



**HAL**  
open science

# Détermination des temps d'arrivée de fronts d'onde acoustiques divergents dans une lame anisotrope

André Mourad, Bernard Castagnede

► **To cite this version:**

André Mourad, Bernard Castagnede. Détermination des temps d'arrivée de fronts d'onde acoustiques divergents dans une lame anisotrope. *Journal de Physique III*, 1993, 3 (10), pp.1911-1927. 10.1051/jp3:1993249 . jpa-00249053

**HAL Id: jpa-00249053**

**<https://hal.science/jpa-00249053v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

42.10D — 43.20D — 46.30C

## Détermination des temps d'arrivée de fronts d'onde acoustiques divergents dans une lame anisotrope

André Mourad <sup>(1)</sup> et Bernard Castagnède <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> L.M.P., Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

<sup>(2)</sup> L.A.U.M., Université du Maine, Av. O. Messiaen, B.P. 535, 72017 Le Mans, France

*(Reçu le 3 février 1993, révisé le 23 juillet 1993, accepté le 2 août 1993)*

**Résumé.** — Ce travail cherche à étendre les principes de base de l'optique (principe de Fermat et principe d'Huyghens) à l'acoustique cristalline, cas plus complexe par nature, notamment du fait de la possibilité de présence des caustiques en forme de « corne de croissant ». Après une discussion sur la transformation mathématique entre vitesses de phase et vitesses de groupe, l'étude de la réflexion d'un rayon acoustique divergent sur un interface est abordée à l'aide de la construction d'Huyghens. Une généralisation de la classique loi de la réfraction est obtenue dans ce cas, et ce même résultat peut aussi être démontré à partir du principe de Fermat. Il est par ailleurs permis de vérifier numériquement l'absence de précurseur sur le mode converti en relation avec la non-existence de caustique après réflexion. Une discussion sur la nature des contours dits de Cagniard de-Hoop est esquissée avant que ne soit introduite une stratégie pour calculer numériquement la direction du rayon réfléchi. Différents cas de figures suivant que la source est ponctuelle ou linéique, et selon l'orientation de la coupe du solide anisotrope considéré sont discutés. L'extension de ces résultats à plusieurs réflexions, de même qu'une étude particulière du front d'onde de tête sont aussi proposées. Enfin des résultats expérimentaux mettant en œuvre des mesures de vitesses de groupe dans un matériau composite orthotrope sont décrites. Cette étude devrait voir son aboutissement par le calcul des fonctions de Green du problème, et par la comparaison avec les champs de déplacements expérimentaux dans divers solides anisotropes.

**Abstract.** — The present work is an attempt to extend to the acoustics of anisotropic media the basic principles of optics (i.e. Fermat, and Huyghens principles). The acoustical case is much more intricate because of the possibility of existence of the cuspidal caustics. Firstly, one discusses the mathematical transformation between phase and group wavespeeds. Then, the problem of the reflection of a divergent acoustical ray onto an interface is studied with the help of Huyghens construction. A generalization of the classical refraction law is obtained. Such a result can also be derived from Fermat principle. It is possible to numerically verify the absence of precursor on the converted mode, due to the non-existence of caustics after reflection. A discussion on the so-called Cagniard-de-Hoop contours is introduced, as well as a numerical procedure to compute the direction of the reflected ray. Different cases, depending on the source dimension (point-like or line) and on the orientation cut of the anisotropic solid, are discussed. The extension of the study to several reflections is proposed. Special attention is also devoted to the analysis of the head wavefront reflection. Last, some experimental results dealing with the measurements of group

wavespeeds in a transversely isotropic composite material are described. The present study will be followed by the computation of the Green functions and the comparison with experimental displacement fields for various anisotropic solids.

## 1. Introduction.

Les principes de base de l'optique (principe de Fermat, d'Huyghens.. ) [1], se retrouvent en élastodynamique. Dans un milieu anisotrope, l'optique des cristaux nous indique qu'il peut se propager deux ondes de polarisations orthogonales (l'équation de dispersion étant une quadrique du quatrième degré), puisque le tenseur de permittivité électrique est du deuxième ordre. En élastodynamique, le tenseur des constantes élastiques est du quatrième ordre et l'équation de dispersion est obtenue à partir de l'équation de Christoffel (impliquant l'existence de caustiques qui n'apparaissent pas en optique) [2], d'où la possibilité de la propagation de trois ondes de volume de polarisations orthogonales [3].

Dans le présent travail, le principe d'Huyghens est étendu à l'élastodynamique, pour déterminer les angles de réflexion des rayons acoustiques (analogues aux rayons lumineux) dans une lame homogène anisotrope. Les temps d'arrivée des modes de volume quasi-longitudinal ( $qL$ ) et quasi-transverse ( $qT$ ) direct, ainsi que leurs réflexions multiples et modes de conversion sont calculés pour diverses directions de propagation dans un plan de symétrie à l'aide de procédures de calcul rapides pour une lame de symétrie arbitraire (au moins de symétrie orthorhombique). Cette procédure de calcul est décrite en détail pour différentes configurations.

Les divers fronts d'onde sont alors visualisés sur le demi-espace. Des résultats en simulation numérique sont assortis de résultats expérimentaux obtenus en génération d'ultrasons par impact laser décrits pour des matériaux anisotropes de symétrie orthorhombique. On retrouve ainsi par une autre voie le travail présenté dans l'article [4].

## 2. Position du problème.

Le cadre théorique de cette étude se situe dans le contexte général de l'élastodynamique. La géométrie du problème est entièrement déterminée par la nature et l'orientation de la source par rapport aux axes de symétrie de la plaque supposée homogène élastique anisotrope (symétrie orthorhombique). Les arêtes de la plaque sont confondues avec les trois axes de symétrie. Les modes de volume sont seuls pris en compte. Deux sources sont considérées de part leur géométrie (la contrainte mécanique générée étant une force normale à la surface ou un couple contenu dans le plan et orthogonal à la source quand celle-ci est linéique) :

- la source linéique de symétrie cylindrique qui est traitée en détail ;
- la source ponctuelle de symétrie sphérique qui fait l'objet d'une courte étude en vue d'une généralisation tridimensionnelle.

La source linéique génère deux modes quand elle est dirigée suivant un axe de symétrie (c'est le problème qui sera traité numériquement) et trois modes dans une direction arbitraire. Dans les deux cas le problème est plan. Quand la source est ponctuelle, trois modes sont générés et l'étude est plus complexe. Le problème est tridimensionnel.

Le problème central que nous nous proposons de résoudre au préalable est le suivant :

- les constantes élastiques et la masse volumique de la plaque étant supposées connues, pour un angle d'observation donné, retrouver la vitesse de groupe dans cette direction. Il s'agit là d'un problème inverse qui va être discuté dans le paragraphe qui suit.

### 3. Vitesse de phase — Vitesse de groupe.

La transformation mathématique permettant de passer de la représentation de la surface des lenteurs de phase à celle des vitesses de groupe est une transformation polaire réciproque définie par la relation ci-dessous [4]. Nous choisissons de nous placer dans un plan principal, puisque la représentation est plane pour une source linéique.

$$\begin{aligned} M(\theta, V_p) &\rightarrow M'(\phi, V_g) = T(M) \\ \phi &= \text{Arctg} [f(\theta)] + \theta \\ V_g(\phi) &= \frac{V_p(\theta)}{\cos(\theta - \phi)} \end{aligned} \quad (1)$$

où  $V_g$  et  $V_p$  sont respectivement les vitesses de groupe et de phase.

La fonction «  $f$  » qui est définie plus loin dépend aussi des constantes élastiques de la plaque considérée.

Il faut noter que la relation (1) est surjective, l'existence de caustiques en est la conséquence physique. Le premier problème numérique qui se pose est le suivant :

— se fixant un angle d'observation «  $\phi$  », évaluer le ou les angles «  $\theta$  » et les vitesses de groupe dans la direction «  $\phi$  ».

Sur la figure 1a, nous avons représenté la lenteur de phase en coordonnées polaires dans le plan  $\{1, 3\}$  de la symétrie orthorhombique du mode quasi-transverse lent. Le point M est repéré par son angle polaire «  $\theta$  ». La normale unitaire «  $\mathbf{n}$  » en M fait un angle «  $\phi$  » avec l'axe des abscisses. A partir de cette courbe, nous nous proposons de tracer de deux manières différentes la courbe des vitesses de groupe correspondante. La figure 1b a été tracée en utilisant la transformée  $M' = T(M)$ , en choisissant un pas angulaire constant pour «  $\theta$  ». C'est le *problème direct*. Nous remarquons la répartition non uniforme des points sur la courbe des vitesses. C'est la manière avec laquelle il faut procéder pour mettre en évidence la distribution angulaire de l'énergie. La figure 1c a été tracée en utilisant la transformée  $M = T^{-1}(M')$  en choisissant un pas angulaire constant pour «  $\phi$  ». C'est le *problème inverse*. Il permet de tracer soigneusement en un temps plus bref la courbe des vitesses. Cette manière de procéder s'avère particulièrement économe en temps de calcul lorsque l'on aborde le problème tridimensionnel. Elle est aussi en accord avec la configuration expérimentale pour laquelle la direction «  $\phi$  » est imposée par la direction source-récepteur.

### 4. Etude de la réflexion d'un rayon acoustique à une interface (conversion de mode).

4.1 CONSTRUCTION D'HUYGHENS. — Nous supposons le problème plan. Pour étudier la conversion de mode, nous partons de la construction d'Huyghens relative aux rayons acoustiques (Fig. 2). Nous construisons le rayon réfléchi PM à partir de la construction d'Huyghens en P. Soit  $V_{1g}$  et  $V_{2g}$  respectivement les vitesses de groupe dans les directions OP et PM pour les modes 1 et 2. Si  $CC_1$  et  $CC_2$  sont les tangentes aux courbes de vitesse de groupe 1 et 2 en  $C_1$  et  $C_2$ , passant par C, on détermine à partir du repère polaire ( $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ ) la relation liant  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

Dans ce repère, un vecteur normal en  $C_1$  et  $C_2$  aux courbes 1 et 2 s'écrit :

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\rho$$

d'où le vecteur tangent,

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \mathbf{e}_\rho.$$

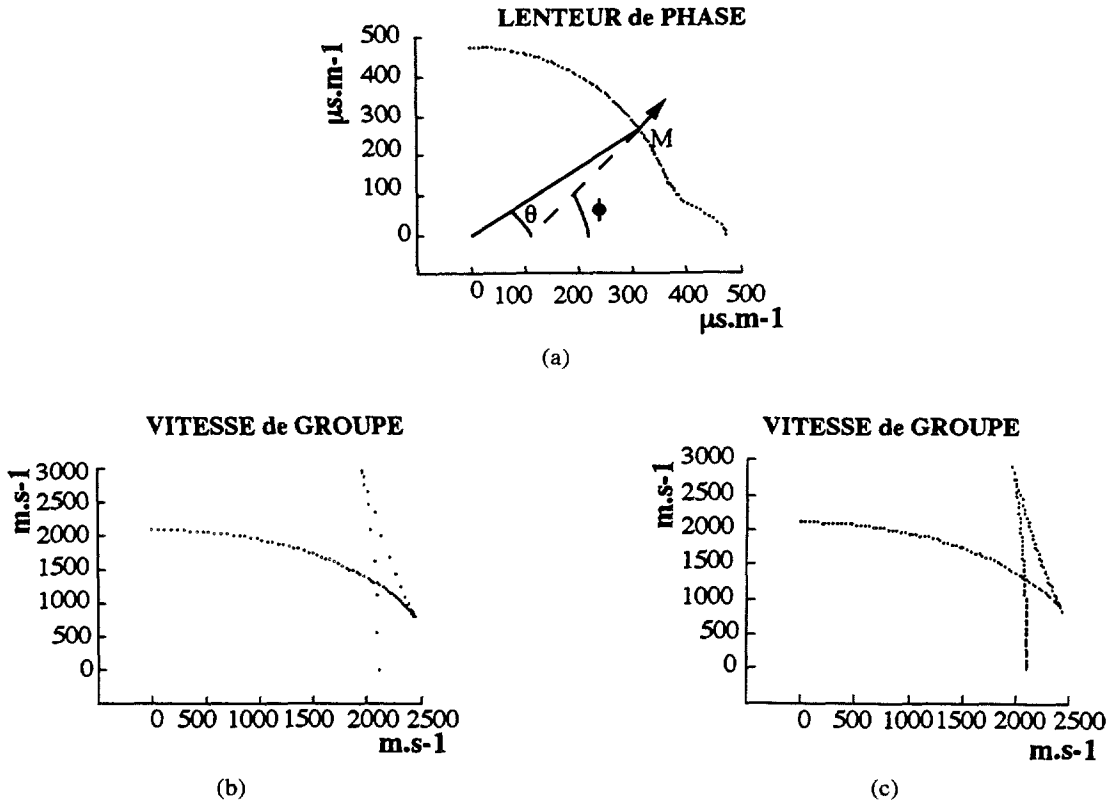


Fig. 1. — Transformation vitesse de phase — vitesse de groupe pour le problème plan, dans le plan de symétrie {1, 3} de la classe orthorhombique, pour le mode quasi-transverse lent. Les propriétés élastiques sont les suivantes :  $C_{11} = 12,35$  GPa ;  $C_{22} = 12,54$  GPa ;  $C_{33} = 135,8$  GPa ;  $C_{12} = 5,47$  GPa ;  $C_{13} = 5,44$  GPa ;  $C_{23} = 7,24$  GPa ;  $C_{44} = 6,92$  GPa ;  $C_{55} = 6,21$  GPa ;  $C_{66} = 3,53$  GPa ;  $\rho = 1\,560$  kg.m<sup>-3</sup> a) Courbe de lenteur de phase dans le plan {1, 3} de la symétrie orthorhombique, pour le mode quasi-transverse lent. b) Tracé de la vitesse de groupe correspondante pour le problème direct. c) Tracé de la vitesse de groupe correspondante pour le problème inverse.

[Phase-group velocities transformation for the plane problem (in plane {1, 3} of the orthorhombic symmetry) for the slow quasi-transverse mode. The elastic properties are the following :  $C_{11} = 12.35$  GPa ;  $C_{22} = 12.54$  GPa ;  $C_{33} = 135.8$  GPa ;  $C_{12} = 5.47$  GPa ;  $C_{13} = 5.44$  GPa ;  $C_{23} = 7.24$  GPa ;  $C_{44} = 6.92$  GPa ;  $C_{55} = 6.21$  GPa ;  $C_{66} = 3.53$  GPa ;  $\rho = 1.560$  g.cm<sup>-3</sup> a) Phase slowness curve in plane {1, 3} of the orthorhombic symmetry, for the slow quasi-transverse mode. b) Plot of the corresponding group velocities for the direct problem. c) Plot of the corresponding group velocities for the inverse problem.]

L'équation des droites (CC<sub>1</sub>) ou (CC<sub>2</sub>) s'écrit dans le repère (Pxy) :

$$\begin{vmatrix} V \cos \phi - x & -\sin \phi + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \cos \phi \\ V \sin \phi - y & \cos \phi + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \sin \phi \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

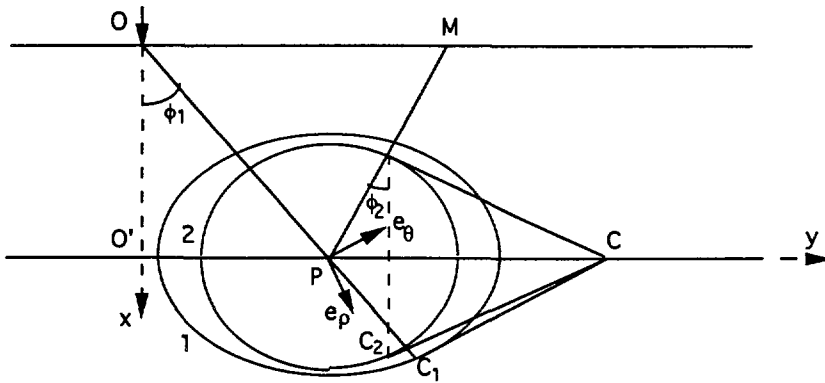


Fig. 2. — Principe de la construction d'Huyghens.

[Principle of the Huyghens construction.]

Recherchant le point C pour lequel  $x = 0$ , on obtient :

$$y = \frac{v}{\sin \phi - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \cos \phi} \tag{3}$$

Pour que les deux tangentes soient confondues en C, il faut imposer la relation suivante, analogue à la loi de Descartes pour les ondes planes :

$$\frac{V_{1g}(\phi_1)}{\sin \phi_1 - \frac{1}{V_{1g}(\phi_1)} \frac{\partial V_{1g}(\phi_1)}{\partial \phi_1} \cos \phi_1} = \frac{V_{2g}(\phi_2)}{\sin \phi_2 - \frac{1}{V_{2g}(\phi_2)} \frac{\partial V_{2g}(\phi_2)}{\partial \phi_2} \cos \phi_2} \tag{4}$$

Nous remarquons dans le cas isotrope, que  $V_g$  est telle que  $\phi = \theta$  et  $V_g(\phi) = V_p(\theta)$ , et l'équation n'est rien d'autre que la loi de Descartes :

$$\frac{v_{1p}(\theta_1)}{\sin \theta_1} = \frac{v_{2p}(\theta_2)}{\sin \theta_2} \tag{5}$$

Cette relation peut être retrouvée à partir du principe de Fermat basé sur le chemin acoustique minimum. Evaluons le temps de parcours de l'onde réfléchi sur le trajet OPM de la manière suivante :

$$t = h \left[ \frac{1}{v_{1g}(\phi_1) \cos \phi_1} + \frac{1}{v_{2g}(\pi - \phi_2) \cos \phi_2} \right] \tag{6}$$

où «  $h$  » est l'épaisseur de la lame.

L'extremum de cette fonction par rapport à  $\phi_1$  fournit la relation suivante :

$$\frac{dt}{d\phi_1} = \frac{d}{d\phi_1} \left[ \frac{1}{v_{1g}(\phi_1) \cos \phi_1} \right] + \frac{d}{d\phi_2} \left[ \frac{1}{v_{2g}(\phi_2) \cos \phi_2} \right] \frac{d\phi_2}{d\phi_1} = 0, \tag{7}$$

avec  $\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\cos^2 \phi_2}{\cos^2 \phi_1}$

Après dérivation et simplification, on obtient directement l'équation (4), mais les dérivations ne sont valables qu'à condition que les modes n'admettent pas de caustique, puisque dans ce cas les dérivées ne sont pas uniques. C'est ce dont il va être question dans le paragraphe suivant.

#### 4.2 LE PRINCIPE DE FERMAT ET LA CONSTRUCTION D'HUYGHENS.

**4.2.1 Remarques préliminaires.** — Nous évaluons sur la figure 3a, le temps de parcours du rayon transverse converti en mode longitudinal. Pour différents points B, repérés par l'angle  $\phi$ , le temps de parcours du trajet OBP est évalué en fonction de l'angle  $\phi$  (Fig. 3b). On remarque que le temps de parcours minimum pour ce mode converti se situe en bout de corne à l'angle  $\phi_m$ . La construction d'Huyghens montre que le trajet du rayon réfléchi correspond à l'angle  $\phi_M$  correspondant à l'angle  $\theta_m$  sur la figure 3c. On pourrait penser, d'après le principe de Fermat, que tous les rayons compris entre  $\phi_m$  et  $\phi_M$  arrivent avant l'onde dont ils seraient les précurseurs. On va montrer à l'aide de la théorie des rayons généralisés, en utilisant la méthode de Cagniard-de-Hoop, qu'il n'en est rien, et que les précurseurs n'existent pas. Pour plus de détail sur cette méthode, on pourra se reporter à la référence [11]. On vérifiera par là même, l'existence d'un zéro unique de la fonction portée en 3c, ce qui justifie l'absence de caustique sur les modes convertis.

**4.2.2 Discussion des contours dans le plan complexe.** — Définissons les contours des figures 4, dans la géométrie du problème plan [6], pour laquelle  $h$ ,  $x$ ,  $r$  et  $\theta$  représentent respectivement, l'épaisseur de la lame, la distance d'observation, le rayon vecteur d'observation (i.e.  $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ ) et l'angle azimuthal d'observation, à savoir :

- pour les modes directs et leurs réflexions multiples d'ordre  $q$  :

$$q \sqrt{A + \sqrt{B}} \cos \theta + p \sin \theta = \frac{t}{r}, \quad (8)$$

- pour les modes convertis composés de  $n$  modes quasilingitudinaux et  $m$  modes quasitransversaux :

$$n \sqrt{A + \sqrt{B}} + m \sqrt{A + \sqrt{B}} + p \operatorname{tg} \theta = \frac{t}{h}. \quad (9)$$

Les figures 4a et 4b, 4c correspondent respectivement à  $q = 1$  et  $n = m = 1$ . La variable  $p$  complexe décrit un contour dans le plan complexe paramétré par le temps «  $t$  ». Les valeurs  $A$  et  $B$  sont définies de la manière suivante, où les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  sont fonctions des constantes élastiques du plan  $\{1, 3\}$ , constantes répertoriées dans la légende des figures et rapportées à l'unité de masse :

$$A = ap^2 + c, \quad B = \sqrt{A^2 - 4b(ep^4 - dp^2 + 1)}, \quad (10)$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= C_{13}^2 + C_{11} C_{33} - 2 C_{13} C_{55}; & d &= C_{33} + C_{55} \\ b &= C_{11} C_{55} & e &= C_{33} C_{55}. \\ c &= C_{11} + C_{55} \end{aligned} \quad (11)$$

Il faut noter que nous n'avons représenté que la moitié des contours. En fait, ils sont symétriques par rapport à l'axe réel. On déduit de la figure 4c, qu'il n'existe de caustique que pour les modes directs ou réfléchis sans conversion de modes (présence de trois points doubles sur l'axe réel). D'autre part, l'unicité du point double quelle que soit la direction (sur la Fig. 4a

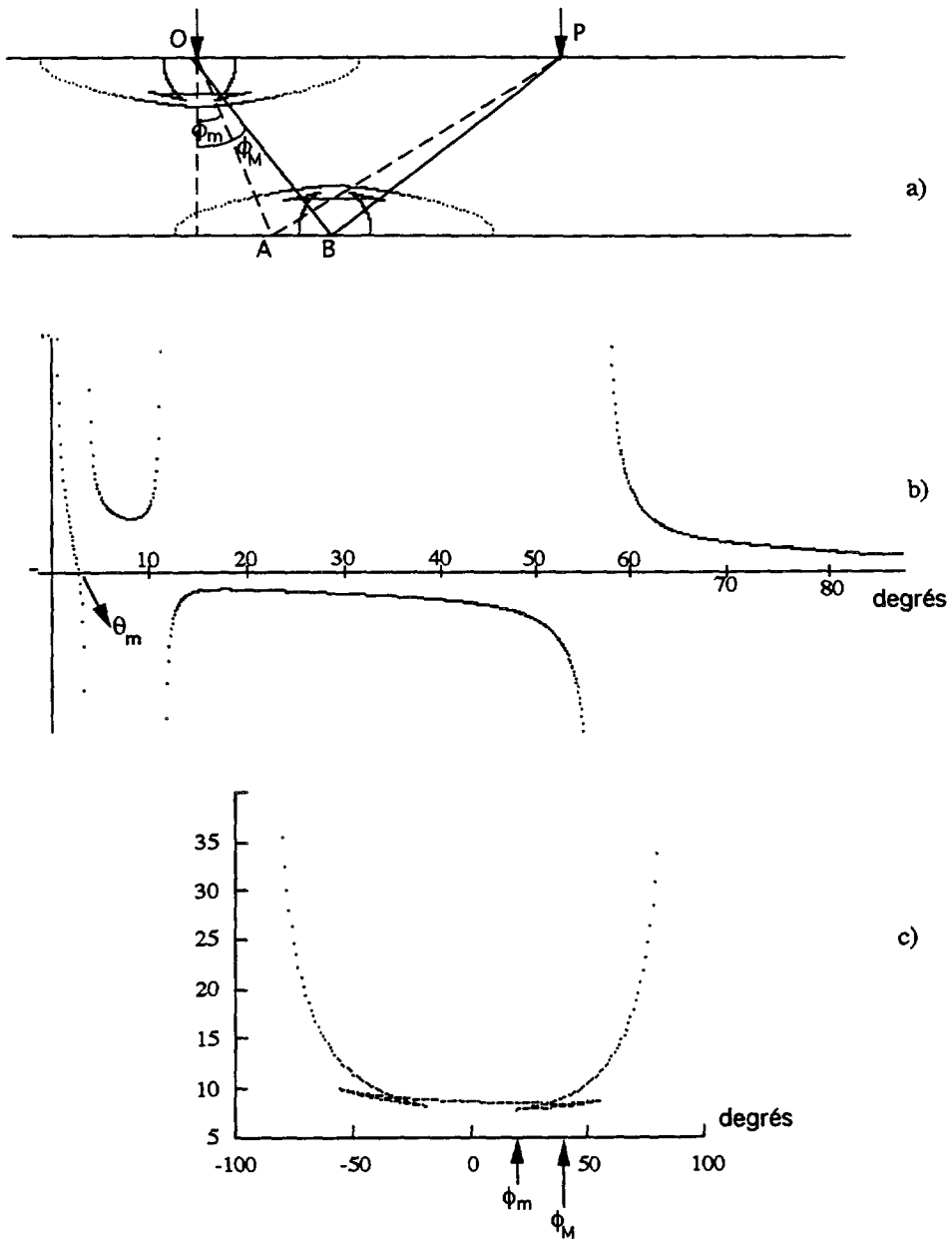


Fig. 3. — Construction d'Huyghens et principe de Fermat. a) Conversion du mode quasi-transverse lent au mode quasi-longitudinal. b) Tracé de la fonctionnelle relative aux deux modes précédents, en fonction de l'angle de phase. c) Temps de parcours des rayons réfléchis.

[Huyghens construction and Fermat principle. a) Slow quasi-transverse to quasi-longitudinal mode conversion. b) Plot of the functional related to the two previous modes, *versus* phase angle. c) Time-of-flight of the reflected rays.]



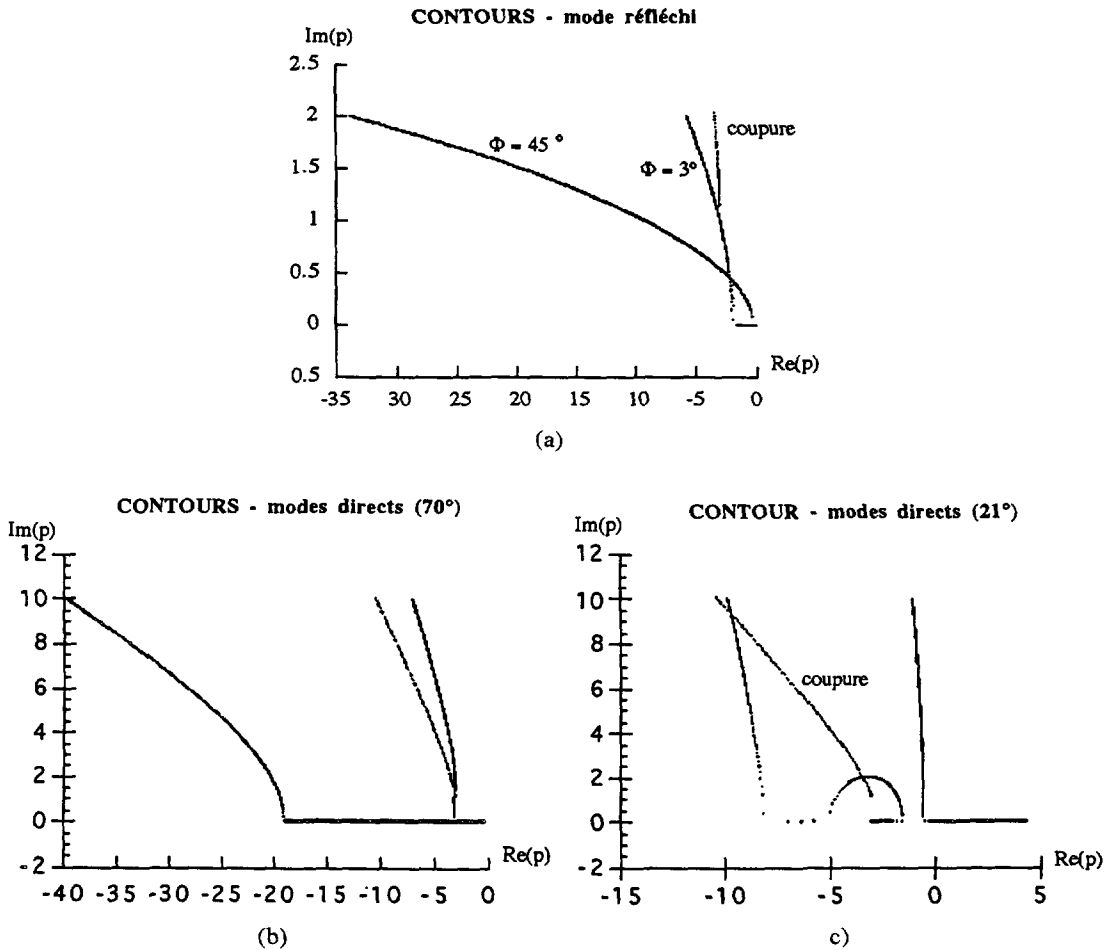


Fig. 4. — Contours de Cagniard-de-Hoop. a) Pour les modes réfléchis. b) Pour les modes directs à 70°. c) Pour les modes directs à 21°.

[Cagniard-de-Hoop contours. a) For the reflected modes. b) For the 70 degrees direct mode. c) For the 21 degrees direct mode.]

sont représentés les contours pour les directions 3 et 45 degrés) justifie l'absence de caustique sur les modes convertis.

Les contours sont paramétrés par le temps. Le temps d'arrivée des modes (points doubles) est le même que celui calculé par la théorie des rayons. Le point double correspond au moment où le contour quitte l'axe réel. Avant de l'avoir quitté, la variable complexe «  $p$  » est réelle pure et n'apporte donc pas de contribution : la fonction de Green est nulle. Ce qui justifie l'inexistence de précurseurs, du moins pour le problème plan.

Nous pouvons ainsi justifier pour la construction des fronts d'ondes, la présence de caustiques sur les modes réfléchis sans conversion de modes et non sur ceux convertis. Il est par ailleurs important de noter que le principe de Fermat n'est équivalent à celui d'Huyghens pour calculer le temps d'arrivée des différents modes que si les modes n'admettent pas de caustique (comme c'est le cas en optique). Dans le cas contraire, seule la construction

d'Huyghens est en accord avec la théorie de la diffraction dont la méthode de Cagniard-de-Hoop est une illustration.

### 5. Stratégie pour déterminer numériquement la direction du rayon réfléchi.

Le point M étant fixé, nous recherchons le point P vérifiant l'équation (4). Notons la relation évidente reliant  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

$$\phi_2 = \text{Arctg} \left[ \frac{d}{h} - \text{tg}(\phi_1) \right] \rightarrow \text{tg}(\phi_2) = \frac{d}{h} - \text{tg}(\phi_1) \quad (12)$$

(les angles sont mesurés à partir de Ox). La relation peut alors s'écrire :

$$\text{tg}(\phi) = \frac{f(\theta) + \text{tg}(\theta)}{1 - f(\theta) \text{tg}(\theta)} \quad (13)$$

La stratégie est alors de déterminer successivement les paramètres angulaires  $\theta_1$ ,  $\phi_1$ ,  $\theta_2$  et  $\phi_2$ , soit la séquence suivante :

$$\theta_1 \rightarrow \phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \theta_2.$$

Notons que les relations  $\theta_1 \rightarrow \phi_1$  et  $\phi_1 \rightarrow \phi_2$  sont univoques, mais pas en général la relation  $\phi_2 \rightarrow \theta_2$ . C'est pour cette raison que lorsque nous avons affaire à une conversion de mode longitudinal-transversal, nous plaçons toujours en premier le mode transversal (puisque dans le problème plan, lorsque la source linéique est parallèle à un axe de symétrie, en l'occurrence la première interface de la lame orthorhombique, il y a commutativité des modes au sens où les modes 12 et 21 arrivent ensemble au point d'observation). Le tableau suivant indique les différents cas de figure.

Il faut noter dans le cas de la source ponctuelle correspondant au cas de l'avant-dernière ligne du tableau, à part le cas isotrope et la symétrie hexagonale, le problème ne peut pas être considéré comme plan, puisqu'il peut dans certains cas, exister des contributions hors plan. Dans la symétrie orthorhombique qui nous intéresse, il se peut que pour de grands rapports d'anisotropie, ce phénomène existe.

Dans le cas de deux modes transverses, il faut nécessairement que pour l'un d'eux la relation (1) soit bijective, ce qui n'est pas toujours le cas, lorsque les deux modes transverses contiennent des caustiques. Sous cette réserve, nous pouvons alors rechercher la valeur de «  $\theta_1$  » par une méthode itérative de type Newton. Pour ce faire nous construisons la fonction :

$$F = F_1 - F_2 = \frac{v_{1g}(\phi_1)}{\sin \phi_1 - \frac{1}{v_{1g}(\phi_1)} \frac{\partial v_{1g}(\phi_1)}{\partial \phi_1} \cos \phi_1} - \frac{v_{2g}(\phi_2)}{\sin \phi_2 - \frac{1}{v_{2g}(\phi_2)} \frac{\partial v_{2g}(\phi_2)}{\partial \phi_2} \cos \phi_2} \quad (14)$$

Le problème consiste alors à rechercher l'extremum de la dérivée de «  $F$  » par rapport à «  $\theta_1$  ». Cette dernière se calcule formellement de la manière suivante :

$$\frac{dF_1}{d\theta_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial F_1}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1}$$

— pour  $F_1$  ;

$$\text{avec } \frac{dV_g}{d\phi} = \frac{dV_g}{d\theta} \frac{d\theta}{d\phi}$$

Tableau I.

	Surface avant de la plaque	Orientation de la source ou points d'observations	Nombre de modes générés	Commutativité des modes	Configuration
Source linéique	Quelconque	quelconque	3	non	(1)
	Parallèle à un plan de symétrie	parallèle à un axe de symétrie	2	non	(2)
		quelconque	3	oui	(3)
		parallèle à un axe de symétrie	2	oui	(4)
Source ponctuelle	Quelconque	quel qu'il soit	3	non	(5)
	Parallèle à un plan de symétrie	appartiennent à un plan de symétrie orthorhombique au plan de la plaque	3	oui	(6)
		quel qu'il soit	3	(non)	(7)

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1 + f^2(\theta)}{1 + f^2(\theta) + f'(\theta)} \tag{15}$$

— pour  $F_2$  ;

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{d\theta_1} &= \frac{dF_2}{d\theta_2} \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \\ \frac{dF_2}{d\theta_2} &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} + \frac{\partial F_2}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} \end{aligned}$$

La relation (3) s'écrit :

$$\frac{f_2(\theta_2) + \text{tg}(\theta_2)}{1 - f_2(\theta_2) \text{tg}(\theta_2)} = \frac{d}{h} - \frac{f_1(\theta_1) + \text{tg}(\theta_1)}{1 - f_1(\theta_1) \text{tg}(\theta_1)} \tag{16}$$

dont on extrait la valeur de  $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$

6. Généralisation au cas de plusieurs réflexions.

6.1 POUR DEUX MODES GÉNÉRÉS. — Dans le cas général on a affaire à «  $p$  » modes 1 et «  $q$  » modes 2 (par exemple «  $p$  » longitudinaux et «  $q$  » transversaux notés :  $pLqT$ ). Par exemple sur la figure 5a on a choisi 3L2T. Dans le cas général  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont liés par la relation :

$$\text{tg} (\phi_2) = \frac{1}{q} \left( \frac{d}{h} - p \text{tg} (\phi_1) \right) . \tag{17}$$

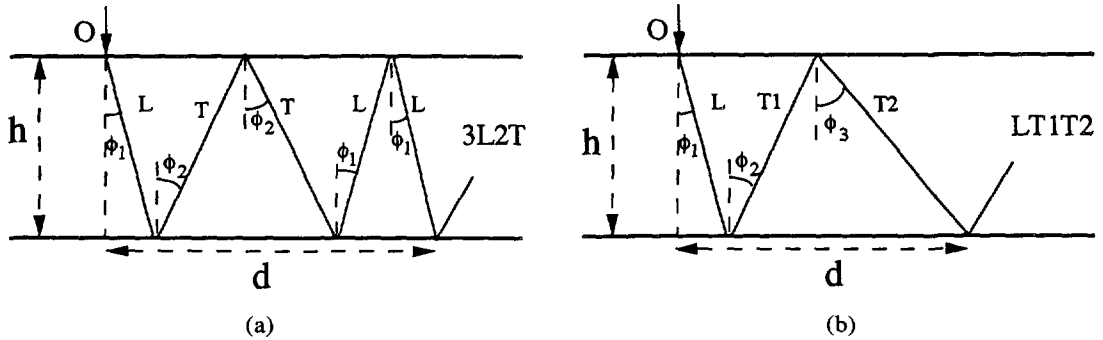


Fig. 5. — Schématisation des trajets des rayons réfléchis. a) Cas de deux modes distincts (1 mode longitudinal et 1 mode transverse). b) Cas général de trois modes distincts (1 mode longitudinal et 2 modes transverses).

[Schematic sketch of the multiple reflected rays. a) Case of two distinct modes (one longitudinal and one transverse). b) Case of three distinct modes (one longitudinal and two transverses).]

Il faut nécessairement qu'il n'existe pas de caustique au moins sur l'un des deux modes. Alors sans oublier la modification à apporter à la dérivée de  $\theta_2$  par rapport à  $\theta_1$ , à savoir :

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{p g_1(\theta_1)}{q g_2(\theta_2)} \tag{18}$$

les fonctions «  $g$  » sont déduites de la relation (16). Alors la méthode de calcul précédente est totalement transposable.

6.2 POUR TROIS MODES GÉNÉRÉS. — En supposant  $p$  modes 1,  $q$  modes 2 et  $n$  modes 3, la méthode de calcul est encore valable à condition qu'il n'y ait qu'un seul mode qui contienne une caustique, alors :

$$\text{tg} (\phi_3) = \frac{1}{n} \left( \frac{d}{h} - p \text{tg} (\phi_1) - q \text{tg} (\phi_2) \right) . \tag{19}$$

Sur la figure 5b on a choisi  $n = p = q = 1$ . Le problème à deux inconnues ( $\theta_1, \theta_2$ ) peut être schématisé dans la séquence suivante :

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\phi_1, \phi_2) \rightarrow \phi_3 \rightarrow \theta_3 .$$

La relation (4) se généralise pour trois modes :

$$\frac{V_{ig}(\phi_i)}{\sin \phi_i - \frac{1}{V_{ig}(\phi_i)} \frac{\partial V_{ig}(\phi_i)}{\partial \phi_i} \cos \phi_i} = \frac{V_{jg}(\phi_j)}{\sin \phi_j - \frac{1}{V_{jg}(\phi_j)} \frac{\partial V_{jg}(\phi_j)}{\partial \phi_j} \cos \phi_j} \quad (20)$$

en donnant au couple  $(i, j)$  les valeurs : (1, 2), (1, 3) et (2, 3).

Le calcul de la direction du rayon réfléchi met en œuvre les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta_2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}$$

ainsi que les relations de couplage :

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{p g_1(\theta_1)}{q g_2(\theta_2)}, \quad \frac{d\theta_3}{d\theta_1} = \frac{p g_1(\theta_1)}{n g_3(\theta_3)}, \quad \frac{d\theta_3}{d\theta_2} = \frac{q g_2(\theta_2)}{n g_3(\theta_3)} \quad (21)$$

## 7. Etude des modes directs pour la source ponctuelle.

Dans ce cas le problème est tridimensionnel et la méthode numérique proposée s'avère particulièrement intéressante pour la construction de la surface des vitesses de groupe. Le problème ne peut pas être considéré par plan, puisque dans l'espace, il existe deux rayons de courbure principale à la surface des lenteurs de phase [7]. L'image des points contenus dans un plan dans l'espace des lenteurs de phase n'est pas en général contenue dans un plan dans l'espace des vitesses de groupe après application de la transformation polaire réciproque. Cette dernière s'exprime formellement ainsi :

$$\begin{aligned} M(\theta_p, \phi_p, V_p) &\rightarrow M'(\theta_g, \phi_g, V_g) \\ \operatorname{tg}(\theta_g - \theta_p) &= - \frac{1}{L(\theta_p, \phi_p)} \frac{\partial L(\theta_p, \phi_p)}{\partial \theta_p} \\ \operatorname{tg}(\phi_g - \phi_p) &= - \frac{\frac{1}{L(\theta_p, \phi_p)} \frac{\partial L(\theta_p, \phi_p)}{\partial \phi_p}}{(\sin \theta_p)^2 + \frac{\cos \theta_p}{L(\theta_p, \phi_p)} \frac{\partial L(\theta_p, \phi_p)}{\partial \theta_p}} \\ V_g(\theta_g, \phi_g) &= \frac{V_p(\theta_p, \phi_p)}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (22)$$

où  $\cos \beta = \sin \theta_p \cos \phi_p \sin \theta_g \cos \phi_g + \sin \theta_p \sin \phi_p \sin \theta_g \sin \phi_g + \cos \theta_p \cos \theta_g$  ; « p » est relatif à la vitesse de phase, « g » à la vitesse de groupe ; «  $\theta$  » et «  $\phi$  » sont les angles azimutal et polaire ; « L » est la surface des lenteurs de phase.

## 8. Expérimentation.

**8.1 GÉNÉRALITÉS.** — Dans cette étude, nous nous plaçons dans la configuration (6) du tableau. Du fait qu'il n'y ait pas de mode transverse rapide, ni de contribution hors plan, nous pouvons assimiler cette configuration par le cas (4). Cette approximation est strictement tirée des résultats et de la configuration expérimentale. Supposons un matériau appartenant à la symétrie orthorhombique. Les courbes de lenteur de phase dans le plan  $\{1, 2\}$  pour les modes

longitudinal et transverse lent, l'une relative au signe plus l'autre au signe moins, sont fournies par l'équation :

$$L \pm (\theta) = (2\rho)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ C_{66} + C_{11} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta \pm [(C_{66} + C_{11} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta)^2 - 4C] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{2}$$

où

$$C = (C_{11} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta) (C_{66} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta) - (C_{12} + C_{66})^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (24)$$

$\rho$  étant la masse volumique ;  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{66}$  et  $C_{12}$  les constantes élastiques relatives au plan  $\{1, 2\}$ . Dans les autres plans  $\{1, 3\}$  et  $\{2, 3\}$ , il suffit de faire des permutations circulaires sur les constantes élastiques, les lenteurs définies plus haut restant valables.

La fonction «  $f$  » est ici définie de la manière suivante :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{M(\theta)} \frac{dM(\theta)}{d\theta} \quad (25)$$

où

$$M(\theta) = C_{66} + C_{11} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta \pm [(C_{66} + C_{11} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta)^2 - 4C] \frac{1}{2}$$

Cela étant, on peut reprendre la démarche suivie aux paragraphes 5 et 6.1 et tracer la figure 6.

**8.2 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.** — L'ensemble des techniques numériques et algorithmiques décrites dans ce qui précède a été testé sur plusieurs matériaux anisotropes, soit sur un monocristal de silicium [8], soit sur divers matériaux composites [9]. Le calcul des diagrammes de visualisation des fronts d'onde réalisé par la présente méthode fut comparé avec des valeurs numériques publiées pour le monocristal de silicium [4], utilisant une approche numérique radicalement différente basée sur une méthode statistique de type Monte Carlo. L'adéquation entre les résultats fournis par les deux méthodes est parfait [8], ce qui permet au passage de valider l'ensemble de nos algorithmes.

Dans le présent travail, d'autres résultats sont présentés sur la figure 6, à savoir, les diagrammes de visualisation des fronts d'onde, respectivement pour un solide orthotrope (Fig. 6a), ainsi pour le cas limite isotrope (Fig. 6b) pour lequel la vitesse longitudinale est choisie double de celle transverse. Bien entendu, dans ce dernier cas pour lequel vitesse de phase et vitesse de groupe sont confondues, il n'y a plus existence de caustique en forme de croissant. Ces dernières sont par contre très clairement visibles pour le solide orthotrope, leur extension spatiale étant directement liée au fort rapport d'anisotropie considéré, i.e.  $C_{33}/C_{11}$  proche de 11.

De plus, des mesures de vitesses de groupe furent réalisées dans un matériau composite unidirectionnel carbone/époxy (propriétés élastiques rassemblées dans la légende de la Fig. 7), en utilisant la méthode de génération d'ultrasons par impact laser ponctuel. Les résultats obtenus sont rassemblés sur la figure 7, et furent discutés en détail dans une récente publication [9]. Il faut noter que les lenteurs (de phase et de groupe) furent reconstruites à partir des valeurs de constantes élastiques mesurées à l'aide d'un spectro-interféromètre ultrasonore de précision. L'accord entre les mesures de vitesse de groupe obtenues en génération laser, et la prédiction (notée en traits continus sur la Fig. 7) est excellente, démontrant à l'évidence que la propagation des fronts d'ondes divergent se fait dans un composite (tout comme dans un monocristal) à la vitesse de groupe.

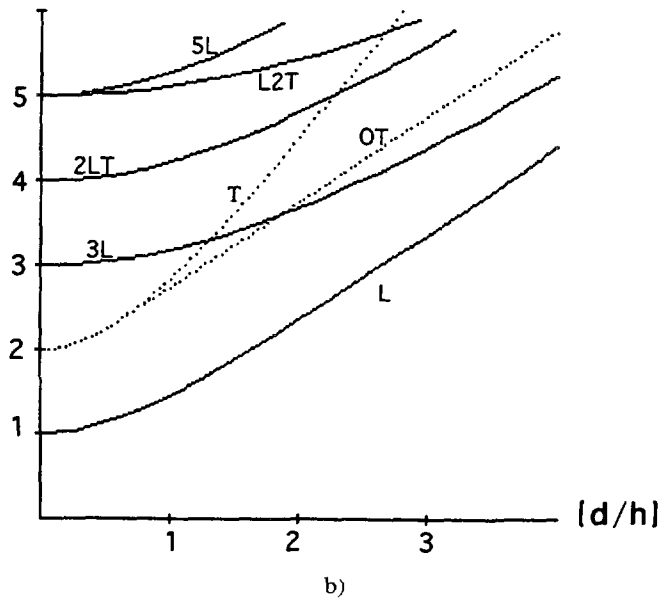
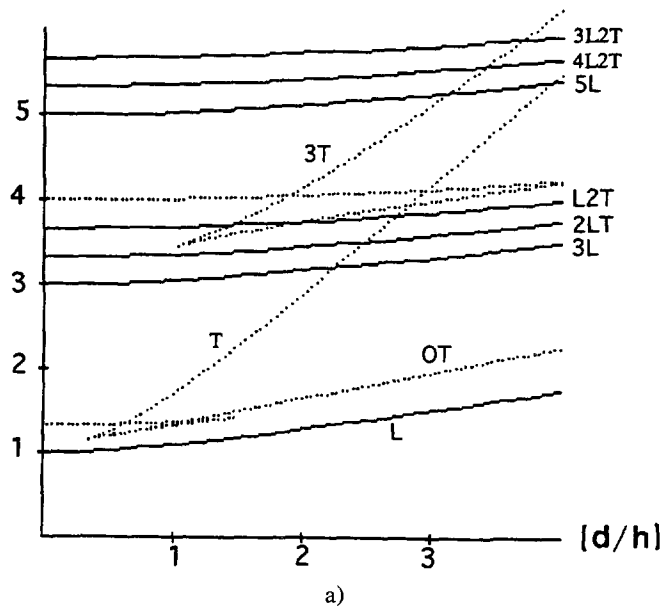


Fig. 6. — Diagrammes de visualisation de fronts d'ondes. a) Pour le matériau de propriétés élastiques utilisées pour tracer la figure 1. b) Pour un matériau isotrope (vitesse longitudinale double de celle transverse).

[Wavefront visualization diagrams. a) For the anisotropic material with elastic properties used in figure 1. b) For an isotropic material (i.e. longitudinal wavespeed is twice the transverse wavespeed).]

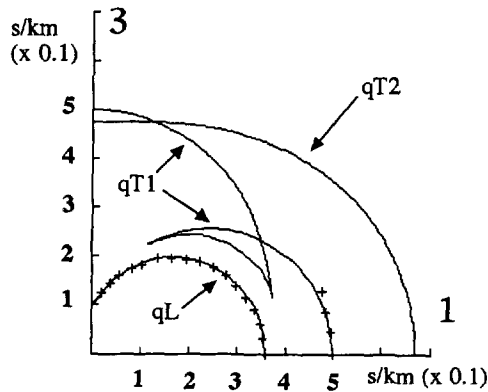


Fig. 7. — Courbes de lenteurs de phase et de groupe théoriques (---) et points expérimentaux (+) dans le plan {1, 3} pour un composite 1-D carbone/époxy, dont les propriétés élastiques sont :  $C_{11} = 11,79$  GPa ;  $C_{22} = 12,31$  GPa ;  $C_{33} = 147,6$  GPa ;  $C_{12} = 5,54$  GPa ;  $C_{13} = 6,91$  GPa ;  $C_{23} = 8,78$  GPa ;  $C_{44} = 6,61$  GPa ;  $C_{55} = 6,20$  GPa ;  $C_{66} = 3,35$  GPa ;  $\rho = 1\,500$  kg.m<sup>-3</sup>

[Theoretical phase and group slowness curves (---) and experimental data (+) in plane {1, 3} for a 1-D carbon/epoxy composite, with the following elastic properties :  $C_{11} = 11.79$  GPa ;  $C_{22} = 12.31$  GPa ;  $C_{33} = 147.6$  GPa ;  $C_{12} = 5.54$  GPa ;  $C_{13} = 6.91$  GPa ;  $C_{23} = 8.78$  GPa ;  $C_{44} = 6.61$  GPa ;  $C_{55} = 6.20$  GPa ;  $C_{66} = 3.35$  GPa ;  $\rho = 1.500$  g.cm<sup>-3</sup> ]

Ce résultat expérimental est remarquable. *En ondes planes, la source est délocalisée.* Seule l'orientation de l'onde est connue, par l'intermédiaire de son vecteur d'onde, et expérimentalement on accède au déphasage de l'onde, ce qui fournit la vitesse de phase de celle-ci. Par contre, pour des *ondes divergentes, la source est spatialement localisée* (par exemple pour une source ponctuelle), ainsi que le récepteur (lui-même idéalement ponctuel). La théorie des rayons nous indique qu'une telle configuration permet d'accéder expérimentalement à la vitesse de groupe dans la direction d'observation « source-récepteur ».

**9. Etude particulière du front d'onde de tête.**

La direction de propagation des fronts d'onde de tête est intimement liée à la notion d'angles limites pour les rayons acoustiques. Nous ne nous intéressons qu'au problème plan, où dans le cas (5) du tableau, il peut exister jusqu'à trois modes de tête, dont les fronts d'onde plans sont montrés en pointillé sur la figure 8 ; leurs trajets étant OAA1, OBB1 et OCC1. Si on désigne par  $V_{1s}$ ,  $V_{2s}$  et  $V_{3s}$  les vitesses de groupe à la surface libre pour chacun des modes générés, les trois angles limites  $\phi_{31}$ ,  $\phi_{21}$  et  $\phi_{32}$  sont déterminés à partir de la relation (4) de la manière suivante :

$$\frac{v_{1g}(\phi_{31})}{\sin \phi_{31} - \frac{1}{v_{1g}(\phi_{31})} \frac{\partial v_{1g}(\phi_{31})}{\partial \phi} \cos \phi_{31}} = V_{1s}, \tag{26}$$

avec des relations similaires pour exprimer  $\phi_{21}$  en fonction de  $V_{2s}$ , ainsi que pour  $\phi_{32}$  en fonction de  $V_{3s}$ . Connaissant au préalable les trois vitesses à la surface, on détermine les trois angles  $\phi_{31}$ ,  $\phi_{21}$  et  $\phi_{32}$ . Notons que pour des rapports d'anisotropie élevés, il peut éventuellement exister deux, un ou zéro angles limites (respectivement ondes de tête).



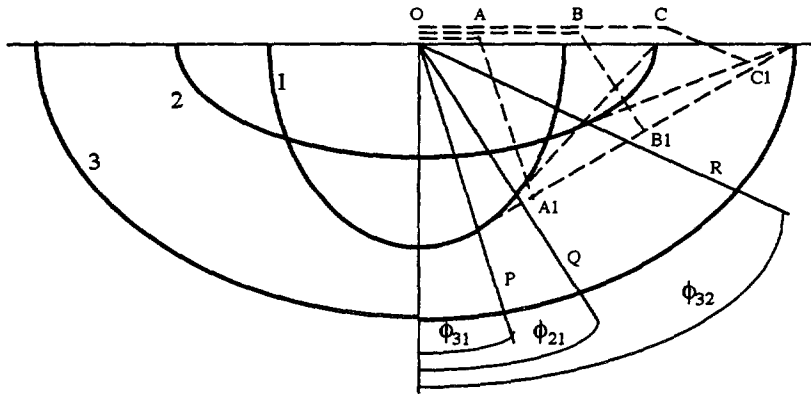


Fig. 8. — Trajets des fronts d'ondes de tête.

[Head waves acoustical ray paths.]

## 10. Conclusion.

L'étude des réflexions multiples d'un faisceau acoustique divergent dans une lame homogène élastique anisotrope dans le cadre de la théorie des rayons acoustiques est plus difficile que le problème analogue en optique, où il n'existe pas de caustiques, ni d'ondes de tête, pour ne considérer que les ondes de volume.

Il est clair, que le temps d'arrivée des modes ainsi que leur mélange éventuel, est une étape pour pouvoir analyser un signal acoustique. La méthode proposée ici présente un gain considérable en temps de calcul par rapport à d'autres déjà connues, de type Monte Carlo. En effet, il ne faut pas plus de 15 mn sur un ordinateur individuel type Mac II, pour tracer le diagramme de la figure 6a, où pas moins de 300 points ont été calculés. Cette étape est insuffisante, et les fonctions de Green relatives au champ des déplacements sont nécessaires, mais longues à calculer. Nous avons souligné que la procédure de calcul s'avère intéressante dans le cas de la source ponctuelle, notamment pour les contributions hors plan. Une étude particulière de ce phénomène a une grande importance pour les matériaux composites de forte anisotropie où l'approximation au début de 6.1 ne doit plus être valable, du moins pour les modes présentant une caustique.

L'étude des rayons généralisés dans le plan complexe par la méthode de Cagniard-de Hoop nous a permis de justifier la non-existence de caustique sur les modes convertis et l'inadéquation du principe de Fermat qui présupposait l'existence de précurseurs. L'utilisation d'une source cylindrique permet de considérer le problème plan, de ne pas avoir affaire à des contributions hors plan et de ne générer que certains modes suivant l'orientation de la source. Au niveau expérimental, il est plus aisé de travailler avec une source ponctuelle, car une source linéique exige une répartition uniforme de l'énergie suivant sa longueur (difficile à réaliser en pratique) il s'ensuit une perte considérable d'énergie. Ainsi, la difficulté d'analyse des signaux avec une source ponctuelle se reporte sur la difficulté d'obtenir une source linéique de répartition énergétique uniforme [10].

**Bibliographie**

- [1] Born M. et Wolf E., *Principles of Optics*, sixième édition (Pergamon Press, 1980).
- [2] Duff G. F. D., The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium, *Philos. Trans. R. Soc. A* **252** (1959) 249-273.
- [3] Dieulesaint E. et Royer D., *Ondes élastiques dans les solides* (Masson, Paris, 1974).
- [4] Every A. G., Sachse W., Kim K. Y. et Thompson M. O., Phonon focusing in silicon at ultrasonic frequencies, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1446-49.
- [5] Payton R. G., *Elastic waves propagation in transversally isotropic media* (Martinus Nijhoff, 1984).
- [6] Kraut E. A., *Advances in the Theory of Anisotropic Elastic Waves Propagation*, *Rev. Geophys.* **1** (1963) 401-448.
- [7] Bass J., *Cours de Maths*, t. **1** (fasc. 2) cinquième édition (Masson, Paris, 1978) pp. 73-75.
- [8] Castagnède B. et Mourad A., Visualisation de fronts d'onde acoustiques divergents dans une lame anisotrope, *C.R. Acad. Sci. Paris II* **314** (1992) 1301-08.
- [9] Castagnède B. et Mourad A., Mesures de vitesses de groupe d'ondes élastiques dans un matériau composite obtenues en génération d'ultrasons par impact laser, *C.R. Acad. Sci. Paris II* **316** (1993) 887-893.
- [10] Mourad A. et Castagnède B., Green function for cylindrical elastic waves in aluminium: Comparison between theory and experiments, *ASME J. Appl. Mech.* (prévu déc. 1993).
- [11] van der Hijden J. H. M. T., *Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media* (North-Holland, 1987).