$$a(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2} \Re \{ \bar{a}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \} \tag{2}$$

et  $\bar{a}(\mathbf{x})$  (noté plus simplement  $\bar{a}$ ) est solution de

$$\nabla \cdot \nu(\mathbf{x}) \nabla \bar{a} + \bar{j}_s(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x}) \left( j\omega \bar{a} + V \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_1} \right) = 0 \tag{3}$$

dans tout l'espace euclidien  $E_2$  repéré par la position  $\mathbf{x} (= (x_1, x_2) = x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2)$ . Les paramètres du problème sont :  $\nu(\mathbf{x})$ , la reluctivité magnétique ;  $\sigma(\mathbf{x})$  la conductivité électrique supposée nulle partout sauf dans l'induit (animé de la vitesse  $V$ ) où elle vaut  $\sigma$  ;  $\bar{j}_s(\mathbf{x})$ , la densité de courant source nulle partout sauf dans les encoches de l'inducteur où  $\bar{j}_s(\mathbf{x}) = \bar{j}_n / S_n$  si  $S_n$  est la surface de l'encoche  $n$  à laquelle  $\mathbf{x}$  appartient.

On suppose disposer d'un solveur [1, 2] permettant le calcul effectif de  $\bar{a}$ . La moyenne temporelle de la densité de force (de Laplace) dans l'induit est alors

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma \left( \omega \Im \{ \bar{a} \nabla \bar{a}^* \} - V \Re \left\{ \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_1} \nabla \bar{a}^* \right\} \right). \tag{4}$$

Si la géométrie, la nature des matériaux et la vitesse  $V$  sont fixées, cette densité de force peut être considérée comme une fonction de la pulsation  $\omega$  et des courants d'encoches  $\bar{j}_n$  seuls.

### 3. Utilisation de la densité de force

Si l'induit représente un écoulement de métal liquide, le modèle pertinent pour décrire cet écoulement correspond à l'équation de Navier-Stokes incompressible. Comme le métal est par nature lourd, les effets d'inertie sont prépondérant et, même pour des vitesses relativement petites, l'écoulement est turbulent [3].

L'objet de ce travail n'est pas de décrire une modélisation (le modèle  $k-\epsilon$ ) précise de ce type de problème qui relève encore de la recherche en mécanique des fluides, mais de fournir des éléments qualitatifs relevant de l'analyse de la densité de force seulé.

En dehors de la couche limite mécanique dans laquelle s'annule le champ de vitesse, l'écoulement moyen peut être supposé uniforme de vitesse

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = V \mathbf{x}_1. \tag{5}$$

L'injection de ce champ de vitesse dans l'équation de Navier-Stokes fournit

$$\nabla P(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

qui ne peut être réalisé que si  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est irrotationnel, ce qui constitue ainsi une condition nécessaire d'écoulement uniforme en moyenne.

Cependant les densités de forces électromagnétiques ne seront jamais complètement irrotationnelles. Pour comprendre l'écoulement généré par des forces rotationnelles, il est possible de supposer que, contrairement au cas réel, le nombre de Reynolds est faible. Les équations sont alors celles de Stokes

$$\mu \nabla \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) + \nabla P(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

où  $\mu$  est la perméabilité du fluide et  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  la vorticité associée à la vitesse  $\mathbf{v}$  (qui n'est plus celle de l'équation (5)).

Ainsi toute variation de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  par rapport à un terme directement potentiel excitera directement la vorticité.

Il est donc important, en première analyse, d'estimer les importances relatives des parties gradients et rotationnelle de la densité de force.

#### 4. Décomposition de la densité de force

Le domaine  $D$  de l'induit est connexe, en conséquence les champs  $\mathbf{f}$  de vecteur de carré sommable (espace  $L^2(D)^2$ ) peuvent être décomposés de façon unique (c'est la décomposition de Hodge-Helmholtz [4]) comme ( $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ )

$$\mathbf{f} = -\mathbf{x}_3 \times \nabla u_0 + \nabla \varphi + \nabla \varphi_0 \quad (8)$$

où

- $u_0$  est un élément de l'espace  $H_0^1(D)$  des fonctions dont les dérivées sont dans  $L^2(D)$  et qui sont nulles sur  $\partial D$  le bord de  $D$  (Fig. 1). Le terme  $-\mathbf{x}_3 \times \nabla u_0$  est un rotationnel écrit sous une version bidimensionnelle.
- $\varphi$  est un élément de  $\mathcal{H}(D)$ , l'espace des fonctions harmoniques dans  $D$  ;
- $\varphi_0$  est un élément de  $H_0^1(D)$  défini précédemment.

Comme  $\mathbf{x}_3 \times \nabla u_0$ ,  $\nabla \varphi$  et  $\nabla \varphi_0$  sont, par construction, orthogonaux pour le produit scalaire des champs de vecteur  $L^2(D)^2$

$$\int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}' \, d\mathbf{x} \quad (9)$$

on a alors

$$\int_D \mathbf{f}^2 = \int_D \nabla u_0^2 \, d\mathbf{x} + \int_D \nabla \varphi_0^2 \, d\mathbf{x} + \int_D \nabla \varphi^2 \, d\mathbf{x} \quad (10)$$

ce qui quantifie le champ de force en parties :

- rotationnelle ( $\int_D \nabla u_0^2 \, d\mathbf{x}$ ) ;
- gradient de pression non active ( $\int_D \nabla \varphi_0^2 \, d\mathbf{x}$ ), appelé ainsi parce que, par construction,

$$\int_D \nabla \varphi_0 = \int_{\partial D} \varphi_0 \mathbf{n} = 0 ; \quad (11)$$

Tableau I. — Valeurs des parties rotationnelle, gradient local et gradient moteur de la densité de force (en % de  $\int_D \mathbf{f}^2$  et en % de la poussée de la ligne  $x$  pour la dernière colonne). La vitesse  $V$  est nulle.

[Values of the rotational, local gradient and active gradient (in % of  $\int_D \mathbf{f}^2$  and % of the thrust of the line  $x$  for the last column. The speed  $V$  vanishes.)]

Polarité	$\int_D \nabla u_0^2$	$\int_D \nabla \varphi_0^2$	$\int_D \nabla \varphi^2$	$P_m$ (%)
2	1	59	39	80
4	6	29	64	40
6	54	12	30	20
$x$	1	47	50	100

- gradient de pression motrice ( $\int_D \nabla \varphi^2 dx$ ) (par opposition au gradient précédent) , la pression motrice (ou poussée dans la direction  $\mathbf{x}_1$  de l'écoulement) est alors

$$P_m = \int_D \partial \varphi / \partial x_1. \quad (12)$$

Si les calculs de  $\bar{a}$  sont menés en utilisant des éléments finis, il est assez facile de construire une procédure de calcul effectif de  $u_0$ ,  $\varphi_0$  et  $\varphi$  à partir de  $\mathbf{f}$  qui est alors sous la forme de vecteurs constants par morceaux sur chacun des éléments finis. Pour cela on approxime  $u_0$ ,  $\varphi_0$  et  $\varphi$  comme  $\bar{a}$  par des fonctions affines par morceaux sur les éléments et on minimise successivement la version discrète des fonctionnelles

$$\begin{aligned} \int_D (\mathbf{f} + \mathbf{x}_3 \times \nabla u_0)^2 dx & \quad \text{et } u_0 = 0 \text{ sur } \partial D \quad \text{par rapport à } u_0 \\ \int_D (\mathbf{f} - \nabla \varphi_0)^2 dx & \quad \text{et } \varphi_0 = 0 \text{ sur } \partial D \quad \text{par rapport à } \varphi_0 \\ \int_D (\mathbf{f} - \nabla \varphi_0 - \nabla \varphi)^2 dx & \quad \text{par rapport à } \varphi \quad (\varphi_0 \text{ est ici connue}) \end{aligned} \quad (13)$$

$u_0$ ,  $\varphi_0$  et  $\varphi$  étant alors connus, il est possible de calculer numériquement chacun des termes du second membre de (10) et donc de connaître leurs importances relatives. Ceci réalise alors l'objectif annoncé.

## 5. Résultats

Les résultats qu'il est possible d'obtenir à partir de la décomposition (10) permettent une analyse globale d'un dispositif relativement complexe. Pour illustrer ceci on peut considérer un moteur linéaire dont le rôle est de pomper du métal liquide. L'objectif est d'optimiser ce pompage.

Pour fixer quelques paramètres : le moteur comporte  $N = 18$  encoches (Fig. 1), les courants  $\bar{j}_n$  sont successivement groupés de façon à former 2, 4, 6 pôles (comme on le ferait pour un moteur tournant) puis enfin ils sont laissés libres (ligne  $x$  du Tab. I).

Dans chacune de ces configurations on cherche les valeurs optimales de ces courants  $\bar{j}_n$  dans le sens qu'elles maximisent la pression motrice  $P_m$  de l'équation (12) sous la contrainte de pertes joules totales dans l'inducteur constantes (la somme des carrés des modules des courants d'encoches est constante). La technique utilisée est celle du quotient de Rayleigh [2].

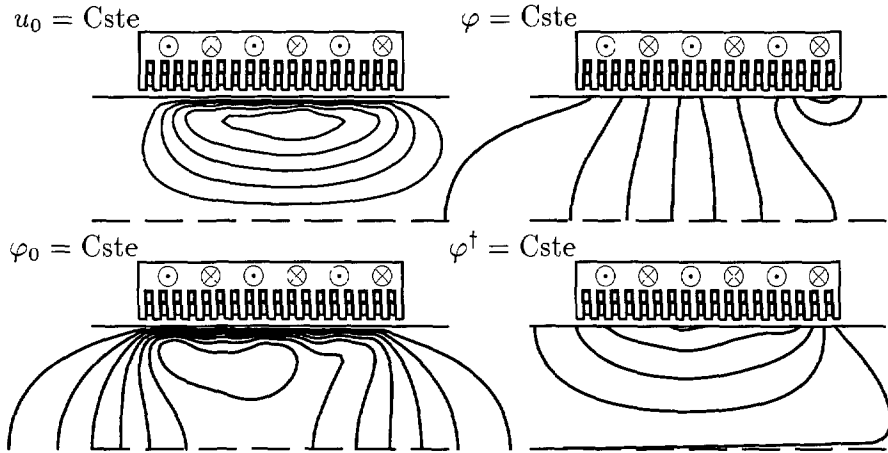


Fig 2. — Les lignes de forces ( $u_0$  et  $\varphi^\dagger = \text{Cste}$ ) et les isobares ( $\varphi_0$  et  $\varphi = \text{Cste}$ ).

[The force lines ( $u_0$  and  $\varphi^\dagger = \text{Cste}$ ) and the pressure lines ( $\varphi_0$  et  $\varphi = \text{Cste}$ ).]

Qualitativement il est intéressant de regarder le tracé des lignes  $u_0, \varphi_0, \varphi = \text{Cste}$  auquel on adjoint les lignes  $\varphi^\dagger = \text{Cste}$  ou  $\varphi^\dagger$  est la fonction harmonique duale de  $\varphi$  calculée par la minimisation de

$$\int_D (\nabla\varphi^\dagger - \mathbf{x}_3 \times \nabla\varphi)^2 dx. \tag{14}$$

Les tracés sont faits pour le choix d'une épaisseur  $e \approx 5\delta$ , à vitesse nulle et pour un enroulement optimisé correspondant à 6 pôles (Fig. 2).

Les lignes  $u_0 = \text{Cste}$  représentent la partie purement rotationnelle de la densité de force qui génère une vorticité dans l'écoulement. Les lignes  $\varphi_0 = \text{Cste}$  correspondent à la variation locale (non motrice) de la pression.

Les lignes  $\varphi = \text{Cste}$  correspondent à la pression motrice de l'écoulement. Il est plus intéressant de regarder les lignes  $\varphi^\dagger = \text{Cste}$  qui sont des lignes de force motrice ; elles contiennent de l'information sur la poussée dans leur partie horizontale mais aussi l'indication que, si il n'y avait pas de paroi limitant son déplacement dans le sens vertical, le métal liquide aurait tendance à rentrer vers l'intérieur (à gauche) et à sortir vers l'extérieur (à droite). Cette indication n'est pas exploitée ici mais elle pourrait l'être pour le traitement d'un écoulement à frontière libre.

Quantitativement l'importance relative des champs  $u_0, \varphi_0, \varphi$  peut être chiffrée par les valeurs effectives des termes du second membre de l'équation (10). Le tableau I recense les résultats obtenus pour les différentes configurations d'enroulement étudiées dans le cas où profondeur de pénétration  $\delta$  coïncide avec la demi épaisseur  $e$  de l'induit et la vitesse  $V$  est nulle.

Une première remarque doit être faite pour expliquer que la somme des trois composantes  $\int_D \nabla u_0^2, \int_D \nabla \varphi_0^2$  et  $\int_D \nabla \varphi^2$ , exprimée en pourcentage de  $\int_D \mathbf{f}^2$ , n'est pas rigoureusement 100 %. C'est du au fait que les calculs sont numériques et donc que  $L^2(D)^2$  n'est pas représenté complètement dans les approximations. Le pourcentage restant correspond à la partie de  $L^2(D)^2$  qui est oubliée de part la discrétisation du problème : celle-ci est relativement petite

Tableau II. — Valeurs des parties rotationnelle, gradient local et gradient moteur de la densité de force (en % de  $\int_D \mathbf{f}^2$  et Newton par mètre de longueur axial pour la poussée pour la dernière colonne).

[Values of the rotational, local gradient and active gradient (in % of  $\int_D \mathbf{f}^2$  and Newton per meter of axial length for the last column).]

$V$ (m/s)	$\int_D \nabla u_0^2$	$\int_D \nabla \varphi_0^2$	$\int_D \nabla \varphi^2$	$F_m$ (N/m)
0	27	23	50	289
1	27	23	50	251
3	25	22	53	188
5	22	21	56	137
10	13	23	62	47
14	3	31	53	0

pour la discrétisation choisie ici et elle peut être encore réduite avec une densité de maille plus importante.

Ce dernier point expliqué, les résultats peuvent être interprétés de la façon suivante :

- la maximisation de la poussée dans le cas le moins contraint des 18 courants libres correspond aussi à une génération de forces rotationnelles peu importantes ;
- la maximisation de la poussée dans le cas d'une polarité de 2 ne génère pas non plus de forces rotationnelles importantes mais cette poussée est évidemment inférieure au cas non contraint des courants libres ;
- les solutions de moyen terme de polarité 4 et surtout 6 correspondent à des poussées moins importantes ainsi qu'à des forces rotationnelles importantes. Ces solutions ne sont donc pas intéressantes s'il s'agit de fabriquer une pompe électromagnétique mais par contre elles seraient adaptées s'il s'agissait de brasser le métal liquide.

Cette brève analyse montre que la maximisation de la poussée correspond aussi à des forces rotationnelles peu importantes. Cependant cette conclusion n'est valable que pour les paramètres choisis.

L'influence de la vitesse sur la décomposition de Hodge-Helmoltz est intéressante à analyser. Pour cela un induit d'épaisseur  $e \approx 3\delta$  relativement grande est choisi ainsi que l'enroulement optimisé pour 18 courants libres précédent.

Le résultat est placé dans le tableau II. On peut remarquer que pour les faibles vitesses (la répartition entre les composantes rotationnelles, pression non active et pression active ne change pas alors que la poussée diminue. Puis dès que la vitesse à laquelle la poussée est nulle est atteinte, la composante rotationnelle devient quasiment nulle, la composante de pression non active remonte et la composante de pression active diminue légèrement. Cette dernière n'est pas nulle, bien que sa somme linéaire le soit, elle est en fait composée de deux systèmes de forces qui s'opposent.

Ces résultats permettent de voir qu'il y a certainement un optimum à trouver en fonction de la vitesse  $V$  avec un critère de maximiser la poussée tout en maintenant la composante rotationnelle faible.

## 6. Conclusion

La décomposition en parties rotationnelle et gradient du champ de densité de force dans l'induit d'un moteur linéaire est possible numériquement.

Cette analyse est intéressante en soi puisqu'elle permet d'adresser séparément à un modèle mécanique les types de densité de force qui constituent ses sources.

Mais aussi elle permet d'obtenir directement des éléments de dimensionnement adaptés à une tâche spécifique.

## Bibliographie

- [1] Lean G.W., Review of recent progress in linear motors, *IEE Proceedings* **135** (1988) 380-415.
- [2] Laporte B., Takorabet N. and Vinsard G., The optimal supply of linear induction motors, *Proceeding of the Conference on Electromagnetic Field Computation, Okayama* (1996) p. 146. (Version étendue acceptée pour *IEEE transaction on magnetics*, 1997).
- [3] Moffat H.K., Electromagnetic stirring, *Physical fluids A* **3**, N°5 (1991).
- [4] Bossavit A , Les deux isomorphismes du rotationnel et les deux formes du problème de la magnéto-statique dans un domaine borné, *Bulletin de la direction des études et recherches, Série C* (1986) pp. 5-10.