



HAL
open science

Modélisation magnétique macroscopique des faisceaux de conducteurs

Ernest Matagne

► **To cite this version:**

Ernest Matagne. Modélisation magnétique macroscopique des faisceaux de conducteurs. Journal de Physique III, 1993, 3 (3), pp.509-517. 10.1051/jp3:1993104 . jpa-00248936

HAL Id: jpa-00248936

<https://hal.science/jpa-00248936v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
41.10F — 75.90

Modélisation magnétique macroscopique des faisceaux de conducteurs

Ernest Matagne

Université Catholique de Louvain, Laboratoire d'Electrotechnique et d'Instrumentation, Bâtiment Maxwell, 3 place du Levant, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

(Reçu le 17 mars 1992, révisé le 4 décembre 1992, accepté le 23 décembre 1992)

Résumé. — Cet article traite de la caractérisation magnétique macroscopique des faisceaux de conducteurs, considérés comme des matériaux composites. Nous obtenons par calcul (homogénéisation) une expression analytique explicite et simple des perméabilités magnétiques macroscopiques. L'étude est effectuée dans le domaine fréquentiel. Des comparaisons sont effectuées avec des résultats de calcul par éléments finis.

Abstract. — This paper deals with the macroscopic magnetic characterization of the bundles of conductors, regarded as composite materials. We get by calculation (homogenization) an analytical expression, explicit and simple, for the macroscopic magnetic permeabilities. The study is achieved in the frequency domain. Numeric results are compared with results of computation using finite elements.

1. Introduction.

En électrotechnique, les noyaux magnétiques feuilletés et les faisceaux de conducteurs sont couramment remplacés pour le calcul des champs par des équivalents macroscopiques, ce qui revient à les considérer comme des matériaux composites. Le calcul direct sur le modèle détaillé nécessiterait en effet une finesse de maillage souvent disproportionnée par rapport au but poursuivi. En outre, dans le cas d'un calcul 2D non statique, il faudrait imposer séparément pour chaque tôle et chaque conducteur la nullité de la somme des courants de Foucault. L'homogénéisation, c'est-à-dire la détermination de paramètres macroscopiques en fonction des paramètres du modèle détaillé, permet d'utiliser une géométrie plus simple, donc un maillage beaucoup moins serré, tout en rendant compte correctement du comportement global du dispositif. Cette opération est triviale dans le cas de structures stratifiées sièges de champs statiques [1]. Les autres cas peuvent être traités par un calcul de champ préalable sur une petite partie du dispositif [10]. Ce calcul, bien que beaucoup plus simple qu'un calcul direct complet, peut parfois être avantageusement effectué de façon analytique.

Ceci a été montré dans le cas d'un champ statique pour des conducteurs ronds disposés en vrac, ou encore en mailles régulières isotropes (carrées ou hexagonales) [11].

2. Identification des modèles.

Bien que l'homogénéisation soit souvent effectuée en pratique de façon informelle, la vérification de la méthode employée et l'utilisation correcte des résultats obtenus n'est possible que si les deux modèles impliqués dans le processus sont clairement distingués et définis. Les figures 1 et 2 fournissent un exemple de distinction entre un modèle détaillé et un modèle macroscopique [12], tous deux décrivant le même objet, à savoir un faisceau de conducteurs ronds (partie d'un enroulement en vrac).

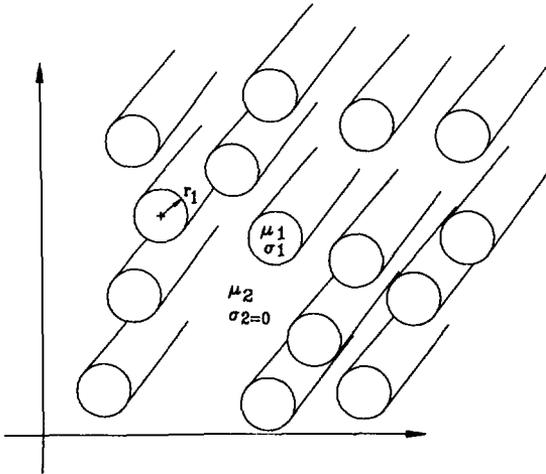


Fig. 1.

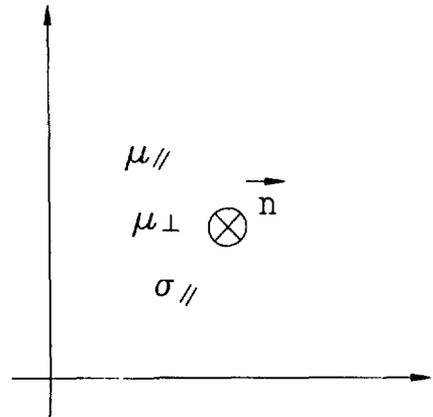


Fig. 2.

Fig. 1. — Modèle détaillé d'un faisceau de conducteurs ronds bobinés en vrac.

[Detailed model for a bundle of random wound round conductors.]

Fig. 2. — Modèle macroscopique correspondant à la figure 1.

[Macroscopic model corresponding to the figure 1.]

Le modèle détaillé considère un ensemble de fils cylindriques parallèles, de rayon r_1 , disposés de façon irrégulière (Fig. 1). Les fils ont une perméabilité magnétique μ_1 et une conductivité électrique σ_1 . Ils sont plongés dans un milieu isolant de perméabilité μ_2 .

Le modèle macroscopique considère un milieu homogène anisotrope, de perméabilité transversale μ_{\perp} et de perméabilité longitudinale μ_{\parallel} et de conductivité longitudinale σ_{\parallel} . La conductivité transversale est nulle. Les grandeurs μ_{\perp} , μ_{\parallel} et σ_{\parallel} sont des nombres complexes dépendant de la fréquence. Il convient d'inclure au modèle une densité de conducteurs n , en vue de son utilisation pour le calcul de paramètres de type circuit (impédances propres et mutuelles pour l'enroulement considéré).

3. Principes de mise en correspondance.

L'homogénéisation est un cas particulier de mise en correspondance entre modèles. La discussion d'une méthode d'homogénéisation n'est possible qu'en précisant le formalisme de la mise en correspondance. Dans notre optique [7, 12], une mise en correspondance demande

d'abord une subdivision des espaces des deux modèles en cellules dont les *parois* ont la même *topologie* dans les deux modèles. Ensuite, il faut construire, à partir de grandeurs intrinsèques (au sens de la géométrie différentielle) aux parois, des quantités globales qui ont les mêmes valeurs dans les deux modèles. La figure 3 symbolise cette méthodologie.

Si l'un des modèles est moins détaillé que l'autre, nous l'appellerons macroscopique, le modèle détaillé étant qualifié de microscopique par opposition. Enfin, si les paramètres du modèle macroscopique peuvent être déterminés en fonction des paramètres microscopiques, nous dirons que la mise en correspondance réalise une homogénéisation.

En électromagnétisme, les grandeurs locales intrinsèques aux parois sont celles qui sont utilisées classiquement dans l'écriture des conditions aux limites ; citons les composantes normales de l'induction \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J} , et les composantes tangentielles du

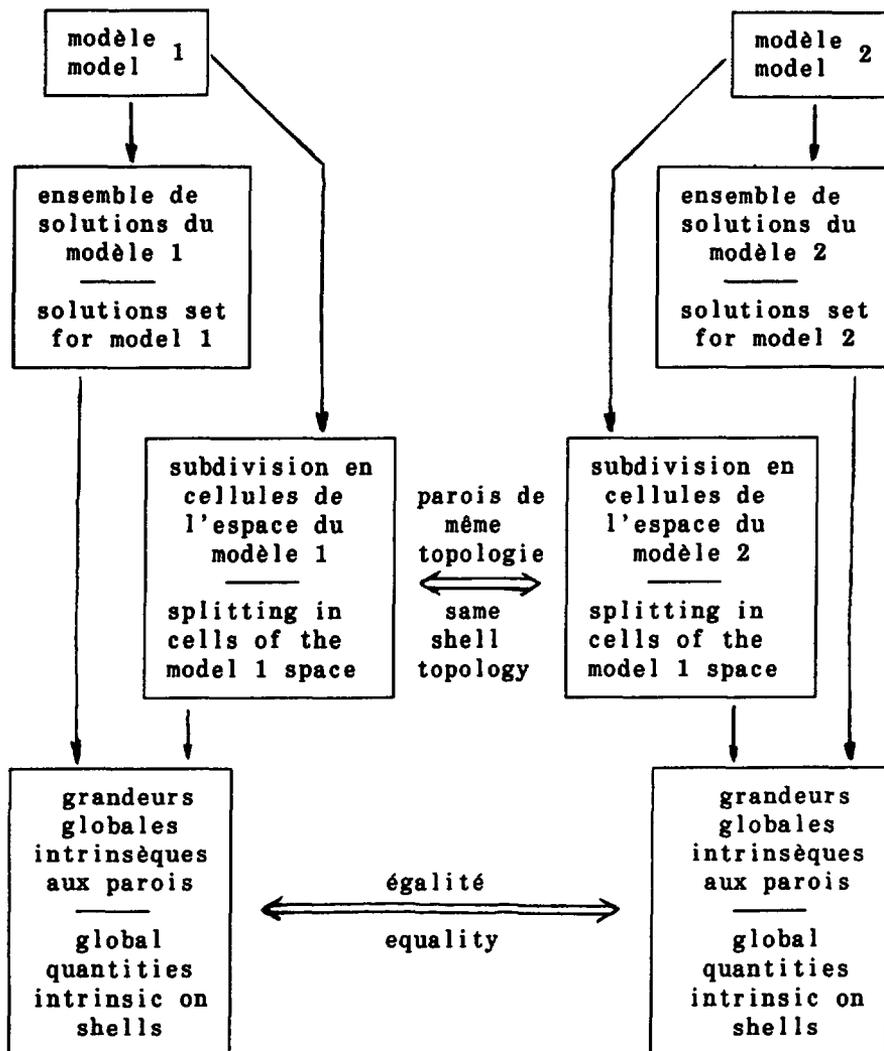


Fig. 3. — Schéma de la mise en correspondance de deux modèles.

[Schematic of the setting in correspondance between two models.]

champ magnétique H . Par intégration (de surface ou de ligne selon le cas), ces grandeurs permettent de construire des grandeurs globales (courant, flux, force magnétomotrice, . . .) utilisées dans la mise en correspondance.

Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans notre article [7].

Cette méthodologie a conduit à des mises en correspondance rigoureuses, quoique limitées à un ensemble restreint de répartitions macroscopiques.

Souvent, la mise en correspondance n'est effectuée que pour des champs macroscopiques uniformes. Parfois, [12], on peut effectuer la mise en correspondance pour des champs dépendant linéairement, ou exponentiellement, de l'espace.

En se limitant à des champs macroscopiques de forme adéquate, l'homogénéisation n'est pas une approximation, mais seulement l'abandon d'une information jugée non significative. Il y a pourtant approximation si on utilise le modèle macroscopique pour des répartitions de champ plus générales.

Cette approximation est d'autant meilleure que les distances typiques de variation des champs macroscopiques sont plus grandes par rapport aux distances caractéristiques du modèle microscopique.

Lors de l'utilisation d'un modèle macroscopique, une autre approximation provient du caractère fini du domaine homogénéisé. L'erreur est habituellement négligeable si ce domaine est grand par rapport aux dimensions caractéristiques du modèle microscopique, à condition que les énergies mises en œuvre dans ce dernier soient du même ordre de grandeur que les énergies macroscopiques. L'introduction d'effets de bord dans le modèle macroscopique permet d'en améliorer la précision de ce point de vue.

Nous nous intéressons dans cet article aux faisceaux de conducteurs ronds. Leurs propriétés thermiques ont été étudiées en [11]. Nous étudions ici à leurs propriétés magnétiques μ_{\perp} et μ_{\parallel} , dans le domaine des harmoniques temporelles. L'étude de leur conductivité macroscopique σ_{\parallel} fera l'objet d'un autre article.

4. Cas des conducteurs disposés en mailles régulières.

Lorsque les conducteurs sont disposés en mailles régulières, on peut utiliser une subdivision en cellules identiques. Les symétries permettent d'imposer des conditions aux limites simples sur les parois de ces cellules, ce qui permet un calcul aisé des champs dans le modèle détaillé.

En particulier, pour des mailles rectangulaires, on peut par raison de linéarité limiter l'étude aux champs macroscopiques parallèles à une des directions de maillage.

Les lignes de flux du modèle microscopique sont alors parallèles à certaines faces et perpendiculaires aux autres, ce qui correspond à des conditions aux limites classiques.

Ainsi, la figure 4 représente les lignes de champs (en phase et en quadrature par rapport au flux traversant la base de la cellule) dans le cas d'une répartition en mailles carrées. Cette figure a été obtenue à l'aide d'un logiciel moderne de CAO électrotechnique (Mag-Net). Puisque ce logiciel utilise le potentiel vecteur comme variable de calcul, on peut imposer une condition de Dirichlet sur chaque face parallèle au champ (le choix des constantes détermine alors la valeur du champ B macroscopique).

Pour obtenir le champ H macroscopique, il suffit d'intégrer le champ détaillé le long d'une frontière parallèle à la direction considérée, et de diviser cette intégrale par la longueur de cette ligne frontière.

Le rapport entre les champs B et H macroscopiques est un nombre complexe, la perméabilité macroscopique μ_{\perp} . Nous avons calculé cette perméabilité pour différentes fréquences, en vue de la comparer avec les valeurs obtenues analytiquement à l'approximation cylindrique (voir plus loin).

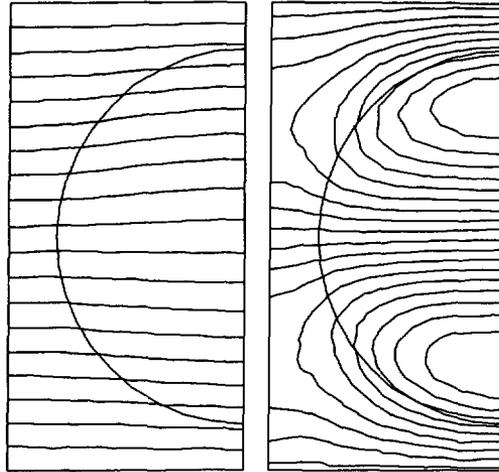


Fig. 4. — Lignes de flux dans le modèle détaillé (répartition en mailles carrées). Composantes en phase (à gauche) et en quadrature (à droite).

[Flux lines in the detailed model (square meshes distribution). Components in phase (left) and in quadrature (right).]

La figure 4 correspond à une demi-maille carrée de 2 mm de côté, un coefficient de remplissage de 0,5 et une fréquence de 10 kHz.

5. Cas des conducteurs bobines en vrac.

Si les conducteurs ne sont pas répartis de façon régulière, les cellules sont différentes les unes des autres ce qui rend la méthodologie développée ci-dessus inapplicable rigoureusement.

Ce cas peut cependant être traité en introduisant une approximation, que nous appellerons l'approximation cylindrique par analogie avec l'approximation sphérique utilisée en physique. Cette approximation consiste à considérer la cellule comme cylindrique (forme « moyenne » de cellules quelconques) et à considérer pour l'écriture des conditions aux limites qu'elle est plongée dans un milieu déjà homogénéisé.

L'approximation sphérique, déjà utilisée de façon informelle par Lorentz [2], a été précisée par la suite à l'occasion de travaux relatifs aux matériaux [3] et à la relativité générale [4, 7].

L'approximation cylindrique a été introduite en [11] pour l'étude thermique des faisceaux de conducteurs. Une analogie évidente conduit aux expressions magnétiques statiques

$$\mu_{\perp} = \frac{1 + \alpha \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}{1 - \alpha \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}} \mu_2 \quad (1)$$

$$\mu_{\parallel} = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \quad (2)$$

où α est le coefficient de remplissage

$$\alpha = \pi r_1^2 n. \quad (3)$$

Dans le cas d'un champ magnétique dépendant sinusoidalement du temps, on sait [6] qu'un cylindre conducteur, plongé dans un champ transversal uniforme à grande distance, se

comporte *vis-à-vis* du champ extérieur comme un isolant de perméabilité complexe

$$\mu_{e\perp} = \frac{J_0(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)}{J_0(\varepsilon) - J_2(\varepsilon)} \mu_1 \quad (4)$$

où J_0 et J_2 sont des fonctions de Bessel, et

$$\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} i^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{\delta} r_1 \quad (5)$$

avec i l'unité imaginaire et δ la profondeur de peau

$$\delta \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_1 \sigma_1}}. \quad (6)$$

Nous avons montré [12] que cette équivalence reste correcte pour les champs rencontrés dans le modèle détaillé à l'approximation cylindrique.

Il suffit dès lors de remplacer, dans l'expression (1), μ_1 par $\mu_{e\perp}$, pour obtenir la généralisation cherchée

$$\mu_{\perp} = \frac{1 + \alpha \frac{\mu_{e\perp} - \mu_2}{\mu_{e\perp} + \mu_2}}{1 - \alpha \frac{\mu_{e\perp} - \mu_2}{\mu_{e\perp} + \mu_2}} \mu_2. \quad (7)$$

Le calcul conduit pour la perméabilité longitudinale à une procédure similaire

$$\mu_{\parallel} = \alpha \mu_{e\parallel} + (1 - \alpha) \mu_2 \quad (8)$$

avec

$$\mu_{e\parallel} = \frac{J_0(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)}{J_0(\varepsilon)} \mu_1. \quad (9)$$

Sur ordinateur, l'évaluation des fonctions de Bessel présentes dans (4) et (9) peut se faire très rapidement par des méthodes classiques [5].

La figure 5 montre l'évolution des parties réelles et imaginaires de μ_{\perp} en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs du coefficient de remplissage.

La figure 6 compare, pour un coefficient de remplissage de 0,5, les résultats obtenus à l'approximation cylindrique (courbe continue) aux valeurs calculées comme expliqué au paragraphe précédent pour une répartition en mailles carrées (astérisques).

On constate que les résultats obtenus sont très semblables. Les expressions analytiques obtenues à l'approximation cylindrique pour les enroulements en vrac peuvent donc être utilisées aussi pour les répartitions en mailles carrées. Les comparaisons faites dans le cas statique [11] montrent que les répartitions en mailles hexagonales constituent un cas intermédiaire, auquel l'approximation cylindrique est donc également applicable.

La figure 7 montre l'évolution des parties réelles et imaginaires de μ en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs du coefficient de remplissage.

On peut montrer que l'expression (8) est valable quelle que soit la répartition en mailles. La comparaison avec un calcul par éléments finis n'a donc pas d'intérêt physique.

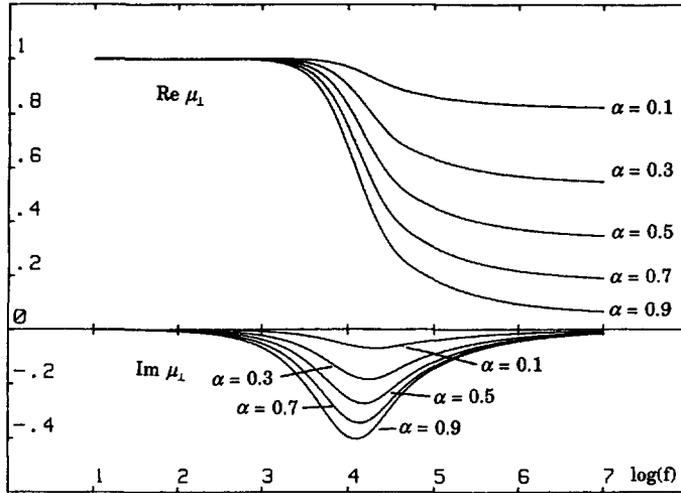


Fig. 5. — Perméabilité magnétique macroscopique μ_{\perp} en fonction de la fréquence f et du coefficient de remplissage α .

[Macroscopic magnetic permeability μ_{\perp} , function of the frequency f and the filling coefficient α .]

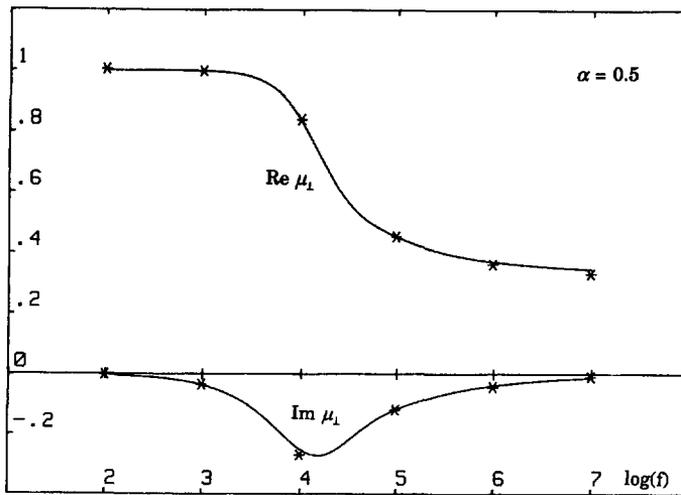


Fig. 6. — Comparaison entre les perméabilités magnétiques μ_{\perp} calculées pour une répartition en mailles carrées (*) et à l'approximation cylindrique (lignes). $\alpha = 0,5$.

[Comparing between the magnetic permeabilities μ_{\perp} computed for a square meshes distribution (*) and using cylindrical estimation (lines). $\alpha = 0.5$.]

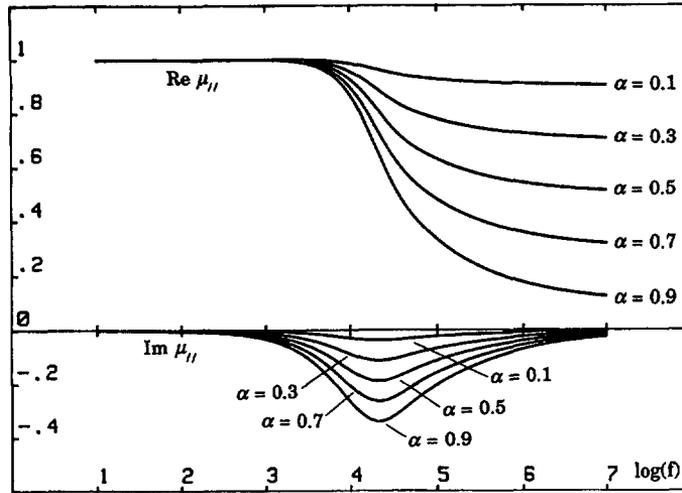


Fig. 7. — Perméabilité magnétique macroscopique μ_1 en fonction de la fréquence f et du coefficient de remplissage α .

[Macroscopic magnetic permeability μ_1 , function of the frequency f and the filling coefficient α .]

6. Utilisation pour le calcul des impédances.

On peut calculer les champs macroscopiques en utilisant les perméabilités complexes introduites ci-dessus, et en déduire par intégration des impédances propres et mutuelles entre les enroulements.

Ces impédances comprennent alors une partie réelle, correspondant aux pertes « magnétiques » par courants de Foucault dans les bobinages.

Ces pertes peuvent encore être localisées en calculant la densité de puissance dissipée. En effet, puisque les perméabilités (7) et (8) sont complexes, les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} macroscopiques ne sont pas en phase. Il en résulte une densité de puissance dissipée

$$p = R_c \left[\frac{i\omega}{2} H^* B \right] \quad (10)$$

qui correspond aux pertes par courants de Foucault microscopiques.

Notons pour éviter toute confusion que les impédances propres doivent être complétées par un terme « ohmique » calculable en utilisant σ_{\parallel} . L'examen de ce paramètre fait l'objet d'un article en préparation.

Conclusions.

Les effets de courants de Foucault circulant dans les faisceaux de conducteurs peuvent être aisément pris en compte si l'on considère une perméabilité magnétique macroscopique complexe.

Il est donc souhaitable que les logiciels standard de calcul de champ permettent l'utilisation de telles perméabilités.

A noter que, pour une parfaite cohérence logique, la possibilité de généraliser les conductivités par des nombres complexes devrait également être introduite dans ces logiciels.

Bibliographie

- [1] MAXWELL J. C., A treatise on electricity and magnetism, 3d edition (Clarendon Press, 1881) (réédité par Dover, 1954).
- [2] LORENTZ H. A., The theory of electrons, sect. 117 (Teuliner, Leipzig, 1906) (réédité par Dover, Inc., 1952).
- [3] WIGNER E. P., SEITZ F., On the constitution of metallic sodium, *Phys. Rev.* **43** (1933) 804.
- [4] LINDQUIST R. W., WHEELER J. A., Dynamics of a lattice universe by the Schwarzschild cell method, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 432-433.
- [5] ABRAMOVITZ M., STEGUN I., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, N.B.S. Applied Mathematics, Series 55 (June 1964).
- [6] STOLL R. L., The analysis of eddy currents (Clarendon Press, Oxford, 1974).
- [7] MATAGNE E., La correspondance entre modèles microscopiques et macroscopiques *Portugaliae Phys.* **9** (1975) 141-176.
- [8] BASTOS J. P., JABLON C., QUICHAUD G., RIOUX-DAMIDAU F., Modélisation magnétique et numérique par éléments finis de feuilletage ferromagnétique, RPA (décembre 1980) pp. 1625-1630.
- [9] DE ROCHEBRUNE A. *et al.*, A technique of homogenisation applied to the modelling of transformers, *Compumag 89, IEEE Trans. Magn.* (mars 1990).
- [10] DEDULLE J., MEUNIER G., PIERRAT L., SABONNADIÈRE J. C., Homogenization for non linear problems applied to the modelling of transformers, Imacs-TC1, Nancy (19-21 septembre 1990).
- [11] MATAGNE E., Macroscopic thermal conductivity of a bundle of conductors, Imacs-TC1, Nancy (19-21 septembre 1990).
- [12] MATAGNE E., Contributions à la modélisation de dispositifs électrotechniques en vue de leur optimisation, Thèse UCL, décembre 1991.