



HAL
open science

Détermination du champ électromagnétique dans un résonateur linéaire supraconducteur à HTC

A. Trotel, S. Sautrot, M. Pyee

► **To cite this version:**

A. Trotel, S. Sautrot, M. Pyee. Détermination du champ électromagnétique dans un résonateur linéaire supraconducteur à HTC. *Journal de Physique III*, 1994, 4 (11), pp.2271-2279. 10.1051/jp3:1994277 . jpa-00249261

HAL Id: jpa-00249261

<https://hal.science/jpa-00249261v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

02.60 — 41.10H — 74.60

Détermination du champ électromagnétique dans un résonateur linéaire supraconducteur à HTC

A. Trotel ⁽¹⁾, S. Sautrot ⁽²⁾ et M. Pyee ⁽²⁾

⁽¹⁾ Alcatel Alsthom Recherche, route de Nozay, 91460 Marcoussis, France

⁽²⁾ LDIM, Université Paris 6, Tour 12, 4 Place Jussieu, 75256 Paris (EA DRED 253-DS4), France

(Reçu le 3 février 1994, révisé le 26 avril 1994, accepté le 6 mai 1994)

Résumé. — Cet article décrit la configuration du champ électromagnétique dans un résonateur linéaire SHTC. Deux domaines sont considérés : 1) dans le ruban supraconducteur, 2) dans le milieu diélectrique entourant le ruban. Ce calcul s'appuie sur la densité de courant donnée par Bowers [1, 2] pour une ligne infinie supraconductrice. La densité de courant dans le résonateur est définie par ces relations et les conditions de résonance.

Abstract. — In this paper, the electromagnetic field configuration in a linear SHTC resonator is described. Two areas are considered : 1) the superconducting strip, 2) the dielectric around the strip. The calculation is based on the current density given by Bowers [1, 2] for an infinite superconducting line. The current density in the resonator is defined by these relations and the resonance conditions.

Introduction.

Les résonateurs planaires permettent la mesure en microonde des impédances de surface des matériaux à haute température critique (SHTC).

La modélisation de ces résonateurs est abordée de plusieurs manières :

- par des schémas équivalents à composants discrets [3, 4] ;
- par des techniques numériques :
 - des méthodes modales [5, 6] ;
 - des méthodes d'éléments finis [7, 8] ;
 - des méthodes des moments [9].

Nous présentons ici le calcul du champ électromagnétique dans un résonateur linéaire supraconducteur par une méthode intégrale. Le calcul que nous proposons, a l'avantage de donner des expressions analytiques du champ électromagnétique, à partir d'une densité de courant connue. La définition de la densité de courant repose sur la relation donnée par Bowers [1, 2] pour une ligne supraconductrice infinie et sur les conditions de résonance. Récemment,

ces expressions de la densité de courant ont été utilisées pour obtenir des longueurs de pénétration effectives à partir de mesures de variation d'inductance cinétique à une excitation lumineuse [10]. Le champ à l'intérieur du ruban se déduit alors des équations de London. Le champ à l'extérieur du ruban, dans le milieu diélectrique, est obtenu au prix de deux approximations par la détermination du potentiel vecteur.

Définition de la densité de courant.

Contrairement aux développements classiques de la méthode intégrale, qui échantillonne la densité de courant au moyen de distributions et qui détermine ensuite les champs et les courants par des méthodes numériques (Galerkin par exemple) [11], nous allons supposer ici cette densité connue.

La configuration du circuit analysé est représentée figure 1.

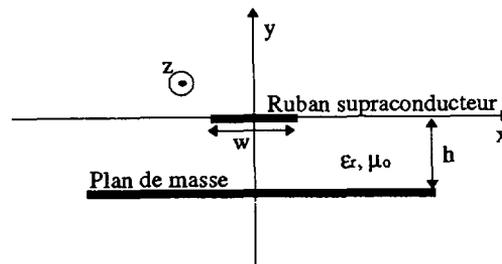


Fig. 1. — Schéma en coupe du résonateur.

[Cross section of the resonator.]

Le résonateur est constitué d'un ruban supraconducteur de largeur w , de longueur L et d'épaisseur d , séparé du plan de masse par une distance h . Le milieu entourant le ruban est supposé *homogène et isotrope*, de constante diélectrique ϵ_r et de perméabilité μ_0 .

La distribution de la densité de courant dans le résonateur s'écrit $J(x, y, z)$. Nous supposons que l'on peut séparer les variables, d'où $J(x, y, z) = J(x)J(y)J(z)$:

- pour $J(x)$ et $J(y)$, nous utilisons les expressions approchées donnée par Bowers [1, 2] pour une ligne supraconductrice infinie ;
- pour $J(z)$, la résonance impose les conditions aux limites.

Bowers se place dans le cas où l'épaisseur d du film supraconducteur est comparable à la longueur de pénétration de London λ_L et la largeur w du ruban est très grande devant λ_L . Il suppose alors $J(y)$ constant et définit $J(x)$ par :

$$\text{pour } |x| < \frac{w}{2} - \frac{a\lambda_L^2}{2d}, \quad J(x) = \frac{J(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2}} \quad (1a)$$

$$\text{pour } \frac{w}{2} - \frac{a\lambda_L^2}{2d} < |x| < \frac{w}{2}, \quad J(x) = J\left(\frac{w}{2}\right) \exp\left(-d \frac{\left(\frac{w}{2} - |x|\right)}{a\lambda_L^2}\right) \quad (1b)$$

avec
$$J\left(\frac{w}{2}\right) = J(0)/\lambda_L \sqrt{\frac{wd}{2a}} \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

où a est de l'ordre de l'unité.

Dans le cas du résonateur et suivant la direction de propagation z (Fig. 2), la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie s'exprime par la somme :

$$A \exp\left[j\left(\beta\left[z + \frac{L}{2}\right]\right)\right] + B \exp\left[j\left(\beta\left[z - \frac{L}{2}\right]\right)\right] \quad \text{où } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2a)$$

où A et B sont des constantes.

Les conditions aux limites imposent à $J(z)$ d'être nul aux extrémités. On en déduit alors :

$$J(z) = \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) \cos(\beta z) \quad \text{où } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2b)$$

Champ à l'intérieur du ruban supraconducteur.

D'après les équations de London :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \cdot \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \text{rot } \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \cdot \mathbf{B}. \quad (3)$$

La densité de courant telle que l'a définie Bowers (relations (1a) et (1b)), n'est pas dérivable aux points de raccordement $|x| = \frac{w}{2} - \frac{a\lambda_L^2}{2d}$.

Pour satisfaire les conditions de continuité de $J(x)$ et de sa dérivée, on positionne les nouveaux points de raccordement en $|x_r| = \frac{w}{2} - \frac{a\lambda_L^2}{2d} \left(1 - \frac{a\lambda_L^2}{2dw}\right)$.

Cette modification entraîne une variation de

$$J\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{en} \quad J\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{J(0)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2x_r}{w}\right)^2}} \exp\left(\frac{d}{a\lambda_L^2} x_r\right).$$

Les équations (3) se réduisent à :

$$E_x = j\omega\mu_0\lambda_L^2 J \quad (4a)$$

$$B_y = -\mu_0\lambda_L^2 \frac{\partial J}{\partial y} \quad (4b)$$

$$B_z = \mu_0\lambda_L^2 \frac{\partial J}{\partial x} \quad (4c)$$

soit:
$$B_x = 0$$

pour
$$|x| < \frac{w}{2} - x_r,$$

$$B_y = \mu_0\lambda_L^2 \frac{J(0)}{\left(1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{4x}{w^2} \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) \cos(\beta z) \quad (5a)$$

pour $\frac{w}{2} - x_r < |x| < \frac{w}{2}$.

$$B_y = \mu_0 J \left(\frac{w}{2} \right) \frac{d}{a} \exp \left(-d \frac{\left(\frac{w}{2} - |x| \right)}{a \lambda_L^2} \right) \sin \left(\beta \frac{L}{2} \right) \cos (\beta z) \quad (5b)$$

E . est directement proportionnel à la densité de courant.

Champ à l'extérieur du ruban supraconducteur

Le calcul du champ électromagnétique se ramène ici à la détermination du potentiel vecteur en tout point x_0, y_0, z_0 à l'extérieur du ruban :

$$A(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x, y, z)}{r} dV \quad (6)$$

où $r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$ et $dV = dx dy dz$.

Le point de coordonnées x, y, z appartient au ruban.

A l'extérieur (Fig. 2), dans la limite du champ lointain, on néglige l'épaisseur du ruban et on assimile le supraconducteur à une couche très mince parcourue par un courant. Seule la région où $y \sim d$ ne répond pas à cette hypothèse.

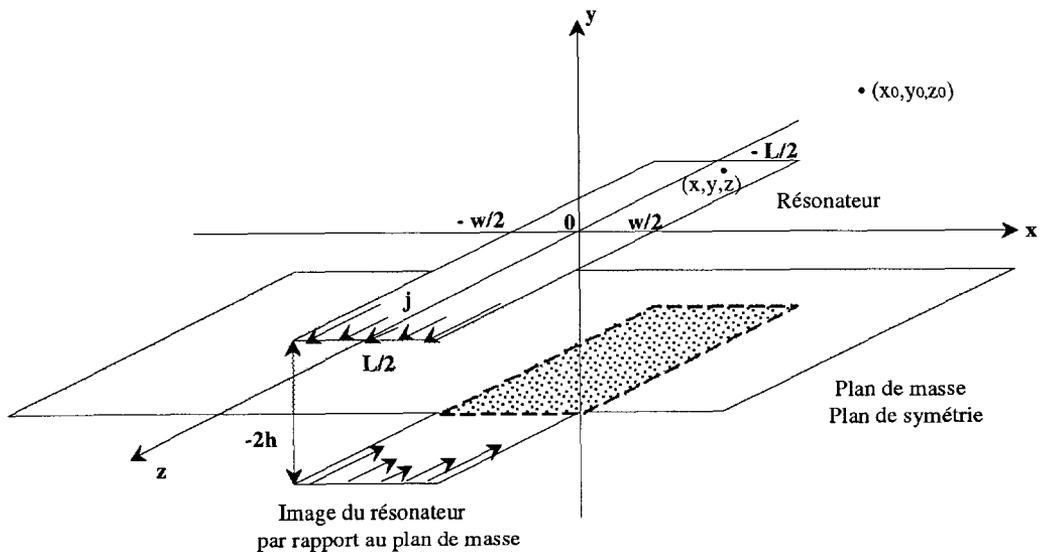


Fig. 2. — Schéma du résonateur microstrip et de son image par rapport au plan de masse.

[Microstrip resonator and its image towards the ground plane.]

On prend en compte la présence d'un plan de masse métallique, considéré comme infini, par la contribution de l'image du résonateur dans ce plan [12]. La densité de courant totale s'exprime alors par la différence des contributions du ruban en $y = 0$ et de son image en $y = -2h$; soit :

$$J(x, y, z) = J(x, y = 0, z) - J(x, y = -2h, z)$$

(6) devient donc :

$$A(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x)J(z)}{\sqrt{(x_0-x)^2 + y_0^2 + (z_0-z)^2}} dx dz - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x)J(z)}{\sqrt{(x_0-x)^2 + (y_0+2h)^2 + (z_0-z)^2}} dx dz \quad (7)$$

La valeur constante de $J(y)$ en 0 et $-2h$ est prise égale à 1.

L'intégration directe de cette expression n'est pas connue. Afin d'obtenir une solution analytique du problème, il a été nécessaire de recourir à deux approximations.

Première approximation. — La composante de la densité de courant suivant x , définie au paragraphe précédent, a été apodisée en utilisant les valeurs suivantes (Fig. 3) :

pour $|x| < \frac{w'}{2} - x_a, \quad J(x) = n \cdot J(0) \quad (8a)$

pour $\frac{w'}{2} - x_a < |x| < \frac{w'}{2}, \quad J(x) = J\left(\frac{w'}{2}\right) \quad (8b)$

n est compris entre 1 et 2 % de telle sorte que $J(x_a) \approx \frac{1}{2} J\left(\frac{w'}{2}\right)$ et que le courant total soit conservé.

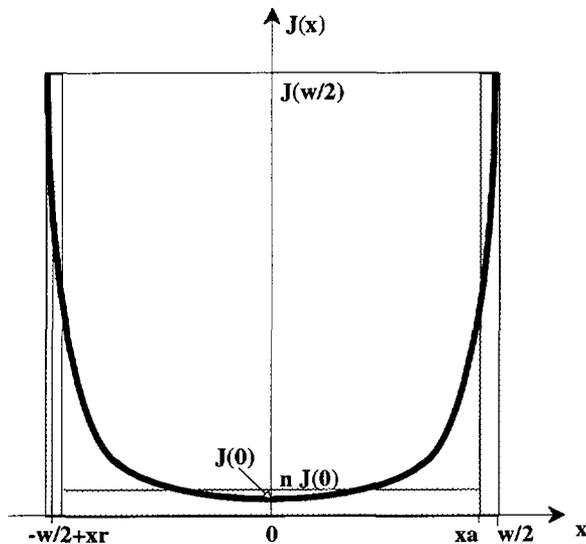


Fig. 3. — Distribution de la densité de courant, dilatée aux extrémités, suivant la largeur du résonateur, avant et après apodisation.

[Current density distribution, not to scale, across the width of the strip, before and after apodisation.]

Seconde approximation. — Le terme $J(z)$ (relation (2b)) est remplacé par un polynôme de degré quatre :

$$c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + c_4 v^4 \quad \text{où} \quad v = \beta \left(z + \frac{L}{2} \right) \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,00112745, & c_1 &= 0,983435, \\ c_2 &= 0,0534058, & c_3 &= -0,233285, \\ c_4 &= 0,0371284. \end{aligned}$$

Après intégration suivant x , le potentiel vecteur s'écrit alors :

$$A = \sum_{n=0}^4 a_n I_n \quad (10a)$$

où

$$I_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln \left(\sqrt{(x_0 - X)^2 + (y_0 - Y)^2 + (z_0 - z)^2} - (x_0 - X) \right) z^n dz \quad (10b)$$

X prend les valeurs $\pm w/2$ et $\pm x_a$ et Y vaut 0 ou $-2h$.

I_n se calcule en utilisant une intégration par partie après avoir effectué deux changements de variables. Le champ électromagnétique se déduit alors des équations de Maxwell, dans la jauge de Lorentz :

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega \epsilon \mu} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (11)$$

Résultats.

Les résultats du calcul du champ récapitulés sur les courbes suivantes se rapportent à une configuration représentée figure 1. Ils ont été normalisés par rapport aux valeurs maximales des champs trouvées.

Les valeurs numériques employées sont $w = h = 500 \mu\text{m}$, $L = 5 \text{ mm}$, $d = 3\,000 \text{ \AA}$, $\lambda_L = 2\,000 \text{ \AA}$, $\epsilon_r = 9,6$ (MgO).

A l'intérieur du ruban (Fig. 4), la prépondérance des bords, comparée aux valeurs centrales, pour les champs H_y et E_z est fortement marquée.

Les courbes des figures 5 à 9 montrent la variation des champs B_x , B_y et E_x , E_y et E_z à l'extérieur du ruban supraconducteur, dans des plans situés :

- au voisinage du ruban, ($y = -h/100 = -5 \mu\text{m}$), respectant $d \ll h/100$;
- à mi-chemin entre le ruban et le plan de masse ($y = -h/2 = -250 \mu\text{m}$) ;
- au niveau du plan de masse ($y = -h = -500 \mu\text{m}$).

Les courbes 6 et 8 font apparaître, en particulier à proximité du ruban, la dominance de la composante B_x au centre du résonateur et de B_y sur les bords. De même, la composante E_x est importante sur les bords alors que E_y est maximale au centre.

Suivant la longueur du résonateur (axe z), le champ magnétique est maximum au centre et quasiment nul aux extrémités. Les composantes E_x et E_y du champ électrique (courbes 5 et 7), sont nulles au centre et aux extrémités. L'ensemble de ces résultats est conforme aux configurations de champ classiques.

Il existe une composante E_z non nulle due à la distribution non uniforme de la densité de courant. Cette composante E_z , suivant z (Fig. 9), est maximale aux extrémités du résonateur. Ce résultat traduit le rayonnement à l'extrémité du ruban.

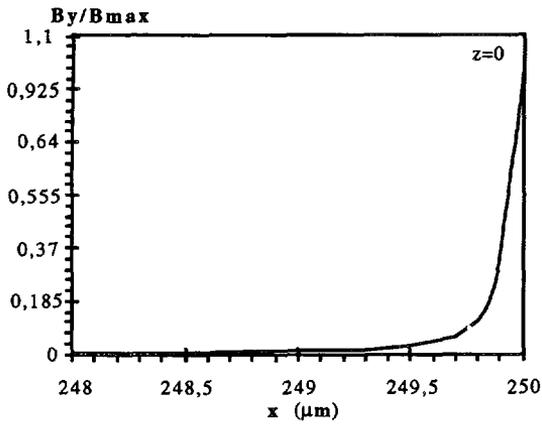


Fig. 4.

Fig. 4. — Champ B_y , en fonction de x à l'intérieur du ruban.
 [Field B_y , versus x , inside the strip.]

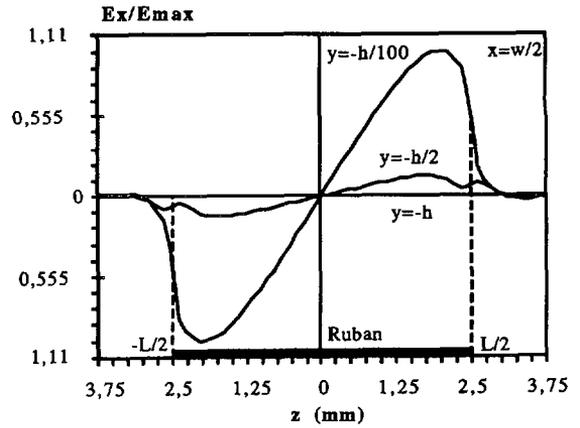


Fig. 5.

Fig. 5. — Champ E_x , en fonction de z à l'extérieur du ruban.
 [Field E_x , versus z , outside the strip.]

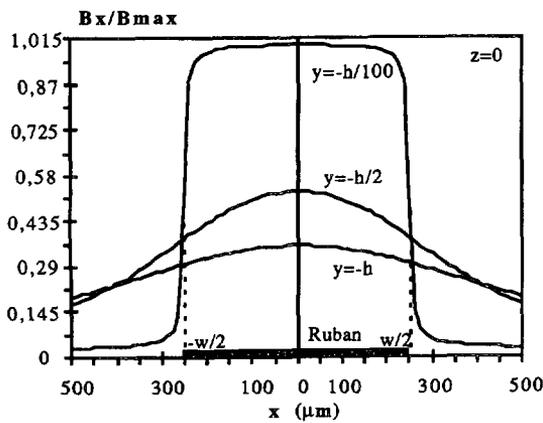


Fig. 6.

Fig. 6. — Champ B_x , en fonction de x à l'extérieur du ruban.
 [Field B_x , versus x , outside the strip.]

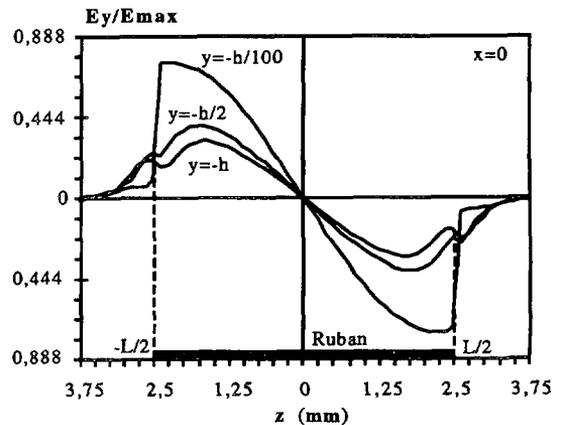


Fig. 7.

Fig. 7. — Champ E_y , en fonction de z à l'extérieur du ruban.
 [Field E_y , versus z , outside the strip.]

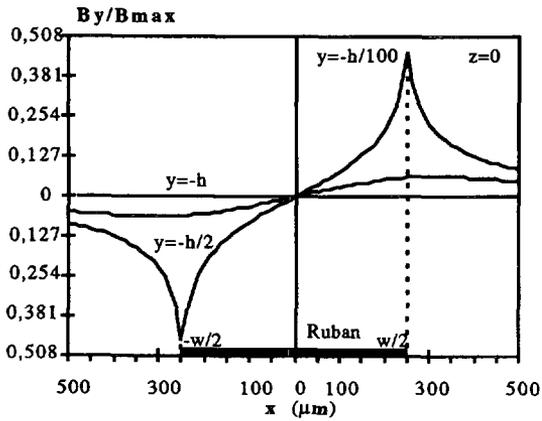


Fig. 8.

Fig. 8. — Champ B_y en fonction de x à l'extérieur du ruban.

[Field B_y versus x , outside the strip.]

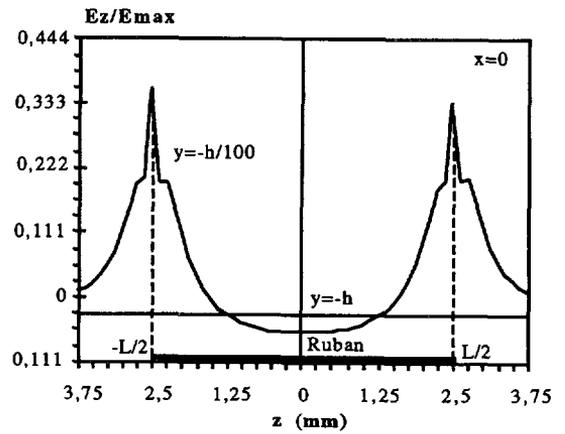


Fig. 9.

Fig. 9. — Champ E_z en fonction de z à l'extérieur du ruban.

[Field E_z versus z , outside the strip.]

La comparaison avec des résultats obtenus pour une valeur de λ_L plus petite que précédemment ($\lambda_L = 1\,500 \text{ \AA}$), montrent que les composantes de B à l'extérieur augmentent si λ_L diminue.

L'hypothèse consistant à négliger l'épaisseur du supraconducteur dans le calcul du potentiel vecteur ne permet pas d'établir la continuité des champs à la surface du ruban.

Par contre, le calcul des expressions analytiques laisse la possibilité de remonter à la puissance rayonnée.

Conclusion.

En supposant connues les caractéristiques de la densité de courant d'un résonateur linéaire supraconducteur en structure microbande, nous avons obtenu une expression analytique du champ électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur du ruban supraconducteur. Ces résultats, en présence d'un diélectrique homogène, sont valables dans la quasi-totalité du volume. Leur analyse a mis en évidence une structure de modes hybrides. Cependant, selon l'axe de propagation, la composante E_z reste toujours inférieure aux composantes E_x et E_y . Dans ces conditions, le milieu diélectrique homogène peut être considéré, pour une fréquence fixée, comme un milieu à constante diélectrique effective, résultant d'une configuration classique de ligne microbande [13]. Un modèle de guide équivalent [14] permettra d'obtenir $J(0)$ et les valeurs du coefficient de qualité [15], si l'on accepte un modèle de pertes, à la fois pour le diélectrique et pour le supraconducteur.

Bibliographie

- [1] Bowers W. A., non publié.
- [2] Rhoderick E. H., Wilson E. M., Current Distribution in Thin Superconducting Films, *Nature* **194** (1962) 1167-1168.
- [3] Lee H. Y., Itoh T., Phenomenological loss equivalence method for planar quasi TEM transmission lines with a thin normal conductor or superconductor, *IEEE-MTT* **37** (1989) 1904-1909.
- [4] Meisse P., Thèse de 3^e cycle, ENSAE Toulouse (1992).
- [5] Lee L. H., Ali S. M., Lyons W. G., Full-wave characterization of high- T_c superconducting transmission lines. *IEEE Trans. Applied Superconductivity* **2** (1992) 49-57.
- [6] Delabie C., Seguinot C., Pribetich P., Kennis P., « Outil d'aide à la caractérisation des matériaux supraconducteurs à haute température critique aux fréquences microondes », 8^{es} JNM, 3C-6 (1993).
- [7] Thetiot D., Madrangeas V., Aubourg M., Guillon P., « Rigorous analysis of 2D and 3D planar circuits by using the finite element method approach », ESA/ESTEC workshop on space applications of high temperature superconductors (April 1993) pp. 27-37.
- [8] Thetiot D., Madrangeas V., Aubourg M., Guillon P., « Modélisation de circuits planaires supraconducteurs », 8^{es} JNM, 3C-8 (1993).
- [9] Sheen D. M., Ali S. M., Oates D. E., Withers R. S., Kong J. A., Current distribution, resistance and inductance for superconducting strip transmission lines, *IEEE Trans. Appl. Superconductivity* **1** (1991) 108-115.
- [10] Newman H. S., Culbertson J. C., Measurement of the current-density distribution in high-temperature superconducting microstrip by means of kinetic-inductance photoresponse, *Microwave Opt Technol. Lett.* **6** No. 13 (October 1993).
- [11] Mosig J. R., Arbitrarily shaped microstrip structures and their analysis with a mixed potential integral equation, *IEEE-MTT* **36** (1988) 314-323.
- [12] Gaal E., Current Distribution on a Strip Line, *Acta Technica* **38** (1962) 387-397.
- [13] Kirschning M., Jansen R. H., Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up to millimetre-wave frequencies, *Electron Lett.* **18** (1982) 272-273.
- [14] Itoh T., Numerical Techniques for microwave and millimeter-wave passive structures (Wiley and Sons, 1989).
- [15] Trotel A., thèse de 3^e cycle (1994) à paraître.