



HAL
open science

Multicouche thermique et profils thermophysiques continus : l'approche récursive

Philippe Gossel, Françoise Depasse, Nathalie Trannoy

► **To cite this version:**

Philippe Gossel, Françoise Depasse, Nathalie Trannoy. Multicouche thermique et profils thermophysiques continus : l'approche récursive. *Journal de Physique III*, 1997, 7 (1), pp.13-33. 10.1051/jp3:1997107. jpa-00249564

HAL Id: jpa-00249564

<https://hal.science/jpa-00249564v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Multicouche thermique et profils thermophysiques continus : l'approche récursive

Philippe Grossel (*), Françoise Depasse et Nathalie Trannoy

Unité de Thermique et d'Analyse Physique, Laboratoire d'Énergétique et d'Optique,
Faculté des Sciences de Reims, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2, France

(Reçu le 9 juillet 1996, révisé le 17 septembre 1996, accepté le 11 octobre 1996)

PACS 44.30.+v – Heat transfer in inhomogeneous media, in porous media and through interfaces

PACS 44.50 +f – Thermal properties of matter (phenomenology, experimental techniques)

Résumé. — Un découpage d'un profil thermophysique de profondeur en marches d'escalier fournit la réponse thermique d'un échantillon sous excitation harmonique à l'aide d'une évaluation récursive du champ de température. Les réponses analytiques et numériques, pour des échantillons soumis à des sources thermiques modulées quelconques, sont ainsi obtenues à partir de la recherche de la fonction de Green spatiale du multicouche. Dans le cas d'un profil continu découpé en un nombre de couches important, les expressions trouvées peuvent être alors directement comparées à des solutions analytiques telles que celles construites autour de l'approximation BKW. Une autre approximation est alors proposée dans le cas d'échantillons semi-infinis à profils doux

Abstract. — The problem of unidimensional thermal profiles is considered with the use of the recursive method. A star-case decomposition gives the spatial Green function of the general multilayer in case of a.c. heat modulated excitation. For the continuous profiles, the general formulae are applied to direct comparisons with the Brillouin-Kramers-Wentzel approximation and another approximation is given in case of a semi-infinite sample.

1. Introduction

Les oscillations thermiques sont utilisées en contrôle non destructif afin de mener à la détermination des profils thermophysiques de profondeur. La détection des inhomogénéités est fondée sur le confinement (diffusion, diffraction) des oscillations thermiques ou des comportements thermiques transitoires obtenus par excitation impulsionnelle ou harmoniquement modulée [1, 2].

Dans ce dernier cas, particulièrement adapté aux études de couches minces, l'équation de diffusion de la chaleur peut s'écrire sous forme de l'équivalent thermique de l'équation de Helmholtz [3, 4]. La recherche de solutions de l'équation de la chaleur pour des profils continus est alors menée dans le cadre général des équations différentielles de second ordre à coefficients non constants. Dans le domaine thermique, les traitements théoriques se sont multipliés ces dernières décennies menant jusqu'à des algorithmes puissants fondés sur les théorèmes de

(*) Auteur auquel doit être adressée la correspondance

Huygens-Kirchoff ou même l'introduction d'un lagrangien thermique permettant une "quantification" sur laquelle est construite le modèle de l'"Oscillateur Harmonique Thermique" (THO). Ce genre de traitement est, par construction même, dévolu à la recherche des solutions du problème direct et du problème inverse des profils de profondeur continus [2, 5]. Ces méthodes sont à relier aux traitements d'approximations des profils doux (à variations lentes) développés autour de la mécanique quantique (BKW) [6-8]. Les méthodes approchées sont nécessaires vu le faible nombre de profils admettant des solutions analytiquement exactes [9].

Plutôt que de chercher des solutions approchées pour les profils continus, il peut être aussi simple de chercher des solutions exactes d'un modèle approché. C'est ce que font de façon numériquement satisfaisante les méthodes par éléments ou différences finies. Ces méthodes efficaces perdent rapidement tout lien avec les expressions analytiques et sont souvent très lourdes d'emploi pour le cas relativement simple des profils unidimensionnels. D'autres modélisations se sont développées à partir de multicouches constitués de milieux successifs pour chacun desquels l'équation de diffusion de la chaleur admet des solutions analytiques exactes. Parfaitement adaptées aux cas pour lesquels les couches (en nombre plus ou moins grand) possèdent des caractéristiques thermophysiques distinctes, elles peuvent de plus servir à une approximation de la réponse de profils continus. Les présentations théoriques rencontrées peuvent être construites sur un calcul matriciel rendant compte de l'évolution du champ de température et du flux de chaleur dans la profondeur du matériau [10]. Des généralisations ont été élaborées afin de tenir compte d'éventuelles résistances, de capacités thermiques de contact ou de sources étendues : les approches les plus efficaces s'expriment en termes de quadripôles thermiques [11, 12]. Ces travaux utilisent une description matricielle fondée sur des matrices 2×2 permettant le transfert du vecteur [température T , flux Q] de couche en couche. N'utilisant que des matrices pleines, faciles à inverser, elles peuvent mener rapidement aux résultats numériques, même dans le cas d'un grand nombre de couches.

Une étape supplémentaire peut être franchie dans la recherche de l'expression analytique de ce problème multicouche. Il s'agit d'éliminer, dans les expressions finales, tout aspect matriciel, même si le calcul matriciel peut être employé dans la recherche de ces expressions. Le problème que posent les équations différentielles à coefficients variables est commun à de nombreuses branches de la physique. Une technique possible est la méthode des séries de Bremmer [8, 13] qui introduit des calculs analytiques lourds, mais susceptibles d'approximations à divers ordres (la première fournit ainsi très facilement, dans le cadre d'une approche multicouche, l'approximation BKW). Une autre méthode s'est avérée récemment très efficace. Elle revient à expliciter les propriétés de récursivité apparaissant dans les méthodes de type quadripôle directement aux niveaux des éléments des différentes matrices ou produits de matrices. Une telle approche a été introduite dans le cadre général de la recherche de la fonction de Green spatio-temporelle du multicouche quelconque [14]. Les analyses numériques formées sur cette approche récursive montrent de plus la facilité du calcul numérique. Une autre méthode récursive avait déjà été introduite il y a une dizaine d'années mais elle était limitée au cas du dépôt de chaleur en surface et utilisait la notion d'impédance thermique, à partir du vecteur $[T, Q]$ [15]. Dans le cadre de l'optique ou de la mécanique quantique, des études ont montré certains aspects mathématiques ou numériques de ces méthodes récursives [16, 17] et leurs facilités d'emploi, même avec des dizaines de milliers de couches.

La présente étude porte sur une présentation systématique à partir de la température seule, et d'un *coefficient de réflexion généralisé*, du traitement récursif général du multicouche thermique (à très grand nombre de couches) pour le cas d'un multicouche quelconque unidimensionnel excité par une source thermique modulée sinusoidalement. Les expressions obtenues permettent des comparaisons directes avec le cas des profils continus traités par des solutions analytiques approchées (oscillateur harmonique thermique ou BKW) [18] ainsi que des facilités de lectures

analytiques générales au cas de sources quelconques.

Dans le cas d'un milieu semi-infini présentant, sur une certaine épaisseur en surface, un profil de profondeur continu menant vers les caractéristiques thermophysiques du milieu massif, la solution "exacte" (définie ici comme la réponse obtenue par l'intermédiaire d'un multicouche à très grand nombre de couches) peut s'approcher par une expression analytique simple fournissant des évaluations numériques bien meilleures que celles obtenues par l'approximation BKW.

Dans le domaine thermique, la méthode récursive, à partir d'un découpage sous forme de multicouche, a permis récemment d'aborder la solution du problème direct et du problème inverse dans le cas où la conductivité thermique présente, seule, un profil de profondeur [19]. Dans ce cas, il apparaît judicieux de décomposer le profil continu en une succession de milieux à profils de conductivité linéaires en fonction de la profondeur. Dans chacun de ces milieux la solution analytique exacte peut être exprimée en termes de fonctions de Bessel [9, 19]. Dans le cas d'une conductivité constante mais d'une variation linéaire du produit des autres paramètres thermophysiques (masse volumique, chaleur spécifique), le traitement mènera aux fonctions d'Airy [19].

Dans le cas général où l'évolution en profondeur concerne *a priori* tous les coefficients thermophysiques, il apparaît nécessaire de se tourner vers un découpage en "marches d'escalier" définissant une succession de milieux thermiquement homogènes pour lesquels les solutions (exponentielles) sont bien connues. C'est le cadre choisi pour la présentation systématique de la méthode récursive présentée ici.

Travaillant à fréquence constante, notre calcul pourrait se résumer en quelques mots : rechercher, à l'aide d'une représentation analytique, la fonction de Green spatiale d'un multicouche quelconque avec des conditions aux limites quelconques. Ceci est mené en favorisant systématiquement les liens entre l'approche multicouche et l'approche continue.

La facilité d'emploi, la vitesse de calcul, la clarté interprétative des expressions trouvées font de ces approches une méthode alternative attractive pour le traitement des problèmes unidimensionnels.

2. Multicouche et profil continu

2.1. PRÉSENTATION. — Nous considérons ici un échantillon plan possédant une structure de profil continu ou discret dans la direction Ox normale à la surface. L'excitation thermique fournie au matériau sera aussi unidimensionnelle, étant entendu que la solution que nous obtiendrons pourrait être généralisée à des sources thermiques quelconques telles des faisceaux laser en incidence quelconque par utilisation de transformée de Fourier bidimensionnelles [10, 14, 20].

Notant $S(x, t)$ la source de chaleur dans le plan x , à l'instant t , l'équation de diffusion de la chaleur s'écrit [21]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right] - c(x) \rho(x) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = -S(x, t) \quad (1)$$

où sont définies la conductivité thermique $\kappa(x)$, la chaleur spécifique $c(x)$ et la masse volumique $\rho(x)$. Sous une excitation harmonique, à fréquence angulaire ω ,

$$S(x, t) = S(x) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

le champ de température se décomposera en une composante continue et une composante alternative qui nous intéressera ici

$$T(x, t) = T(x) e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

La linéarité de l'équation de diffusion (1) permet d'utiliser la méthode de la fonction de Green. Il s'ensuit que l'on peut décomposer l'étude en une sommation de solutions d'équations dont chacune possède comme source une distribution de Dirac. En dehors de cette source, l'équation à résoudre est simplement l'équation indépendante du temps

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa(x) \frac{d}{dx} T(x) \right] + \imath c(x) \rho(x) \omega T(x) = 0 \quad (4)$$

dans laquelle pourra être introduite la diffusivité thermique :

$$\alpha(x) = \frac{\kappa(x)}{\rho(x)c(x)}. \quad (5)$$

2.2. APPROCHE MULTICOUCHE DU PROFIL CONTINU. — Dans de nombreux domaines de la physique, la résolution d'équations différentielles à coefficients non constants – pour notre cas à profil de profondeur des coefficients thermophysiques – peut être menée par la résolution exacte d'un modèle approché. En dehors de cas particuliers permettant des solutions analytiques [9], il est intéressant de procéder à un découpage très fin du profil en un grand nombre de couches homogènes.

Dans le cas du régime sinusoïdal permanent, l'équation de diffusion devient indépendante du temps et prend la forme d'une équation d'Helmholtz généralisée. Cette particularité amène de nombreux auteurs à utiliser des termes normalement réservés aux solutions des équations de propagation d'ondes. Bien précisé, ceci ne peut porter à confusion. Ainsi, par exemple, l'élément de base de notre approche est l'écriture de la température en tout point comme somme de deux composantes se présentant formellement comme des *ondes planes*.

La technique de calcul que nous proposons ici est une variante de la méthode récursive générale [14] rendue possible par le découpage en *marches d'escalier*. Dans chaque couche homogène, en l'absence de source, la solution sinusoïdale de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\Delta T + \frac{\imath\omega}{\alpha} T = 0 \quad (6)$$

sera décomposée en un vecteur à deux composantes correspondant aux solutions à amplitude décroissante (composantes progressives) et à amplitude croissante (composantes régressives) le long de l'axe de description

$$T(x) = T_+ e^{\imath k x} + T_- e^{-\imath k x} = T_+(x) + T_-(x) = \begin{pmatrix} T_+(x) \\ T_-(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

où l'on a défini le vecteur de diffusion harmonique k , à la fréquence F , de ce milieu homogène

$$k = \sqrt{\frac{\imath\omega}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi F}{\alpha}} (1 + \imath) \quad (8)$$

Pour le problème unidimensionnel que nous abordons ici ce vecteur k est en fait un scalaire complexe.

Dans l'équation (7), les scalaires T_+ et T_- sont les valeurs des deux composantes, "avant" et "arrière", dont la somme est le champ de température au point de référence (arbitraire) $x = 0$. La présentation récursive que nous allons développer a pour but de fournir les composantes $T_+(x)$ et $T_-(x)$ en chaque point du multicouche et, ce, quelles que soient les conditions aux interfaces (conditions de continuité de température et flux) ou aux faces extrêmes (conditions aux limites de type Fourier, par exemple) et quelle que soit la distribution de sources thermiques.

Le présent travail constitue une recherche directe de la réponse du multicouche à un plan source alternatif. Ce plan peut être placé en position quelconque dans le multicouche ainsi les formules fournies sont-elles réellement les fonctions de Green spatiales, à fréquence de modulation donnée, d'un multicouche quelconque. Les résultats seront donnés en fonction de coefficients de *réflexion* généralisés montrant une structure récursive simple et liant en tout point du multicouche les composantes "avant" et "arrière" du vecteur température.

Formellement le problème est identique à celui posé par l'équation de Helmholtz en optique des multicouches ; à ceci près que l'optique aborde rarement le cas des sources internes (le faisceau excitateur est incident sur la structure étudiée) et que les ondes optiques présentent des vecteurs d'ondes très souvent réels, de temps en temps imaginaires purs (ondes évanescentes) et quelque fois complexes (absorption, effet de peau...). Signalons qu'en optique ce problème est usuellement traité à l'aide des séries infinies de Bremmer [9] que nous éviterons ici.

2.3. CONDITIONS DE CONTINUITÉ, CONDITIONS AUX LIMITES. — Il convient de préciser les conditions que nous imposons au champ de température dans le milieu homogène ou aux interfaces.

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, les oscillations sinusoïdales demandent l'existence d'une (ou plusieurs) source que nous supposons placée *dans* le milieu homogène correspondant à une quelconque des couches. L'équation de diffusion à résoudre est alors, pour une source plane située dans le plan $x = x_s$

$$\frac{d^2}{dx^2}T + i\frac{\omega}{\alpha}T = -\frac{S}{\kappa}\delta(x - x_s). \quad (9)$$

L'intégration, sur un petit intervalle $-\epsilon, +\epsilon$ autour de x_s fournit l'équation de saut de flux

$$\frac{d}{dx}T_{x_s+\epsilon} - \frac{d}{dx}T_{x_s-\epsilon} = -\frac{S}{\kappa}. \quad (10)$$

Partout, dans le milieu homogène, sera supposée vérifiée l'équation de continuité de la température, même au niveau du plan source, soit, ϵ étant un infiniment petit :

$$T(x_s - \epsilon) = T(x_s + \epsilon). \quad (11)$$

Ce plan source crée une asymétrie dans la description du vecteur température ; il convient donc de distinguer les composantes progressives et régressives propres aux demi-espaces précédant (indice supérieur $<$) et suivant (indice $>$) le plan source

$$\begin{aligned} T(x) &= T_+^{<}e^{ikx} + T_-^{<}e^{-ikx} ; & x < x_s \\ T(x) &= T_+^{>}e^{ikx} + T_-^{>}e^{-ikx} ; & x > x_s \end{aligned} \quad (12)$$

Ces composantes étant liées par les deux équations (10,11) au plan source.

Le multicouche, représentant éventuellement le profil continu, est décomposé en N milieux homogènes (Fig. 1). Aux interfaces seront rencontrées des équations de continuité diverses [21] :

- Interfaces sans source entre deux milieux conductifs (indiqués respectivement par j et $j+1$), sans résistance ni capacité thermiques de contact : température et flux sur l'interface x_j

$$T(x_j - \epsilon) = T(x_j + \epsilon) \quad (13a)$$

$$-\kappa_j \frac{d}{dx}T_{x_j-\epsilon} = -\kappa_{j+1} \frac{d}{dx}T_{x_{j+1}+\epsilon}. \quad (13b)$$

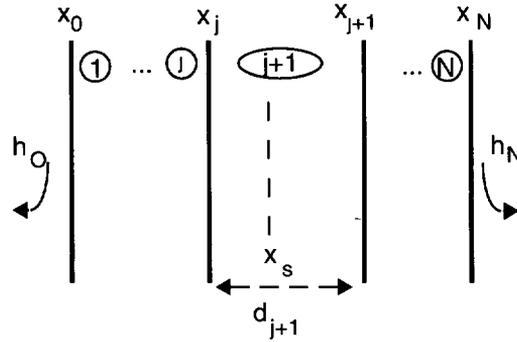


Fig 1. — Géométrie du multicouche. Le milieu homogène, indicé par $j + 1$, est limité par les interfaces x_j et x_{j+1} . Les sources thermiques peuvent être n'importe où dans chaque couche. Les milieux extérieurs au multicouche, avant l'interface x_0 et après l'interface x_N , peuvent être aussi bien de nature thermique convective (ici représentés par les coefficients d'échange h_0 et h_N) que conductive.

[Geometry of the multilayer. Each homogeneous medium, index $j + 1$, is bounded by the x_j and x_{j+1} interfaces. The heat sources can be anywhere in each layer. For each plane source, the x space is divided in left (or backward) and right (or forward) half-spaces. The h_0 and h_N coefficients indicate thermal exchange between the sample and the ambient air at the two extremities.]

- Interface avec le milieu extérieur de nature convective, avec source de chaleur en surface avant, en x_0

$$-\kappa_1 \frac{d}{dx} T_{x_0+\epsilon} = S_0 - h_0 T(x_0 + \epsilon). \quad (14)$$

Remarquons ici que la composante alternative de la température extérieure est prise égale à 0, et que nous avons conservé un terme d'échange h_0 pour la surface d'entrée.

- Interface avec le milieu extérieur de sortie (coefficient d'échange h_N) après la dernière couche (milieu homogène indicé par N)

$$-\kappa_N \frac{d}{dx} T_{x_N-\epsilon} = h_N T(x_N - \epsilon). \quad (15)$$

L'importance des coefficients d'échange n'apparaît que pour les fréquences de modulation les plus basses (inférieures à quelques Hertz). Ils sont en particulier nécessaires si l'on veut pouvoir déduire pour ce modèle 1-D (avec milieux extérieurs convectifs) le champ de température continue comme limite à fréquence nulle du champ de température alternative (hypothèse d'adiabaticité latérale pour les échantillons limités latéralement ; il conviendrait alors d'introduire la température ambiante continue dans les Éqs. (14-15)).

On peut, sans aucune difficulté, introduire des variantes à ces équations : milieux extérieurs conductifs, source de chaleur en interface, résistances et capacités thermiques de contact... qui sont autant de développements possibles de cette étude.

2.4. ÉCRITURE MATRICIELLE DES CONDITIONS DE CONTINUITÉ. — L'introduction du vecteur température (à deux composantes T_+ et T_-) permet d'exprimer très facilement les liens entre ces composantes de part et d'autre de l'interface. Les équations (13), avec le choix de la référence

de phase sur l'interface elle-même, mènent à

$$\begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_j - \epsilon} = \frac{k_j \kappa_j + k_{j+1} \kappa_{j+1}}{2k_j \kappa_j} \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_j \kappa_j - k_{j+1} \kappa_{j+1}}{k_j \kappa_j + k_{j+1} \kappa_{j+1}} \\ \frac{k_j \kappa_j - k_{j+1} \kappa_{j+1}}{k_j \kappa_j + k_{j+1} \kappa_{j+1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_j + \epsilon} \quad (16)$$

ce qui permet de définir des coefficients de *réflexion* et *transmission* locaux r_j et t_j , tels que l'on puisse écrire

$$\begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_j - \epsilon} = \frac{1}{t_j} \begin{pmatrix} 1 & r_j \\ r_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_j + \epsilon} = [t_j] \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_j + \epsilon}. \quad (17)$$

Par ailleurs, l'équation de diffusion (6) relie les vecteurs d'un point x à un point x' du même milieu homogène

$$\begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} e^{-ik(x'-x)} & 0 \\ 0 & e^{ik(x'-x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x'}. \quad (18)$$

Appliquée sur toute l'épaisseur d_j de la couche j (que l'on suppose sans source), la relation (18) s'écrit

$$\begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_{j-1} + \epsilon} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_j} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_{j-1} + d_j + \epsilon} = [\beta_j] \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix}_{x_{j-1} + \epsilon} \quad (19)$$

où β_j correspond au déphasage complexe dans la $j^{\text{ème}}$ couche.

$$\beta_j = k_j d_j. \quad (20)$$

Les conditions en surface sont traitées de façon analogue. Dans le cas d'une interface finale conductive/convective, les équations (7,15) mènent à

$$T_-(x_N - \epsilon) = r_N T_+(x_N - \epsilon) \quad (21)$$

où est défini le coefficient de réflexion en surface arrière

$$r_N = -\frac{h_N + ik_N \kappa_N}{h_N - ik_N \kappa_N}. \quad (22)$$

En présence d'une source située en x_s , supposée ici dans la $(j+1)^{\text{ème}}$ couche, les champs de température à droite et à gauche en un point x de cette couche s'écrivent respectivement sous la forme

$$\begin{aligned} T^>(x, x_s) &= T_+^>(x_s) e^{ik_{j+1}(x-x_s)} + T_-^>(x_s) e^{-ik_{j+1}(x-x_s)} & x > x_s \\ T^<(x, x_s) &= T_+^<(x_s) e^{ik_{j+1}(x-x_s)} + T_-^<(x_s) e^{-ik_{j+1}(x-x_s)} & x < x_s \end{aligned} \quad (23)$$

ce qui fournit, *via* les équations de continuité (10,11),

$$\begin{aligned} T_+^<(x_s) &= T_+^>(x_s) + \frac{S(x_s)}{2ik_{j+1}\kappa_{j+1}} \\ T_-^<(x_s) &= T_-^>(x_s) - \frac{S(x_s)}{2ik_{j+1}\kappa_{j+1}} \end{aligned} \quad (24)$$

La recherche de la fonction de Green sera achevée lorsque seront établies les relations liant les différentes composantes en x_s , tenant compte des conditions aux limites correspondant aux deux parties avant et arrière du multicouche. Étant donné la linéarité des équations de diffusion

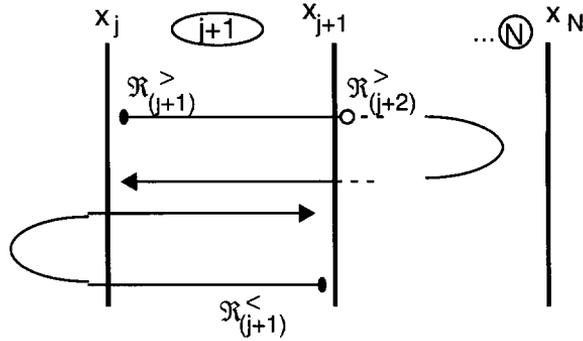


Fig. 2. — Représentation schématique des coefficients de réflexion généralisés $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ et $\mathcal{R}_{(j+1)}^<$. $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ est le coefficient de la partie du multicouche située à droite du point d'abscisse $x_j + \epsilon$. La loi de composition (Éq (37)) permet de construire $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ à partir de $\mathcal{R}_{(j+2)}^>$.

[Schematic of the overall reflection coefficients $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ and $\mathcal{R}_{(j+1)}^<$. The $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ coefficient is related to the multilayer part situated on the right side of the $x_{j+1+\epsilon}$ punctum. The composition law (Éq (37)) gives $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ from $\mathcal{R}_{(j+2)}^>$]

de la chaleur, les rapports entre les composantes progressive et régressive d'un même demi-espace (< et >) par rapport à la source seront des scalaires complexes. Ces relations s'écriront donc en fonction de coefficients de réflexion généralisés $\mathcal{R}^>(x_s)$ et $\mathcal{R}^<(x_s)$ tels que

$$\begin{aligned} T_+^>(x_s) &= \mathcal{R}^>(x_s) T_+^>(x_s) \\ T_+^<(x_s) &= \mathcal{R}^<(x_s) T_+^<(x_s) \end{aligned} \quad (25)$$

La détermination de ces coefficients est le but de la section suivante.

Le calcul matriciel est alors remplacé par une approche récursive qui a montré son efficacité en optique [16] et en mécanique quantique [17].

3. Approche récursive du multicouche

3.1. RÉCURRENCE. — La recherche de la fonction de Green s'effectuera sur l'exemple d'un plan source unique x_s placé en une couche $j + 1$ située entre les interfaces x_j et x_{j+1} .

Afin d'obtenir un traitement général, fournissant des expressions valides pour tous les plans sources possibles, il est utile d'introduire les coefficients de réflexion généralisés en chaque début de couche (Fig. 2). Les coefficients $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$ et $\mathcal{R}_{(j+1)}^<$ serviront alors à l'étude éventuelle de sources placées de façon quelconque dans chacune des couches ; le passage d'un emplacement à un autre s'effectuera par un simple déphasage (complexe), par exemple de x_j (où est évalué le coefficient $\mathcal{R}_{(j+1)}^>$) au point courant source x_s , (où se trouve la source).

En début de couche $j + 1$, juste après l'interface j , le lien entre la composante $T_+^>$ et la composante $T_+^>$ s'écrit

$$T_+^>(x_j) = \mathcal{R}_{(j+1)}^> T_+^>(x_j). \quad (26)$$

Ce coefficient peut être évalué en observant la construction des coefficients sur les cas du monocouche et du bicouche. À partir du coefficient de réflexion en début de couche N (juste après l'interface x_{N-1}), une récurrence fournit l'expression du coefficient de réflexion en début

de chaque couche [14, 17], compte tenu du reste du multicouche (Fig. 2)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(N)}^{\gt} &= r_N \exp(2i\beta_N) \\ \mathcal{R}_{(j+1)}^{\gt} &= \frac{r_{j+1} + \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}}{1 + r_{j+1} \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}} \exp(2i\beta_{j+1}), \quad j = 0 \text{ à } N - 2.\end{aligned}\quad (27)$$

La relation (26) possédant bien sûr son équivalent à l'interface située en x_{j+1} , soit

$$T_{-}^{\gt}(x_{j+1}) = \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt} T_{+}^{\gt}(x_{j+1}) \quad (28)$$

et les mêmes composantes, en x_{j+1} , pouvant être exprimées directement à partir du vecteur température en x_j :

$$\begin{pmatrix} T_{+} \\ T_{-} \end{pmatrix}_{x_j} = [\beta_{j+1}] [t_{j+1}] \begin{pmatrix} T_{+} \\ T_{-} \end{pmatrix}_{x_{j+1}} \quad (29)$$

ceci fournit directement des relations simples entre les composantes (+) et entre les composantes (-). utilisant les coefficients de réflexion et transmission locaux r_{j+1} , t_{j+1} et le coefficient généralisé $\mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}$:

$$\begin{aligned}T_{+}^{\gt}(x_{j+1}) &= \frac{t_{j+1} e^{i\beta_{j+1}}}{1 + r_{j+1} \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}} T_{+}^{\gt}(x_j) \\ T_{-}^{\gt}(x_{j+1}) &= \frac{t_{j+1} e^{-i\beta_{j+1}} \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}}{r_{j+1} + \mathcal{R}_{(j+2)}^{\gt}} T_{-}^{\gt}(x_j).\end{aligned}\quad (30)$$

Définies ici sur le sens *avant*, ces formules seront directement transcrites pour le sens *arrière*, avec transfert des notations afin d'en déduire les coefficients \mathcal{R}^{\lt} et les composantes du champ de température dans le demi-espace correspondant.

3.2. RÉPONSE À UNE SOURCE PLANE UNIQUE QUELCONQUE. — Les relations des paragraphes (2.4) et (3.1) permettent d'établir les expressions des composantes (+) et (-) dans les demi-espaces (>) et (<) de part et d'autre du plan source x_s situé entre x_j et x_{j+1}

$$T_{+}^{\gt}(x_s) = -\frac{S(x_s)}{2i\kappa_{j+1}k_{j+1}} \frac{[1 + \mathcal{R}_{(j+1)}^{\lt} e^{-2ik_{j+1}(x_{j+1}-x_s)}]}{[1 + \mathcal{R}_{(j+1)}^{\lt} \mathcal{R}_{(j+1)}^{\gt} e^{-2i\beta_{j+1}}]} \quad (31a)$$

$$T_{-}^{\gt}(x_s) = \mathcal{R}_{(j+1)}^{\gt} e^{-2ik_{j+1}(x_s-x_j)} T_{+}^{\gt}(x_s) \quad (31b)$$

(la relation (31b) fait apparaître le déphasage entre le coefficient de réflexion généralisé local (en x_s) et l'élément de la liste de coefficients en chaque interface). Des relations de même type sont aussi obtenues pour le sens arrière

$$T_{-}^{\lt}(x_s) = -\frac{S(x_s)}{2i\kappa_{j+1}k_{j+1}} \frac{[1 + \mathcal{R}_{(j+1)}^{\gt} e^{-2ik_{j+1}(x_s-x_j)}]}{[1 - \mathcal{R}_{(j+1)}^{\lt} \mathcal{R}_{(j+1)}^{\gt} e^{-2i\beta_{j+1}}]} \quad (32a)$$

$$T_{+}^{\lt}(x_s) = \mathcal{R}_{(j+1)}^{\lt} e^{-2ik_{j+1}(x_{j+1}-x_s)} T_{-}^{\lt}(x_s). \quad (32b)$$

Ces expressions forment, associées aux relations de récurrence (30), la fonction de Green du multicouche 1-D. Il suffit, en effet, d'utiliser la définition (Éq. (7)) pour obtenir le champ de température en tout point.

3.3. RÉPONSE INTÉGRÉE POUR UNE COUCHE. — Pour une distribution source continue, les champs de température issus de chacune des sources planes (formules (31–32)) devront être intégrés sur toute l'épaisseur de la couche, le champ de température total étant une simple somme des réponses individuelles. Il est alors utile, pour des raisons analytiques autant que numériques, de présenter les champs issus de la source en x_s sous forme de composantes ramenées sur les interfaces ; par exemple, la composante $T_+^>$ ramenée à l'interface située en x_j , due à la source x_s située dans le milieu $j + 1$ s'écrit

$$T_+^>(x_j, x_s) = -\frac{S(x_s)}{2i\kappa_{j+1}k_{j+1}} e^{ik_{j+1}(x_j - x_s)} \frac{[1 + \mathcal{R}_{(j+1)}^< e^{-2i\kappa_{j+1}(x_{j+1} - x_s)}]}{[1 - \mathcal{R}_{(j+1)}^< \mathcal{R}_{(j+1)}^> e^{-2i\beta_{j+1}}]}. \quad (33)$$

Ceci qui donne l'expression de la composante $T_+^>$ due à une distribution source continue $\zeta(x)$ dans cette couche $j + 1$,

$$T_+^>(x_j) = -\frac{\int_{x_j}^{x_{j+1}} dx_s \zeta(x_s) e^{ik_{j+1}(x_j - x_s)} [1 + \mathcal{R}_{(j+1)}^< e^{-2i\kappa_{j+1}(x_{j+1} - x_s)}]}{2i\kappa_{j+1}k_{j+1} [1 - \mathcal{R}_{(j+1)}^< \mathcal{R}_{(j+1)}^> e^{-2i\beta_{j+1}}]}. \quad (34)$$

L'équation (34) utilisée dans la récurrence (Éq. (30)) permet d'évaluer les composantes $T_+^>$ pour chaque interface en avant de cette couche $j + 1$. Des expressions identiques peuvent être établies pour les autres composantes. La contribution de cette couche source à la température sur toute l'interface s'en déduit alors. La réitération de l'algorithme pour les autres couches sources fournira, par addition directe, la réponse thermique du multicouche à l'ensemble des sources. Notons que ces formules (par exemple (34)) peuvent être utilisées pour évaluer la température alternative dans l'ensemble du multicouche, sauf dans la couche source elle-même. Ceci n'est en aucun cas gênant lorsque le découpage est fin, comme on le suppose dans la présente étude.

Dans certains cas, l'intégration peut se mener directement permettant de retrouver les expressions habituelles du champ de température en tout point, dû aux sources étendues.

3.4. APPLICATION : EXEMPLE DU PROFIL D'ABSORPTION. — Les sections précédentes sont ici imagées sur l'exemple d'un matériau montrant un profil d'absorption. De tels exemples sont rencontrés dans des échantillons liquides qui sont optiquement inhomogènes : l'étude en régime thermique modulé permet de remonter jusqu'à l'étude de la localisation de l'absorption [22].

Usuellement le faisceau lumineux est modulé à très basse fréquence, aussi toutes les sources thermiques $S(x_s)$ dans la profondeur de l'échantillon sont-elles en phase. Nous nous limitons ici à la présentation de la température en face avant, après intégration sur chaque source individuelle dont on évalue la contribution au plan x_0 . Il s'ensuit une courbe d'amplitude et une courbe de déphasage par rapport au signal source, qui sont les signatures de l'absorption et de la profondeur de celle-ci.

L'exemple correspond à une simple modélisation bicouche de sang centrifugé, comportant la partie plasma et la partie dense en erythrocytes. Les deux couches sont thermiquement fort semblables mais les coefficients d'absorption sont très différents, ce qui fournira une réponse thermique en surface très caractéristique. Les différentes valeurs utilisées ici sont données dans le tableau I [22] : ce sont des ordres de grandeurs réalistes. Bien sûr la modélisation grossière par un bicouche peut être améliorée par la donnée des profils optique et thermophysique.

L'épaisseur de l'ensemble est ici de 2 mm, dont 0,5 mm pour la partie plasma. Le faisceau 1-D modulé est supposé entrer du côté plasma. Ceci fournit un profil d'absorption représenté sur la figure 3.

Tableau I. — *Coefficients thermophysiques et absorption optique du sang centrifugé.*

[Optical absorption and thermal coefficients of the centrifuged blood.]

	conductivité thermique $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	diffusivité $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	coefficient d'absorption optique m^{-1}
plasma	0,56	$1,3 \times 10^{-7}$	500
globules rouges	0,58	$1,25 \times 10^{-7}$	20 000

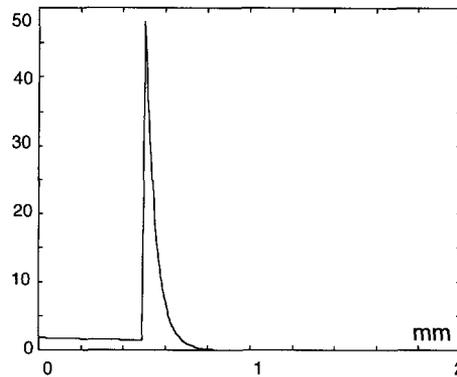


Fig 3. — La source de chaleur correspondant à l'absorption optique du modèle bicouche du sang centrifugé en fonction de la profondeur. Les deux mm de l'échantillon sont divisés en une partie de 0,5 mm de plasma de faible pouvoir d'absorption et d'une partie de 1,5 mm correspondant aux globules rouges. À partir de la réponse thermique en surface, on cherche à évaluer la profondeur de l'interface entre les deux parties.

[The heat source profile corresponding to the optical absorption of the two-layer model of centrifuged blood. The 2 mm thick sample is divided in a 0.5 mm plasma part with a small optical absorption and a 1.5 red blood cell part with a great absorption coefficient. From the a c thermal response, it will be possible to deduce the interface depth.]

Le système est ici modélisé par un multicouche composé de 160 couches. Il est possible de décrire l'absorption par l'intermédiaire de la formule (34) donnant la réponse de l'absorption par un profil continu. Nous avons souhaité utiliser ici une modélisation avec un seul plan source dans chaque petite couche, ce qui correspond à l'analyse numérique directe par fonction de Green. Les coefficients d'échange en surface avant et arrière ont été choisis égaux à $h_0 = h_N = 10 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$. La figure 4 montre le déphasage de la réponse thermique en face avant par rapport à la phase de la modulation lumineuse.

La réponse est ainsi obtenue par sommation directe des contributions en face avant dues aux 160 couches. L'utilisation des équations sources (31,32) et de l'équation de récurrence (30) fournit la température sur la surface extérieure du plasma. La figure 4 montre deux caractéristiques provenant du profil d'absorption et de la valeur complexe du vecteur de diffusion harmonique (Éq. (8)). Premièrement, pour les plus basses fréquences, toutes les sources contribuent de façon significative, avec des déphasages comparables (la longueur de diffusion thermique étant alors supérieure à la profondeur de la partie de l'échantillon où le faisceau excitateur pénètre).

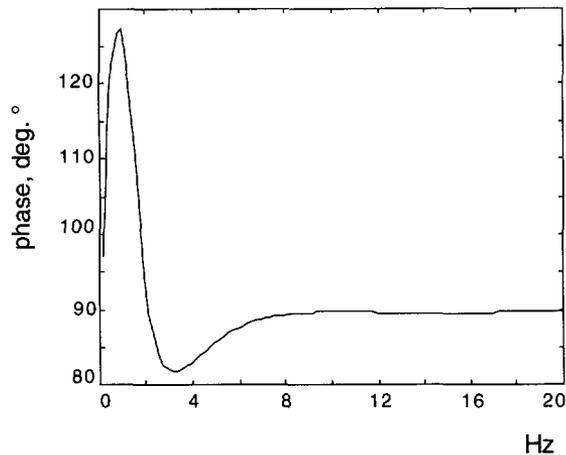


Fig. 4. — Réponse en phase (degrés) du champ de température en face avant. Les fréquences varient entre 0,2 et 20 Hz.

[The phase response of the a c temperature at front surface. The frequencies vary between 0.2 and 20 Hz.]

La descente rapide de la phase du signal correspond à la croissance du déphasage entre les contributions de surfaces et celle du pic d'absorption de chaleur à la profondeur de 0,5 mm. Deuxièmement, la phase, pour les fréquences de modulation plus élevées (pour ce milieu faible conducteur thermique, 20 Hz) tend vers la valeur de 90°. Ceci est bien caractéristique d'un échantillon thermiquement épais et optiquement mince : pour ces fréquences, le signal en face avant est ici dû à la seule contribution du plasma, qui s'avère, quant à la source de chaleur, pratiquement homogène.

4. Cas du dépôt en surface

4.1. FORMALISME DU DÉPÔT EN SURFACE. — Le présent formalisme s'applique directement au cas du dépôt de chaleur en surface qui est une approximation convenable lors de l'excitation laser modulée sur des matériaux optiquement opaques ou rendus tels par dépôt de peinture ou de noir de fumée.

L'étude en est bien sûr très simplifiée parce que le plan source est unique (face d'entrée x_0) et que la liste des coefficients de réflexion généralisés n'a été établie que pour le sens avant.

Les équations à la limite en x_0 (Éq. (14)), les définitions du vecteur température (Éq. (7)) et des coefficients généralisés, vérifiant ici, pour le début du multicouche

$$T_-(x_0) = \mathcal{R}_{(1)} T_+(x_0) \quad (35)$$

mènent à

$$T(x_0) = T_+(x_0) + T_-(x_0) = - \frac{S_0 \{1 + \mathcal{R}_{(1)}\}}{[ik_1 \kappa_1 \{1 - \mathcal{R}_{(1)}\} - h_e \{1 + \mathcal{R}_{(1)}\}]} \quad (36)$$

La détermination du champ de température en toute interface est obtenue par la loi d'itération (30) :

$$T(x_j) = T(0, \omega) \left\{ \frac{1}{1 + \mathcal{R}_{(1)}} \left[\prod_{m=1}^j \frac{t_m}{1 + r_m \mathcal{R}_{(m+1)}} \right] e^{i \sum_{m=1}^j \beta_m} + \frac{\mathcal{R}_{(1)}}{1 + \mathcal{R}_{(1)}} \left[\prod_{m=1}^j \frac{t_m \mathcal{R}_{(m+1)}}{r_m + \mathcal{R}_{(m+1)}} \right] e^{-i \sum_{m=1}^j \beta_m} \right\} \quad (37)$$

où $T(x_0)$ a été noté $T(0, \omega)$. Plus simplement, on peut écrire

$$T(x_j) = T(0, \omega) \{ A_j e^{iH_j} + B_j e^{-iH_j} \} \quad (38)$$

avec

$$H_j = \sum_{m=1}^j \beta_m. \quad (39)$$

L'expression générale (37) peut prendre une forme différente, obtenue en remarquant que la partie régressive est directement liée, en toute interface, à son homologue progressive par la définition (26). Ce qui mène à

$$T(x_j) = T(0, \omega) \frac{1 + \mathcal{R}_{(j+1)}}{1 + \mathcal{R}_{(1)}} \left[\prod_{m=1}^j \frac{t_m}{1 + r_m \mathcal{R}_{(m+1)}} \right] e^{i \sum_{m=1}^j \beta_m} = T(0, \omega) C_j e^{iH_j}. \quad (40)$$

Ainsi que nous l'avons souligné, les diverses expressions (37, 40) sont les expressions analytiques du champ de température alternative obtenu dans le cas d'une source en surface. Ce ne sont que les développements littéraux des analyses matricielles du même problème. Remarquons ici que le traitement multicouche peut être reformulé à partir de couches à profils linéaires [19] (conductivité ou chaleur volumique) selon un schéma analogue à celui de la présente étude : les équations de transfert (18,19) et les équations d'interface (16,17) se développent alors sur une base de fonctions de Bessel ou d'Airy et de leurs dérivées. D'une façon plus générale, chaque profil analytiquement intégrable peut être ainsi utilisé comme base de décomposition du profil continu. Nous limitons cette étude au cas des multicouches en marches d'escalier du fait de la simplicité des formules obtenues et des possibilités de comparaisons directes avec nombre de cas de multicouches à couches réelles traités par les méthodes matricielles.

Dans le cas de fréquences de modulations pas trop basses (pour un métal, 1000 Hz correspondent à une longueur de diffusion d'environ 50 μm), la réponse provient essentiellement des caractéristiques de la surface. Les coefficients d'échange (Éqs. (22,35)) ont alors une importance négligeable : les coefficients de réflexion en surface sont égaux à 1. Les coefficients de réflexion généralisés $\mathcal{R}_{(1)}(\omega)$ tendant vers 0 pour ces fréquences élevées, il vient directement

$$T(x_0, \omega) \approx -\frac{S_0}{i k_1(\omega) \kappa_1}. \quad (41)$$

Ce fait bien connu est d'ailleurs la première étape des recherches de solutions du problème inverse [19,23]. À basse fréquence, la réponse sera caractéristique du matériau dans sa totalité. Dans le cas d'un échantillon semi-infini, se comportant de façon homogène au-delà de la couche inhomogène d'épaisseur L en surface, la réponse est alors dominée par celle du massif : il vient en effet

$$T(x_0, \omega \rightarrow 0) \approx -\frac{S_0}{i k_L(\omega \rightarrow 0) \kappa_L - h_e}. \quad (42)$$

Rappelons que l'équation (36) pour $\omega = 0$ donnera la valeur du champ de température continue dans le cas d'un échantillon fini en épaisseur : le calcul du coefficient $\mathcal{R}_{(1)}(\omega \rightarrow 0)$ est alors à effectuer précisément.

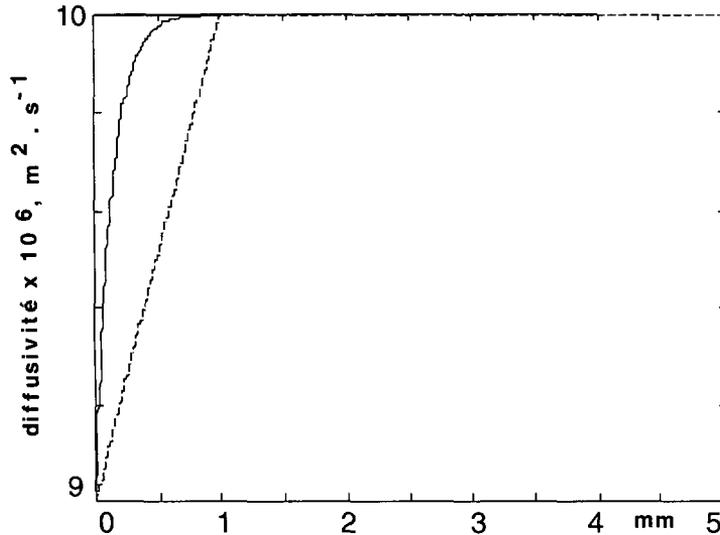


Fig. 5. — Profils de diffusivité correspondant aux modèles étudiés. L'épaisseur correspondant aux profils [$\lambda = 70 \text{ m}^{-1}$ (---) et $\lambda = 7000 \text{ m}^{-1}$ (—)] est approchée par un multicouche composé de 400 couches différentes.

[Diffusivity distributions corresponding to the studied sample. These are used in WKB approximation or in the recursive multilayer calculus. The varying diffusivity part is approximated as a 400 layers multilayer. [$\lambda = 70 \text{ m}^{-1}$ (---) and $\lambda = 7000 \text{ m}^{-1}$.]

4.2. ÉTUDE COMPARATIVE SUR PROFILS DOUX

4.2.1. *Introduction.* — Les solutions générales (Éqs. (37,42)) permettent une analyse numérique de la solution dans le cas d'un nombre quelconque de couches. Ci-après nous appellerons ces solutions comme étant les solutions *exactes* du problème. Elles sont donc utilisables dans les techniques de recherche des solutions du problème inverse [19, 23]. Ces techniques font appel de nombreuses fois aux algorithmes de calcul de la réponse en fréquence de la température de surface. Il apparaît alors intéressant d'obtenir des expressions, même approchées, qui soient analytiques. Nous présentons ici les deux approches.

L'une correspond à celle qui est connue sous le nom de modèle de l'oscillateur harmonique thermique [3,4] et qui est liée à une approximation BKW appliquée aux profils thermophysiques doux.

L'autre est directement issue du formalisme présenté plus haut. Il s'agit d'une approximation concernant le coefficient de réflexion généralisé et limitée aux échantillons semi-infinis présentant un profil de profondeur en surface.

Afin d'effectuer les comparaisons entre les réponses *exactes* de profils différents ou entre la réponse exacte d'un profil et les expressions approximatives de ce même profil, nous choisissons comme exemple une lame d'épaisseur 5 mm, montrant un profil de conductivité et de diffusivité thermiques sur une profondeur $L = 1 \text{ mm}$, mais homogène quant à la chaleur spécifique et à la densité (Fig. 5). Le profil que nous proposons ici sera traité numériquement, sans recherche d'une éventuelle solution purement analytique du même problème. La diffusivité, entre la valeur

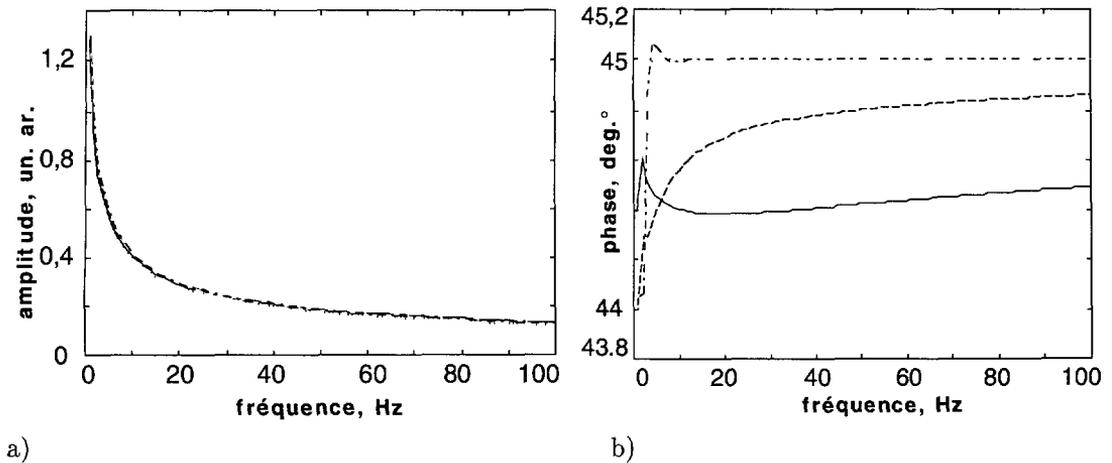


Fig. 6. — Réponses en face avant pour les deux profils, $\lambda = 70 \text{ m}^{-1}$ (- - -) et $\lambda = 7000 \text{ m}^{-1}$ (—), pour des fréquences variant de 1 Hz à 100 Hz. Les courbes (. .) rappellent la réponse de l'échantillon homogène (λ infini), celles notées (- · - ·) indiquent l'approximation .BKW. a) Amplitude (unités arbitraires) de la température sinusoïdale b) Phase en degrés.

[Front face response of the two distributions, $\lambda = 70 \text{ m}^{-1}$ (- - -) and $\lambda = 7000 \text{ m}^{-1}$ (—) depending on frequency (from 1 Hz to 100 Hz). The (. .) curves show the homogeneous sample response (λ infinite). The (- · - ·) curves indicate the BKW responses. a) Harmonic temperature amplitude (arbitrary units). b) Harmonic temperature phase (degrees).]

α_0 en surface et la valeur α_L à la profondeur L , varie selon

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_L - \alpha_0}{[1 - e^{-\lambda x}]} [1 - e^{-\lambda x}]. \quad (43)$$

Dans nos exemples $\alpha_0 = 0,9 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\alpha_L = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Le profil de conductivité est, bien sûr, directement proportionnel (ici, κ varie entre 9 et $10 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Le reste de la couche est supposé homogène, les valeurs des paramètres étant celles atteintes en $x = L$. Les valeurs choisies correspondent à un profil monotone, éventuellement doux, en fonction du coefficient λ choisi. Les fréquences de modulation varieront de façon à étudier les résultats pour des échantillons thermiquement minces ou un peu épais. La lame est supposée placée dans un milieu convectif dont les échanges thermiques avec le milieu conducteur seront modélisés par les coefficients $h_0 = h_N = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Les figures 6 fournissent les amplitudes et phases de la température en face avant de l'échantillon à profil décrit ci-dessus, en fonction de la fréquence de modulation. Ces profils continus sont découpés en 400 couches en ce qui concerne la partie variable. La partie homogène est ici traitée comme une couche unique.

Les réponses en amplitude des champs de température alternatives sont pratiquement indiscernables l'une de l'autre. Il n'en est pas de même en ce qui concerne les phases (ici données par rapport à la phase de la modulation de l'excitation optique, compte tenu de la convention de phase (Éq. (2)) : on observe des oscillations croisées des deux profils. L'écart est faible (0,5 degré au maximum). L'étude, poursuivie vers les fréquences plus élevées, montre une lente évolution vers le déphasage 45 degrés, typique du matériau thermiquement épais et optiquement opaque. Les figures donnent aussi, aux fins de comparaison, les résultats d'une couche homogène correspondant aux valeurs maximales du profil. À basses et très basses fréquences

seraient observées les oscillations (décalées les unes par rapport aux autres en fonction du profil) correspondant au phénomène de confinement de la solution sinusoidale dans l'échantillon thermiquement mince.

4.2.2. *Profils doux et approximation BKW.* — Pour des profils doux, il est tentant d'envisager les solutions analytiques des approximations (BKW) des équations différentielles à coefficients non-constants du type de l'équation de la chaleur (4).

L'observation de l'équation (4) suggère de rechercher des solutions du type

$$T(x) = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx} \quad (44)$$

où les termes exponentiels rappellent les solutions obtenues dans le cas d'un échantillon homogène (sans source). La méthode BKW [6, 7] consiste à chercher des solutions sous la forme

$$T(x) = e^{\pm i\sigma(x)}. \quad (45)$$

Une solution approchée est recherchée sous la forme

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x) \quad (46)$$

La première approximation consiste à choisir pour $\sigma_0(x)$ la solution propre au milieu homogène local (possédant les valeurs locales des coefficients thermophysiques), qui vérifie

$$-\kappa\sigma_0'^2 = -i\omega\rho c. \quad (47)$$

Dans l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(x)$ (Éqs. (4,45-47)), les dérivées $\sigma_1'^2$, $\kappa\sigma_1''$ et $\kappa'\sigma_1'$ sont alors négligées [6, 7]. Le calcul se mène alors comme en mécanique quantique et fournit directement

$$\sigma_0(x) = \pm \int_0^x du \sqrt{\frac{i\omega}{\alpha(u)}} = \pm H(x) \quad (48)$$

et

$$T_{\text{BKW}}(x) = T(0) \sqrt{\frac{\epsilon(0)}{\epsilon(x)}} \left[A e^{iH(x)} + B e^{-iH(x)} \right] \quad (49)$$

où a été introduite l'effusivité thermique

$$\epsilon(x) = \sqrt{\rho(x)c(x)\kappa(x)}. \quad (50)$$

Dans l'équation (49), $T(0)$, la température en surface, et les variables A et B doivent être évaluées à partir des conditions aux limites.

On peut, en passant, noter l'aspect identique des équations (37, 44 et 49). La réponse multicouche donne donc directement la décomposition en tout point du profil de la température exprimée sur la base d'ondes planes locales. L'approximation BKW revenant à approcher cette décomposition par l'intermédiaire du rapport des effusivités. Notons ici que le lien direct entre la méthode récursive du multicouche et l'approximation BKW peut se faire à l'aide du premier terme de la série infinie de Bremmer [8].

Pour les fréquences les plus élevées, l'on peut négliger les coefficients d'échange ; les conditions aux limites permettant l'évaluation des deux constantes A et B sont constituées par la donnée du flux de chaleur en face avant, la nullité du flux en face arrière de l'échantillon (épaisseur totale D) et l'identité de la température $T(0)$ au point x_0 lui-même. Il vient

$$T_{\text{BKW}}(0, \omega) = -\frac{S_0}{ik_1\kappa_1} \frac{1 + e^{2iH(\omega, D)}}{1 - e^{2iH(\omega, D)}}. \quad (51)$$

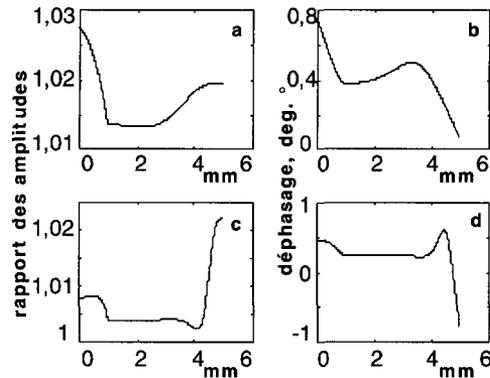


Fig. 7. — Comparaison des profils de température en profondeur des approches multicouches et de l'approximation BKW, pour le profil doux 70 m^{-1} . Rapport de l'amplitude BKW sur l'amplitude multicouche : fréquence a) 1 Hz ; c) 10 Hz. Déphasage entre les deux réponses : fréquence b) 1 Hz ; d) 10 Hz. Les coefficients d'échanges sont supposés nuls. Le profil se trouve sur le premier mm.

[Comparison between the temperature depth profiles for the multilayer and BKW responses. The profile is the 70 m^{-1} one. Amplitude ratios (BKW/multilayer). a) 1 Hz ; c) 10 Hz. Phase lags: b) 1 Hz ; d) 10 Hz.]

Par construction même, une telle solution n'est certainement pas valide à proximité d'interfaces de la multicouche à variations abruptes mais peut être envisagée dans le cas de profils doux, partout en dehors de la surface excitée. L'expression (49) est identique à celle fournie par l'approximation THO [5] qui est utilisée couramment dans l'étude de certains problèmes inverses [2, 23].

Notons ici que l'approche BKW peut être améliorée en procédant à un changement de variable par définition d'une température effective $(\kappa(x))^{-1/2}T(x)$ [9]. L'équation différentielle que suit cette nouvelle variable, en lieu et place de l'équation (1) permet, en particulier, l'analyse multicouche selon l'algorithme présenté ici ; cependant les termes sources sont alors plus compliqués.

Menons maintenant une analyse numérique de la comparaison de l'approche exacte et de l'approximation BKW de la réponse du multicouche. L'étude se fera à partir de l'exemple du profil précédemment étudié. Les conclusions n'auront donc pas de valeur générale mais montreront ce que l'on peut attendre de l'approximation et ce que sont ses limites.

Tout d'abord, nous nous intéressons à la réponse en surface pour le balayage en fréquence de 1 à 100 Hz du profil 70 m^{-1} . Les résultats ont été reportés sur les figures 6. À l'échelle de la figure, la réponse en amplitude BKW est indécélable des autres (Fig. 6a). Comme nous le verrons sur les autres figures, les variations en amplitude, dans le domaine où la température n'est pas négligeable, sont de l'ordre de quelques pour cent. La figure 6b montre la réponse en phase. Il apparaît nettement ici que l'approche BKW révèle ici sa principale déficience. Même si les différences angulaires avec les réponses exactes sont faibles, ces déphasages de quelques dixièmes de degrés prennent toute leur importance puisque la précision sur les phases est essentielle pour la solution du problème inverse de ce genre de profil [19].

Les figures 7 présentent les rapports des amplitudes des réponses BKW et exactes, ainsi que les déphasages relatifs de ces réponses pour le cas du profil 70 m^{-1} , et ce pour les deux fréquences 1 et 10 Hz.

La présence de la partie profil (1^{er} mm) est clairement mise en évidence. La partie homogène montre l'effet de bord dû à la face arrière. En face avant ($x = 0$), les courbes indiquent les valeurs précises des différences représentées sur les figures 6a et 6b. Comme nous l'avons noté, les différences de phase sont trop grandes pour permettre une utilisation systématique de l'approximation (49) dans la résolution du problème en thermophysique.

4.2.3. *Échantillon semi-infini : approximation analytique.* — Le profil est supposé semi-infini, homogène au-delà de la profondeur L , à laquelle on peut faire correspondre, lors d'un découpage multicouche, l'indice de couche L . De ce fait, les différents coefficients généralisés $\mathcal{R}_{(L+j)}$ sont tous nuls. Par ailleurs, si le profil est doux et le découpage suffisamment fin, les différents coefficients locaux r_j (pour j variant de 1 à L) ainsi que les déphasages β_j sont faibles. Il s'ensuit que les dénominateurs apparaissant dans les coefficients généralisés \mathcal{R} peuvent être pris égaux à 1. On obtient alors pour l'expression de ce coefficient en $x = 0$, la série finie suivante

$$\mathcal{R}_{(1)} = r_1 e^{2i k_1 d_1} + r_2 e^{2i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} + \dots + r_L e^{2i(k_1 d_1 + \dots + k_L d_L)} \quad (52)$$

D'autre part, chacun des coefficients localisés r_j prend la forme infinitésimale

$$r(x) = \frac{\epsilon(x) - \epsilon(x + dx)}{\epsilon(x) + \epsilon(x + dx)} \approx -\frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{\epsilon}. \quad (53)$$

Il s'ensuit que l'expression (53) prend une forme continue

$$\mathcal{R}_{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^L dx \left\{ \frac{d}{dx} \ln(\epsilon(x)) \exp \left[2i \int_0^x du k(u) \right] \right\}. \quad (54)$$

Dans le cas où le coefficient d'échange est négligeable et où le profil doux est tel que $\mathcal{R}(1)$ est petit devant 1, le champ de température en surface s'écrit

$$\begin{aligned} T(0, \omega) &= T_1(0, \omega) [1 + 2\mathcal{R}_{(1)}] \\ &= T_1(0, \omega) \left\{ 1 - \int_0^L dx \left\{ \frac{d}{dx} \ln(\epsilon(x)) \exp[2iH(x)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

où $T_1(0, \omega)$ est la température en surface, à fréquence ω , d'un échantillon semi-infini homogène dont les coefficients thermophysiques sont ceux de la surface de l'échantillon réel (Éq. (36))

$$T_1(0, \omega) = -\frac{S_0}{ik_1 \kappa_1}. \quad (56)$$

Pour les profils étudiés, les tracés des réponses de la température de surface (phase et amplitude), pour les fréquences correspondant à celles présentées sur la figure 6, nous ont montré que les courbes sont *pratiquement indiscernables* de celles fournies par l'approche *exacte* : ceci en amplitude et en phase. Les déviations n'apparaissent qu'aux fréquences les plus basses (pour l'exemple, inférieures à 1 Hz) ; on peut alors utiliser l'équation (36) et l'approximation (54). L'intérêt de l'approximation est l'existence de profils pour lesquels la fonction $H(x)$ est intégrable. Dans ce cas, le gain en temps de calcul, par rapport à celui nécessaire pour les itérations de la réponse exacte, est important.

L'équation (55) peut être utilisée de façon semblable à l'expression fournie récemment à l'occasion de la recherche du profil de diffusivité de surface d'échantillon solides, dans le cadre du modèle THO [2]. Il faut noter que l'expression (55) n'est pas liée à un profil particulier, contrairement à l'équation équivalente de la référence [2].

Rappelons cependant que ces approximations ne peuvent prétendre décrire des profils à variations discrètes, contrairement à l'approche multicouche.

5. Considérations informatiques, convergences

L'approche multicouche ici proposée possède des caractéristiques intéressantes. Nous avons montré lors d'une étude adaptée aux barrières de potentiel en mécanique quantique que le bruit de quantification, inhérent à l'arbitraire de la découpe en marches d'escalier, n'avait pas d'influence de type bruit sur les résultats physiques [17], ici le champ de température. Bien sûr, l'approche d'un profil continu par un découpage de plus en plus fin manifeste une convergence vers la limite théorique. Cette convergence peut être accélérée en choisissant un découpage adapté au profil (marches de hauteur et profondeur variables) ; elle est d'autant plus lente que la fréquence étudiée est plus grande.

Comme nous l'avons signalé, la méthode récursive n'utilise aucun calcul matriciel [14, 15, 17, 19]. L'étude numérique des dénominateurs des expressions (30) ne montre aucun comportement compliqué. Dans les faits, la limite apparaît repoussée aux valeurs extrémales de champs de température permises par le logiciel de calcul. Ceci permet de décrire des centaines de longueurs de diffusion thermique.

Les diverses méthodes que constituent les approches matricielles, récursives ou purement analytiques, peuvent être confrontées aux puissants modes de calculs que sont les méthodes aux éléments ou différences finies. Pour des discrétisations fines les résultats sont bien sûr identiques. Il faut noter que, pour les problèmes 1-D, les logiciels de calculs sont souvent trop lourds et de ce fait trop lents par rapport à la méthode des quadripôles ou la méthode récursive. Ils perdent alors l'avantage qu'offre leur puissance, vis-à-vis de la lisibilité des méthodes liées plus directement à l'expression mathématique de l'équation de diffusion de la chaleur.

Les méthodes récursives (quadripôle ou analytique) mènent à des évaluations numériques rapides, le temps de calcul dépendant de façon linéaire du nombre de couches introduit. De même, toute la mémoire peut être réservée à la liste des coefficients \mathcal{R} . Le nombre de couches peut ainsi facilement atteindre les dizaines de milliers. Notons que cette caractéristique se retrouve aussi sur les découpages multicouches construits sur les fonctions de Bessel [19]. D'une façon pratique, les calculs peuvent être effectués sur des ordinateurs personnels aux performances réduites.

6. Conclusion

L'introduction des coefficients de réflexion généralisés nous a permis de fournir une évaluation des fonctions de Green spatiales (à fréquence temporelle constante) de l'équation de diffusion de la chaleur pour un multicouche à profil thermophysique quelconque. L'utilisation de la méthode récursive simplifie énormément la présentation analytique et numérique même dans le cas d'un très grand nombre de couches ; ce qui permet pratiquement de traiter les profils continus.

Cette approche par la fonction de Green introduit directement à l'étude de la réponse thermophysique d'échantillons montrant des profils d'absorption quelconques.

Ces expressions générales ont ensuite été appliquées afin de fournir le champ de température d'un échantillon soumis à une excitation de surface. Cette température prend alors une forme analytique utilisant la loi de récurrence. Des liens ont été établis avec l'approximation BKW ou la méthode THO parfois utilisée en thermique et nous avons fourni une approximation analytique plus satisfaisante dans le cas de l'échantillon semi-infini.

La traduction informatique est directe, les calculs des champs donnés ici comme exemples (800 couches) ne demandent que quelques secondes sur un ordinateur personnel.

Comme pour les approches matricielles usuelles, le formalisme unidimensionnel peut être sans difficulté généralisé à des sources thermiques de forme quelconque. Cette généralisation se fait au moyen des transformées intégrales, transformée de Fourier bidimensionnelle ou transformée

de Hankel pour les profils de sources axisymétriques [10, 14, 20]. Par ailleurs, les coefficients de réflexion et transmission locaux (r_j et t_j) peuvent être transformés afin de donner accès à des modélisations différentes : résistances thermiques de contacts, aspects capacitifs [11, 12]. Il est aussi possible de placer des sources au niveau des interfaces elles-mêmes. La structure du calcul est alors intégralement conservée.

Rappelons, pour terminer, que toute cette étude est fondée sur le lien entre l'équation de Helmholtz et l'équation de la chaleur. Aussi l'étude peut être reprise, quant à sa structure mathématique et son expression informatique pour l'ensemble des réponses optique, thermique et acoustique de l'échantillon.

Bibliographie

- [1] Balageas D., Le contrôle non destructif par méthodes thermiques, *Rev. Gén. Therm. Fr.* **356-357** (1991) 483-498.
- [2] Mandelis A. and Munidasa M., Depth profilometry of near-surfaces inhomogeneities via laser-photothermal probing of the thermal diffusivity of condensed phases, *Int. J. Thermophys.* **15** (1994) 1299-1309.
- [3] Mandelis A., Theory of photothermal-wave diffraction and interference in condensed media, *J. Opt. Soc. Am. A* **6** (1989) 298-308.
- [4] Mandelis A., Hamilton-Jacobi formulation and quantum theory of thermal-wave propagation in the solid state, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 2676-2683.
- [5] Aamodt L.C. and Murphy J.C., Thermal effects in materials with continuously varying optical and thermal properties in one dimension, *Can. J. Phys.* **64** (1986) 1221-1229.
- [6] Landau L. and Lifchitz E., *Mécanique Quantique* (Mir Éd., Moscou, 1967).
- [7] Morse P.M. and Feshbach H., *Methods of theoretical physics, II* (McGraw-Hill, New-York, 1953) pp. 1093-1116.
- [8] Bellman R., *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering* (Dover, New York, 1972) pp. 100-103.
- [9] Thakur A.K.S., Periodic heat transfer through an inhomogeneous medium, *Lett. Heat Mass Trans.* **9** (1982) 385-394.
- [10] Vaez Iravani M. and Wickramasinghe H.K., Scattering matrix approach to thermal wave propagation in layered structures, *J. Appl. Phys.* **58** (1985) 122-131.
- [11] Degiovanni A., Lamine A.-S. and Moyne C., Thermal contacts in transient states: a new model and two experiments, *J. Therm. Heat Trans.* **6** (1992) 356-363.
- [12] Degiovanni A., Conduction dans un "mur" multicouche avec sources, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31** (1988) 553-557.
- [13] Bellman R. and Kalaba R., Functional Equations, Wave Propagation and Invariant Imbedding, *J. Math. Mech.* **8** (1959) 683-704.
- [14] Madison A. and McDaniel T.W., Temperature distributions produced in an N -layer film structure by static or scanning laser or electron beam with application to magneto-optical media, *J. Appl. Phys.* **66** (1989) 5738-5748.
- [15] Opsal J. and Rosencwaig A., Thermal-wave depth profiling. Theory, *J. Appl. Phys.* **53** (1982) 4240-4246.
- [16] Vigoureux J.-M., The reflection of light by planar stratified media: the groupoid of amplitudes and a phase Thomas precession, *J. Phys. A* **26** (1993) 385-393.

- [17] Grosse Ph., Vigoureux J.M. and Baida F., Nonlocal approach to scattering in one-dimensional problem, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 3627-3637.
- [18] Mandelis A., Peralta S.B. and Thoen J., Photoacoustic frequency-domain depth profiling of continuously inhomogeneous condensed phases, *J. Appl. Phys.* **70** (1991) 1761-1770.
- [19] Lan T.T.N., Seidel U. and Walther H.G., Theory of microstructural depth profiling by photothermal measurements, *J. Appl. Phys.* **77** (1995) 4739-4745.
- [20] Depasse F. and Grosse Ph., Use of two-dimensional Fast Fourier Transform in modulated harmonic thermal diffusion, *Int. J. Heat Mass Transfer* **39** (1996) 3761-3764.
- [21] Özisik N., Heat conduction (Wiley, New-York, 2nd Ed., 1993).
- [22] Antoniow J.S., Egée M. and Chirtoc M., Characterization of sedimentation processes using photopyroelectric monitoring, *Ferroelectrics* **165** (1995) 215-229.
- [23] Ma T.-C., Munisada M. and Mandelis A., Photoacoustic frequency-domain depth profilometry, *J. Appl. Phys.* **71** (1992) 6029-6035.