



**HAL**  
open science

## Couplage des équations électriques et magnétiques

P. Lombard, G. Meunier

► **To cite this version:**

P. Lombard, G. Meunier. Couplage des équations électriques et magnétiques. Journal de Physique III, 1993, 3 (3), pp.397-412. 10.1051/jp3:1993138 . jpa-00248928

**HAL Id: jpa-00248928**

**<https://hal.science/jpa-00248928>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification  
Physics Abstracts  
41.90 — 02.60

## Couplage des équations électriques et magnétiques

P. Lombard <sup>(1)</sup> et G. Meunier <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> CEDRAT Recherche, 10 chemin du pré carré, ZIRST, 38240 Meylan, France

<sup>(2)</sup> Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (U.R.A. CNRS 355) ENSIEG, B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

*(Reçu le 17 mars 1992, révisé le 29 septembre 1992 accepté le 22 octobre 1992)*

**Résumé.** — L'analyse des dispositifs électrotechniques est souvent limitée par les sources d'alimentation. En effet, dans le cas de conducteurs massifs, la valeur de la tension est requise, alors que, dans le cas de conducteurs bobinés, le courant doit être connu. Ces restrictions sont dues à la nature des équations de champ. Une nouvelle formulation est proposée qui permet de choisir la source d'alimentation et d'autoriser tous les types de connexions entre les composants. Deux types de « conducteurs magnétiques » sont considérés : les conducteurs massifs, dans lesquels des courants de Foucault peuvent être induits et les conducteurs bobinés sans courants de Foucault. Une équation associant le potentiel vecteur magnétique, le courant et la tension est établie pour chaque type de conducteurs. Cette équation est introduite dans une méthode conventionnelle d'analyse des circuits électriques. Les équations électriques et magnétiques sont résolues simultanément. Une méthode implicite est utilisée pour discrétiser les équations dans le temps. Un algorithme de linéarisation de Newton-Raphson est utilisé pour les problèmes qui incluent des matériaux à caractéristiques non linéaires. Cette formulation a été implantée dans un logiciel commercial FLUX2D. Pour illustrer une des nombreuses applications, un contacteur électromagnétique avec spires de Frager est modélisé.

**Abstract.** — The non-linear analysis of electrical devices is often limited by the complexity of the power supply. In effect, in the case of solid conductors, the voltage is required, while in the case of stranded conductors, the current must be known. These restrictions are due to the nature of the field equations. A new formulation is proposed which allows the possibility to choose the power supply and choose any kind of connection between components. Two types of « magnetic conductors » are considered : solid conductors, in which eddy current can be induced and stranded conductors without eddy current. An equation combining the magnetic potential, the current and the voltage is established for each conductor. This equation is introduced into a conventional circuit analysis method. The magnetic field and circuit equations can be solved simultaneously in the resulting system. An implicit method is used to discretize the equation in time. A Newton-Raphson linearization algorithm is used to handle problems that include materials with non linear properties. This formulation is used in the commercial program FLUX2D. To illustrate one of the many applications, an A.C. electromagnet is studied.

## Introduction.

Les logiciels de calcul de champs électromagnétiques bidimensionnels tendent à devenir d'un usage courant pour la modélisation des dispositifs électrotechniques. Ces logiciels permettent généralement le calcul de la répartition des champs électromagnétiques ainsi que des grandeurs globales qui y sont rattachées (force, couple, ..). Ils autorisent la prise en compte de géométries précises ainsi que les caractéristiques non linéaires des matériaux. Ces logiciels sont désormais très opérationnels en deux dimensions.

Cependant, une limitation à l'utilisation de ces logiciels provient du fait qu'ils nécessitent la connaissance a priori des courants source pour pouvoir modéliser tout dispositif électrique. La non linéarité des matériaux d'une part, la répartition non uniforme des courants induits d'autre part, rendent le rebouclage courant-tension très difficile, voire impossible pour l'utilisateur du logiciel.

Dans ce contexte il a été décidé de réaliser un couplage des équations électriques et magnétiques. L'objectif est de pouvoir tenir compte de n'importe quel type de circuits extérieurs au domaine éléments-finis. Pour l'instant, les composants admis sont les suivants : des conducteurs bobinés fins (supposés sans courants de Foucault), des conducteurs massifs (avec courants de Foucault), des composants passifs (de type R et L) et des sources de courant et de tension sinusoïdales. Nous allons étudier la mise en équation de tous ces composants et leur interaction avec le système magnétique. En fait, nous distinguons les composants que nous appelons « magnétiques » des autres composants qui n'interviennent que dans les équations de circuit. On trouve dans la littérature quelques approches pour les composants magnétiques ([1-3]). A l'aide de toutes ces équations nous formerons le système à résoudre.

Ce système a été implanté sur un logiciel de calcul de champ par la méthode des éléments-finis : FLUX2D. Nous verrons comment ce logiciel a été modifié afin d'introduire les équations électriques supplémentaires. Ces modifications concernent aussi bien les parties d'intégration assemblage que la structure des données, les pré et post-processeur...

Enfin, nous présentons quelques aspects de la partie résolution à partir d'un exemple concret. Nous prenons l'exemple d'un contacteur avec spires de Frager. Cet exemple est particulièrement intéressant car il combine à la fois un conducteur bobiné fin et deux conducteurs massifs, c'est-à-dire les deux types de composants « magnétiques ».

## 1. Equations.

Pour réaliser la prise en compte des équations électriques et magnétiques, plusieurs méthodes ont été proposées. D'abord, une méthode itérative a été utilisée : après un premier calcul, si le résultat était trop « fort », le calcul était relancé avec des valeurs plus « faibles » pour la source. Cependant, ce procédé demande un certain nombre d'itérations et doit être adapté à chaque cas. Ensuite, nous trouvons dans la littérature d'autres méthodes : la méthode intégral-différentielle [4, 5, 8] et la méthode avec résolution simultanée des équations électriques et magnétiques [1, 3, 7, 10].

En quelques phrases, la méthode intégral-différentielle consiste à intégrer les relations de la loi d'Ohm sur les conducteurs dans les équations magnétiques. Cette méthode a l'avantage de conserver une matrice bien conditionnée mais présente l'inconvénient majeur de perdre le caractère creux de la matrice à résoudre. Il s'ensuit que les temps de calcul deviennent vite conséquents et très pénalisants comme le montre Lindfors [8] par rapport à la méthode avec résolution simultanée des équations électriques et magnétiques.

Cette dernière méthode consiste à ajouter à la suite du système magnétique les équations du système électrique. Cette méthode a déjà été explorée mais à chaque fois les équations

développées concernent des circuits bien définis. De plus le cas des conducteurs massifs est rarement étudié. Notre propos est de mettre au point une formulation générale. Nous nous intéresserons aux circuits comprenant des résistances, des inductances, des générateurs de fem ou de courant, des conducteurs filaires (ex. des bobines) et des conducteurs massifs reliés entre eux de manière quelconque.

La principale difficulté provient des conducteurs qui sont parcourus par des courants du fait de leur appartenance au circuit électrique, et qui sont des sources de champ magnétique du fait des courants qui les traversent. Nous commencerons par décrire les équations aux bornes de ces conducteurs avant de s'intéresser à la prise en compte des équations globales de circuit et du couplage.

1.1 EQUATIONS AUX BORNES DES CONDUCTEURS. — Nous distinguons deux types de conducteurs : les conducteurs massifs et les conducteurs filaires (ou bobinés fins).

1.1.1 *Les conducteurs massifs.* — les équations qui suivent concernent les régions conductrices massives.

1.1.1.1 Equations. — Nous avons, compte tenu du fait que nous pouvons négliger les courants de déplacement, la forme suivante des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{Rot } H &= j, \\ \text{Rot } E &= -\partial B/\partial t, \\ H &= \nu B, \\ j &= \sigma E, \\ \text{div } B &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $H$  est l'excitation magnétique,  $B$  l'induction magnétique,  $E$  le champ électrique,  $j$  la densité de courant,  $\nu$  la reluctivité et  $\sigma$  la conductivité électrique. En introduisant le potentiel vecteur magnétique  $A$  tel que  $B = \text{rot } (A)$  l'équation classique du champ est obtenue :

$$\text{Rot } (\nu \text{ Rot } A) = j. \quad (2)$$

Pour les régions conductrices massives, il y a couplage des champs électrique et magnétique ce qui se traduit par le développement de courants induits dans la masse des conducteurs. En écrivant

$$\text{Rot } (E) = -\partial(\text{rot } A)/\partial t = \text{rot } (-\partial A/\partial t). \quad (3)$$

Nous faisons apparaître le potentiel scalaire électrique  $V$  tel que :

$$j = -\sigma \partial A/\partial t - \sigma \text{ Grad } V. \quad (4)$$

La densité de courant  $j$  est donc la somme de deux termes : un terme de courants induits dû au potentiel vecteur magnétique  $A$  et un terme lié au potentiel scalaire électrique  $V$ . Le potentiel électrique  $V$  est dû à la tension appliquée sur les conducteurs mais également à l'effet du champ magnétique (couplage).

L'équation du champ magnétique en terme de potentiel vecteur s'écrit finalement :

$$\text{Rot } (\nu \text{ Rot } A) + \sigma \partial A/\partial t + \sigma \text{ Grad } V = 0. \quad (5)$$

$\text{Grad } V$  représente le gradient de potentiel électrique dans les conducteurs et il n'est généralement pas connu. Nous allons voir que dans le cas bi-dimensionnel cartésien nous pouvons le définir sur chaque conducteur.

Dans le cas du 2D cartésien nous supposons qu'un problème de longueur fini peut être résolu comme étant partie d'un problème infiniment long suivant la direction  $z$ , et tel que les courants n'aient qu'une composante (suivant  $z$ ). En conséquence le champ magnétique n'a que deux composantes dans le plan d'étude  $x - y$ . Les conducteurs sont représentés par des surfaces orientées (pour définir le sens du circuit électrique associé) et caractérisés par une conductivité électrique  $\sigma(x - y)$  qui peut être fonction de l'espace.

L'équation (5) prend la forme simplifiée scalaire, car  $A$ ,  $j$  et  $\text{Grad } V$  n'ont qu'une composante suivant  $z$  :

$$\partial(v \partial A / \partial x) / \partial x + (v \partial A / \partial y) / \partial y - \sigma \partial A / \partial t - \sigma \text{Grad } V = 0. \quad (6)$$

Dans le cas bidimensionnel il faut alors remarquer que  $\text{Grad } V$  est constant sur un conducteur. En effet l'équation (1) s'écrit (en remarquant que  $A$  et  $j$  n'ont qu'une composante suivant  $z$ ):

$$\begin{aligned} d(j - \sigma dA/dt)/dx &= 0 \\ d(j - \sigma dA/dt)/dy &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Par conséquent,  $j - \sigma dA/dt = \text{Cte} = -\text{Grad } V$  à l'intérieur du conducteur. Si  $L$  est la longueur du domaine d'étude (suivant  $z$ )  $L \text{Grad } V$  représente la chute de tension sur le conducteur. Finalement il y aura autant de valeurs de  $(\text{Grad } V)_k$  qu'il y aura de conducteurs massifs traversant le plan d'étude. Néanmoins si plusieurs conducteurs sont mis en parallèle, ils auront la même valeur de  $\text{Grad } V$  et pourront être considérés comme un conducteur unique.

La relation (4) peut être intégrée sur chaque sous-région  $k$  conductrice où  $\text{Grad } V$  est constant :

$$j = -\sigma \partial A / \partial t - \sigma \text{Grad } V$$

$$\int_{s_k} j dS_k = I_k = \int_{s_k} \sigma \partial A / \partial t dS_k - (\text{Grad } V)_k \int_{s_k} \sigma dS_k \quad (8)$$

où  $I_k$  est le courant traversant le conducteur  $k$ .

En écrivant

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= -L \text{Grad } V_k, \\ R_k &= L / \int_{s_k} \sigma dS_k. \end{aligned} \quad (9)$$

$R_k$  est la résistance du conducteur  $k$  dans le domaine d'étude et  $\Delta V_k$  la chute de tension aux bornes du conducteur ; la relation courant-tension s'écrit :

$$\Delta V_k = R_k I_k + R_k \int_{s_k} \sigma \partial A / \partial t dS_k. \quad (10)$$

**1.1.1.2 Discretisation.** — Après discrétisation du domaine en éléments finis, le potentiel vecteur  $A$  est approximé à l'aide de fonctions de forme classiques :

$$A = \sum \beta_j A_j. \quad (11)$$

En appliquant la méthode de Galerkin dans l'équation (5) avec des fonctions de projection et des fonctions de forme identique ( $\beta_j$ ), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$[S] [A] + [G] d[A]/dt - [C] [\Delta V] = 0 \quad (12)$$

avec

$\Delta V_k = -L(\text{Grad } V_k)$  où  $L$  est la longueur (suivant la direction perpendiculaire au plan d'étude) du domaine traité par éléments finis

$$\begin{aligned} S_{ij}(N \times N) &= \int_{S_k} L \nu \text{ grad } \beta_i \text{ grad } \beta_j \, dS \\ G_{ik}(N \times N) &= \int_{S_k} L \beta_i \beta_j \sigma \, dS_k \\ C_{ik}(N \times M) &= \int_{S_k} \beta_i \sigma \, dS_k. \end{aligned} \quad (13)$$

$M$  : nombre de conducteurs massifs.

Les relations courant-tension (10) des conducteurs se mettent sous la forme :

$$[\Delta V] = [R] [I] + [R] [C]^T \frac{d[A]}{dt} \quad (14)$$

où  $[R]$  matrice diagonale telle que

$$R_{kk}(M \times M) = R_k. \quad (15)$$

Après les conducteurs massifs nous allons étudier les conducteurs filaires.

### 1.1.2 Les conducteurs filaires.

1.1.2.1 Equations. — Nous supposons que chaque région conductrice bobinée est constituée d'un certain nombre de brins conducteurs avec une entrée et une sortie de courant. Chaque région est caractérisée par son orientation, un nombre de brins, un coefficient de remplissage et une conductivité qui peut être fonction de l'espace (pour un couplage avec un problème thermique par exemple). Pour le calcul de champ magnétique nous faisons l'hypothèse que l'épaisseur de peau est grande par rapport à la dimension d'un fil conducteur. Dans ce cas le champ de réaction d'induit est généralement négligeable et par conséquent ne perturbe pas la distribution spatiale du champ magnétique total. Cette hypothèse va permettre de découpler partiellement les équations des champs magnétiques et électriques. En effet, si nous considérons une région constituée de  $N_S$  filaments parcourus par un courant  $I_k$  et de surface  $S_k$ , la densité de courant sera considérée comme constante sur la région et donnée par la relation :

$$j = \frac{N_S I_k}{S_k} \quad (16)$$

Si la densité de courant  $j$  est imposée, les équations permettant de déterminer le champ magnétique se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= j \\ H &= \nu B \\ \text{div } B &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

et l'équation du champ magnétique en terme de potentiel vecteur est donnée par la relation (2).

Dans le cas bidimensionnel cartésien, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j. \quad (18)$$

Une fois le champ magnétique connu, il est possible d'exprimer la chute de tension due aux  $N_S$  filaments de la sous-région  $k$ . En reprenant la relation courant-tension pour un conducteur massif nous pouvons écrire, en l'appliquant à l'ensemble des brins conducteurs :

$$\Delta V_k = \sum \left( R_i I_k + \int_{S_i} R_i \sigma \partial A / \partial t \, dS_i \right) \quad i = 1, N_S \quad (19)$$

avec :

$S_i$  surface d'un conducteur élémentaire

$S_i = \lambda S_k / N_S$  où  $\lambda$  représente un coefficient de remplissage

$$R_i = L / \int_{S_i} \sigma \, dS_i .$$

La somme des  $\Delta V_k$  des sous-régions constituant l'enroulement permettra d'obtenir la tension globale.

L'expression devient, en supposant que  $\sigma$  est constant sur un brin élémentaire :

$$\Delta V_k = \sum \left( 1/\sigma_i S_i I_k + \int_{S_i} L/S_i \partial A / \partial t \, dS_i \right) \quad i = 1, N_S \quad (20)$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} \sum L/\sigma_i S_i &= (LN_S/\lambda S_k) \sum 1/\sigma_i \sim (LN_S/\lambda S_k) N_S/S_k \int_{S_k} 1/\sigma \, dS_k \\ \sum \int_{S_i} L/S_i \partial A / \partial t \, dS_i &\sim LN_S/S_k \int_{S_k} \partial A / \partial t \, dS_k \end{aligned} \quad (21)$$

nous obtenons finalement la relation :

$$\Delta V_k = R'_k I_k + LN_S/S_k \int_{S_k} \partial A / \partial t \, dS_k \quad (22)$$

avec :

$$R'_k = (1/\lambda) L (N_S^2/S_k^2) \int_{S_k} 1/\sigma \, dS_k \quad (23)$$

$$R'_k = (1/\lambda) N_S^2 R_k \quad (24)$$

si  $\sigma$  est une constante sur l'ensemble des brins conducteurs.

$\Delta V_k$  représente la chute de tension due aux brins appartenant à la région K. Cette valeur doit être généralement corrigée par l'effet des courants induits dans l'épaisseur des brins conducteurs. En effet si il est licite de supposer que la répartition du champ magnétique n'est pas perturbée par cet effet lorsque l'épaisseur de peau est supérieure à la dimension des brins, il n'en est pas de même en ce qui concerne la valeur apparente de la résistance qui peut être grandement modifiée par la présence du champ magnétique (10).

**1.1.2.2 Discrétisation.** — Ecrivons maintenant l'équation du système matriciel engendré par la méthode des éléments finis dans le cas bidimensionnel cartésien. Après discrétisation du domaine en éléments finis, le potentiel vecteur  $A$  est approximé à l'aide de fonctions de forme classiques (11).

En appliquant la méthode de Galerkin dans l'équation (18) avec des fonctions de projection et des fonctions de forme identiques ( $\beta_i$ ), nous obtenons le système d'équations suivant, dans l'hypothèse d'un régime sinusoïdal :

$$[S] [A] = [C'] [I] \quad (25)$$

avec :

$$\begin{aligned} C'_{ik}(N \times F) &= \left( \frac{N_s L}{S_k} \right) \int_{S_k} \beta_i dS_k \\ S_{ij}(N \times N) &= \int_{S_k} L \nu \text{grad } \beta_i \text{grad } \beta_j dS \end{aligned} \quad (26)$$

$F$  : nombre de conducteurs filaires.

Les relations « courant-chute de tension » (22) des différentes régions se mettent sous la forme :

$$[\Delta V] = [R'] [I] + [C']^T \frac{d[A]}{dt} \quad (27)$$

avec  $[R']$  une matrice diagonale telle que

$$R'_{kk}(F \times F) = R'_k. \quad (28)$$

Après cette mise en place des équations aux bornes des « conducteurs magnétiques », nous allons rappeler les équations de circuit utilisées pour décrire un réseau, afin de réaliser le couplage de toutes ces équations.

**1.2 EQUATIONS DE CIRCUIT.** — Nous commencerons par définir ce que nous entendons par circuit avant de présenter deux formulations classiques.

**1.2.1 Quels circuits ?** — Les circuits que nous allons modéliser comportent des résistances, des inductances, des générateurs de fem et de courant. Ces éléments peuvent être reliés entre eux de manière quelconque.

**1.2.2 Formulation.** — Classiquement pour modéliser de tels réseaux, dans la littérature, nous trouvons deux approches [1], duales l'une de l'autre. L'une consiste à considérer les potentiels vecteurs comme inconnues tandis que l'autre s'intéresse aux courants dans les mailles. Nous avons retenu cette dernière solution car dans le premier cas la forme des relations  $I = f(V)$  ne peut être générale dans le cas des bobines couplées magnétiquement. On rappelle que l'on étudie ici le circuit électrique extérieur au domaine éléments-finis.

Rappelons quelques notions élémentaires. Le circuit électrique, ou réseau est constitué de  $B$  branches reliant  $N$  nœuds. Les branches sont orientées (en mettant un point proche d'une des bornes par exemple). Il est possible d'établir dans un réseau des trajets, constitués de branches, qui relient tous les nœuds sans former de circuit fermé ; ils ne peuvent être parcourus par aucun courant : ce sont les *arbres* du réseau. Quel que soit l'arbre d'un réseau, il contient  $m$  branches d'arbre :

$$m = N - 1. \quad (29)$$

Un arbre étant choisi, l'introduction de toute autre branche du réseau créé un circuit fermé, appelé boucle ou maille, ce qui offre la possibilité à un courant de circuler. On prendra soin d'orienter chaque boucle. Ces branches sont appelées *branches de liaison*, ou plus brièvement,



liaisons. Toutes les branches qui ne sont pas des branches d'arbre sont des branches de liaison. Ces dernières sont au nombre de  $\ell$  :

$$\ell = B - N + 1 . \quad (30)$$

On peut à partir des boucles, exprimer chaque courant de branche d'arbre en fonction des courants de liaison (ou de boucle). D'autre part, en écrivant la loi de Kirchhoff des tensions dans chaque boucle, nous obtenons  $\ell$  relations indépendantes entre les tensions. Nous sommes conduit au système matriciel suivant :

$$[Z_m] [I_m] + [L_m] d[I_m]/dt = [E_m] \quad (31)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_i(\ell) &= \text{courant de la boucle } i \\ E_i(\ell) &= \text{somme des fem de la boucle } i \\ Z_m(\ell \times \ell) & \text{ matrice} \end{aligned}$$

$Z_{ii}$  somme des résistances rencontrées dans la boucle  $i$  avec le signe « + »

$Z_{jk}$  somme des résistances communes aux boucles  $j$  et  $k$ , avec un signe « + » si ces impédances sont parcourues dans le même sens par les deux courants de boucle, avec un signe « - » dans le cas contraire.

$L_m(\ell \times \ell)$  idem  $Z$  mais pour des inductances .

Maintenant que nous avons présenté les équations utilisées pour modéliser le réseau et celles concernant les différents types de conducteurs, nous pouvons les coupler.

**1.3 COUPLAGE.** — Nous aborderons le couplage en distinguant les conducteurs massifs des conducteurs filaires puisque les équations sont différentes.

**1.3.1 Avec des conducteurs massifs.** — Nous considérons un réseau électrique dans lequel nous introduisons un ensemble de conducteurs massifs. Pour simplifier cette présentation, nous allons considérer ces conducteurs comme des liaisons. Les équations en présence sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [S] [A] + [G] d[A]/dt - [C] [\Delta V] &= [0] \\ [\Delta V] &= [R] [I] + [R] [C]^T d[A]/dt \\ \text{et} \\ [E_m] &= [Z'_m] [I_m] + [D] [\Delta V] + [L_m] d[I_m]/dt . \end{aligned} \quad (32)$$

Dans cette dernière équation, chaque ligne correspond à l'équation de tension d'une boucle :

$$\sum U_k = \sum (z_k i_k + 1_k di_k/dt - e_k) = 0 . \quad (33)$$

La matrice  $D$  permet d'insérer les « composants magnétiques » dans le circuit électrique. La matrice  $D(\ell \times M)$  est définie par :

+ 1 si courant traversant le conducteur  $j$  est dans le même sens que le courant dans la boucle  $i$ ,

- 1 si courant traversant le conducteur  $j$  est opposé au sens du courant de la boucle  $i$ ,

0 sinon.

Nous remarquons que  $[I] = [D]^T [I_m]$ . Par ailleurs  $Z'_m$  a la même définition que

$Z_m$  sauf que les résistances des conducteurs massifs n'interviennent pas dans  $Z'_m$  bien qu'elles appartiennent à certaines mailles.

Nous pouvons essayer de rendre symétrique ce système d'équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [S] [A] + [G] d[A]/dt - [C] [\Delta V] &= [0] \\ - [C]^T d[A]/dt + [R^{-1}] [\Delta V] - [D]^T [I_m] &= [0] \\ - [D] [\Delta V] - [Z'_m] [I_m] - [L_m] d[I_m]/dt &= - [E_m]. \end{aligned} \quad (34)$$

**1.3.2 Couplage avec des conducteurs filaires.** — Nous considérons un réseau électrique dans lequel nous introduisons un ensemble de conducteurs filaires. Les équations en présence sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [S] [A] - [C'] [I] &= 0 \\ [\Delta V] &= [R'] [I] + [C']^T d[A]/dt \\ [E_m] &= [Z_m] [I_m] + [D'] [\Delta V] + [L_m] d[I_m]/dt. \end{aligned} \quad (35)$$

La matrice  $D' (I \times F)$  a été introduite pour les mêmes raisons que précédemment. Elle est définie par :

+ 1 si courant dans la boucle  $i$  est dans le même sens que le courant traversant le conducteur bobiné  $j$

-1 si courant dans la boucle  $i$  est dans le sens opposé au courant traversant le conducteur bobiné  $j$

0 sinon.

De même nous remarquons que  $[I] = [D']^T [I_m]$ . En essayant de rendre symétrique ce système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [S] [A] - [C'] [D']^T [I_m] &= 0 \\ - [D'] [C']^T d[A]/dt - [Z_m] [I_m] - [L_m] d[I_m]/dt &= - [E_m]. \end{aligned} \quad (36)$$

**1.3.3 Equations de couplage.** — Il existe des cas où l'on utilise simultanément les deux types de conducteurs. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{aligned} [S] [A] + [G] d[A]/dt - [C] [\Delta V] - [C'] [D']^T [I_m] &= [0] \\ - [C]^T d[A]/dt + [R^{-1}] [\Delta V] - [D]^T [I_m] &= [0] \\ - [D'] [C']^T d[A]/dt - [D] [\Delta V] - [Z'_m] [I_m] - [L_m] d[I_m]/dt &= - [E_m]. \end{aligned} \quad (37)$$

A ce niveau de l'exposé, il faut maintenant choisir le type de source utilisée. Soit nous nous intéressons à une source quelconque, auquel cas une méthode de résolution en pas à pas dans le temps est nécessaire, soit nous considérons le cas particulier du régime sinusoïdal permanent où nous utilisons une représentation avec des nombres complexes.

**1.3.3.1 Pas à pas dans le temps.** — Afin de discrétiser dans le temps ces équations, nous avons opté pour la méthode implicite. Ceci nous permet d'exprimer les dérivées par rapport au temps :

$$\frac{dA}{dt} t + \Delta t = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (38)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps.

En remplaçant  $dA/dt$  et  $dI_m/dt$  par leurs expressions, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} S + G^T/\Delta t & -C & -C' D'^T \\ -C^T & R^{-1} \Delta t & -D^T \Delta t \\ -D' C'^T & -D \Delta t & -Z_m \Delta t - L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Delta V \\ I_m \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} G^T A_t/\Delta t \\ -C^T A_t \\ -E_{t+\Delta t} \Delta t - L_m I_{m,t+\Delta t} - D' C'^T A_t \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Nous pouvons remarquer que cette matrice est symétrique.

**1.3.3.2 Régime sinusoïdal.** — Dans le cas où toutes les sources sont sinusoïdales, nous pouvons utiliser la notation complexe. En particulier, l'opérateur dérivation ( $d/dt$ ) peut être remplacé par l'opérateur  $\times j\omega$  où  $\omega$  est la pulsation du régime sinusoïdal. Dans cette hypothèse, les équations deviennent :

$$\begin{bmatrix} S + j\omega G & -C & -C' D'^T \\ -C^T & \frac{R^{-1}}{j\omega} & -\frac{D^T}{j\omega} \\ -D' C'^T & -\frac{D}{j\omega} & -\frac{Z'_m}{j\omega} + L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Delta V \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_m}{j\omega} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

## 2. Implantation informatique.

Il nous semble important d'indiquer la démarche suivie pour introduire les équations électriques aux équations magnétiques. En effet, cette démarche peut être utile pour tout nouveau couplage (thermique, mécanique, ...). Après la mise au point de la formulation, le choix d'une structure de données est capital. Ensuite, l'implantation informatique peut s'effectuer dans de bonnes conditions.

Avant d'expliquer les divers points modifiés, rappelons la structure générale d'un logiciel éléments-finis. Nous pouvons distinguer sommairement :

- le pré-processeur comprenant la description de la géométrie et des propriétés physiques ;
- le processeur réalisant le calcul en lui-même ;
- le post-processeur permettant le calcul des grandeurs intéressant l'utilisateur (force, couple, ...) à partir de la solution obtenue.

**2.1 STRUCTURE DE DONNÉES.** — Après avoir écrit les équations, l'une des grandes difficultés est le choix d'une structure de données. Il faut que celle-ci soit la plus ouverte possible et qu'elle induise un minimum de modifications dans les routines déjà existantes pour l'ajout d'un nouveau composant.

De plus, au niveau des données, il existe un fichier de transmission qui stocke les informations entre les différentes étapes. La structure de ce fichier a été complétée pour pouvoir prendre en compte les équations de circuit.

**2.2 LES MODIFICATIONS EFFECTUÉES.** — Au niveau du pré-processeur, une description des circuits a été introduite. Il s'agit d'une part de décrire les circuits et d'autre part de donner les caractéristiques des divers composants.

C'est dans la phase du processeur que nous avons apporté le plus de modifications. Nous avons introduit une *gestion du nombre de variables*. Dans le logiciel de calcul de champ par

éléments finis (FLUX2D), le nombre d'équations correspondait au nombre de points du maillage. Avec le couplage, le nombre d'équations dépend en outre du nombre de circuits (mailles électriques) et du nombre de conducteurs massifs. Nous avons donc ajouté l'algorithme qui permet de déterminer la valeur du nombre d'équations.

Nous avons changé la construction de la matrice symbolique. On appelle matrice symbolique le système qui permet de stocker les termes non nuls de la matrice. Dans le cadre du couplage avec les équations de circuit, il faut compléter cette matrice symbolique en rajoutant le nombre de lignes nécessaire et en positionnant correctement les éléments à inclure.

Après la construction de la matrice symbolique, nous passons à la phase d'intégration assemblage. Dans le cas du couplage avec les équations de circuit, nous avons ajouté l'intégration et l'assemblage des équations de circuit. Nous avons donc développé les algorithmes correspondants. Nous rappelons que le choix des algorithmes est lié au choix de la structure de données qui dicte l'accès aux informations.

A la fin de cette phase, le système est prêt à être résolu. Comme nous avons gardé la même structure (matrice symétrique) que dans le cas des équations magnétiques, la méthode de résolution est inchangée. Cependant, nous avons apporté une modification concernant un test de préconditionnement de matrice.

Après la résolution, nous avons modifié l'exploitation des résultats afin de tenir compte des nouveaux objets introduits. Notamment, nous avons développé deux types d'action. Premièrement, nous avons mis au point de nouvelles routines permettant de calculer de nouvelles grandeurs (courant et tension dans les conducteurs). Deuxièmement, nous avons modifié les routines de calcul existantes afin qu'elles puissent prendre en compte les nouveaux objets introduits (les conducteurs).

### 3. Un exemple : le contacteur.

Pour illustrer la mise en œuvre de ces outils, nous avons choisi un exemple qui utilise les deux types de conducteurs bobinés et massifs. En effet, le contacteur étudié comporte une bobine alimentée en tension et une spire de Frager modélisée par deux conducteurs massifs mis en court-circuit.

Le contacteur est en position fermée. Nous nous intéressons à la force entre les armatures. Une courbe  $B(H)$  permet de tenir compte de la non-linéarité du matériau dans la culasse. En raison des symétries, seule la moitié de la section est représentée.

Deux types de résolution ont été effectuées : l'une en magnéto-dynamique et l'autre en magnéto-évolutif. Nous allons étudier divers aspects de la résolution.

**3.1 AGENCEMENT DES ÉQUATIONS.** — Pour connaître l'agencement des équations, il faut commencer par définir les circuits électriques. Dans ce cas, le circuit comporte deux mailles indépendantes. La première comprend une alimentation, une inductance non saturable pour représenter la tête de bobine et une bobine. Le second circuit comporte deux conducteurs massifs et une impédance pour représenter la tête de la spire de Frager. Le schéma électrique est représenté ci-après (Fig. 2) ainsi qu'une vue globale du contacteur (Fig. 1).

Nous pouvons alors en déduire la forme des équations à résoudre (Fig. 3).

Les inconnues du système à résoudre sont :

- les valeurs de potentiel vecteur magnétique (en chaque nœud du maillage en éléments-finis) ;
- les courants de maille électrique ;
- les tensions des conducteurs massifs.

A partir de ces variables, on est capable de calculer toutes les grandeurs utiles à l'exploitation.

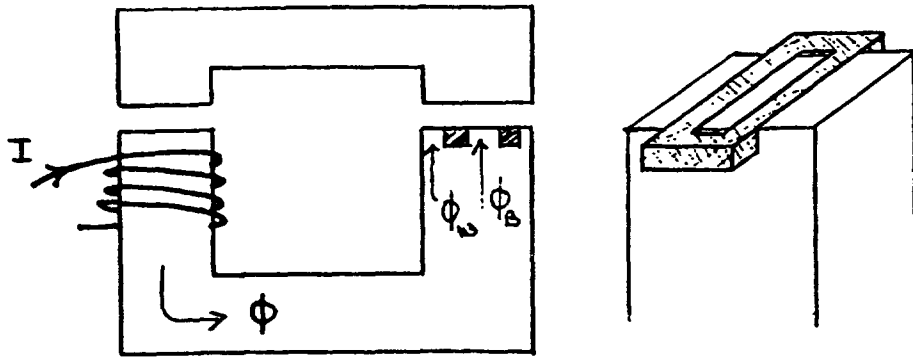


Fig. 1. — Coupe du contacteur.

[Cross-section.]

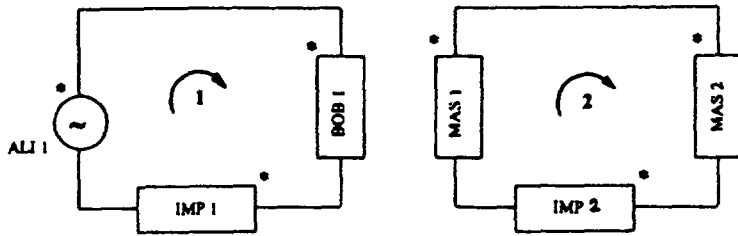


Fig. 2. — Schéma électrique.

[Electric circuits.]

équations magnétiques

maille électrique 1

conducteur massif 1

conducteur massif 2

maille électrique 2

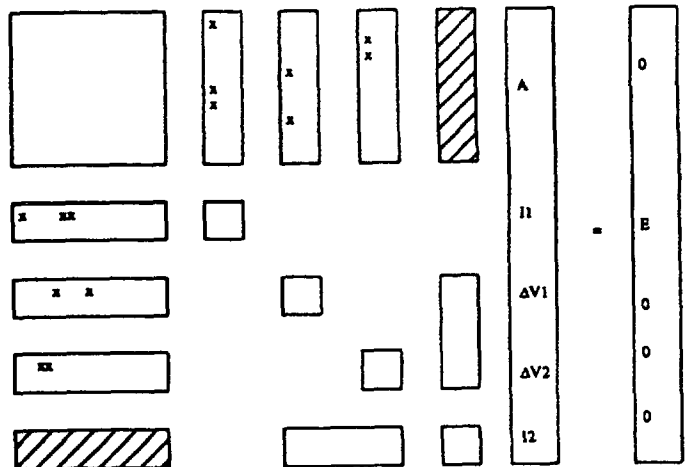


Fig. 3. — Allure des équations.

[View of the equations.]

3.2 ORDRE DE GRANDEUR DES ÉLÉMENTS. — Pour chaque type de résolution (magnéto-dynamique et magnéto-évolutif), nous avons relevé les ordres de grandeurs des différents types d'éléments composant le système à résoudre. Ces valeurs sont consignées dans le tableau ci-dessous.

	Magnéto-dynamique	Magnéto-évolutif
$S + j\omega G$ ou $S + G/\Delta t$	1 à $10^{-7}$	$10^{-3}$ à $10^{-10}$
$C$	$10^2$ à $10^{-5}$	$10^{-1}$ à $10^{-7}$
$C' D'^T$	$10^2$ à $10^{-7}$	$10^{-2}$ à $10^{-10}$
$R^{-1}/(j\omega)$ ou $R^{-1} \Delta t$	$10^8$	$10^4$
$D/(j\omega)$ ou $D \Delta t$	$10^5$	10
$Z'_m/(j\omega)$ ou $Z'_m \Delta t$	$10^7$ à $10^2$	$10^3$ à $10^{-2}$
$E'_m/(j\omega)$ ou $E'_m \Delta t$	50	$10^{-4}$

Ce tableau met en évidence certaines disparités. En effet, le terme en  $\frac{R^{-1}}{j\omega}$  est très élevé par rapport aux termes des équations magnétiques. Par conséquent il a fallu modifier un test dans la résolution avec la méthode des bi-gradients conjugués au niveau du pré-conditionnement de la matrice.

3.3 COMPARAISON TEMPS DE CALCUL. — Nous allons comparer les temps de calcul entre la résolution effectuée en utilisant les équations de circuit simultanées et la résolution avec une technique de rebouclage telle qu'on l'utilisait avant d'avoir les équations de circuit simultanées.

	Temps de résolution
Technique de rebouclage	29 h 35
Résolution simultanée	7 h 50

Ce tableau montre tout l'intérêt et l'efficacité d'un tel couplage pour les concepteurs de dispositifs électrotechniques.

3.4 RÉSULTATS. — Ce problème a été traité dans les deux cas : magnéto-dynamique et magnéto-évolutif.

3.4.1 *Cas magnéto-dynamique.* — Les résultats obtenus sont comparés à des valeurs résultant de technique de rebouclage déjà validées. A partir d'une résolution où le système est alimenté en tension (220 V), on peut récupérer la valeur du courant et relancer un calcul. Les résultats

obtenus à partir de FLUX2D sont en bonne corrélation avec les résultats obtenus par des techniques de rebouclage déjà validées, comme le montre le tableau suivant.

Les valeurs que nous comparons sont :

- $I_1$  courant dans le primaire ;
- $I_2$  courant dans le secondaire (spires de Frager).

	F2D-circuit	Méthode itérative	Ecart (%)
$I_1$ (A)	0,0762	0,0795	4,2
$I_2$ (A)	18,8	18,2	3,3

3.4.2 *Cas magnéto-évolatif.* — En considérant les signaux obtenus comme des signaux sinusoïdaux, nous pouvons en déduire leur valeur efficace. Nous obtenons :

	F2D-circuit	Méthode itérative	Ecart (%)
$I_1$ (A)	0,0778	0,0795	2,1
$I_2$ (A)	19,1	18,2	4,9

Nous avons relevé l'évolution dans le temps de quelques grandeurs caractéristiques.

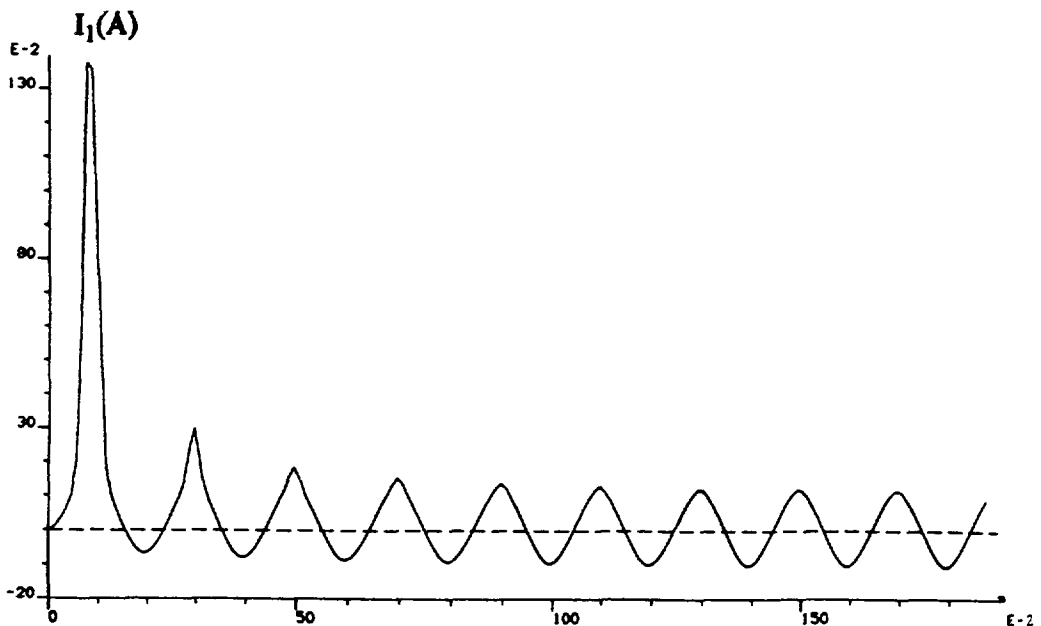


Fig. 4. — Evolution temporelle du courant.

[Time-dependant current.]

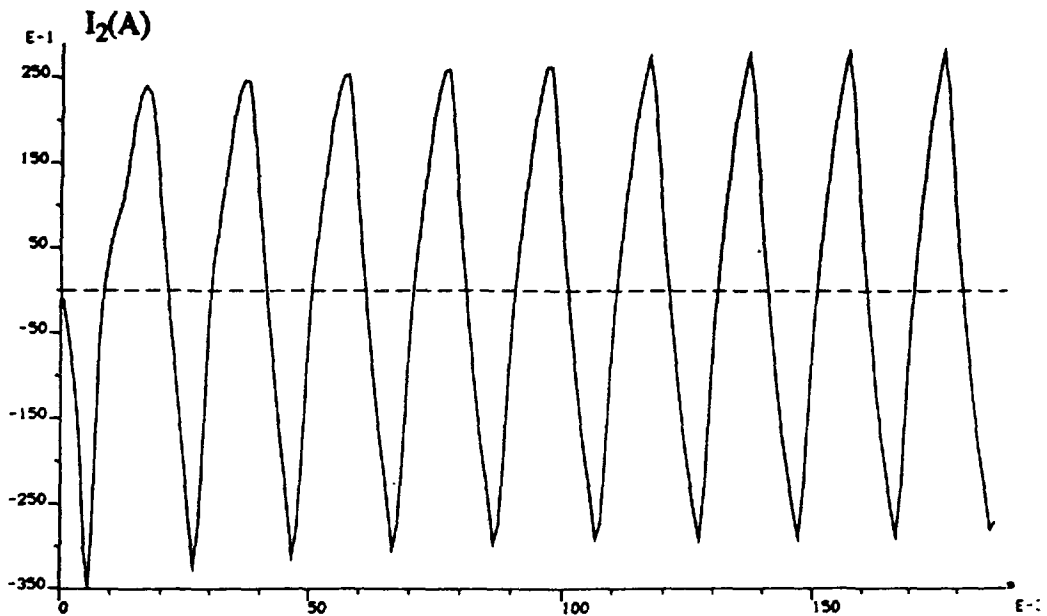


Fig. 5. — Evolution temporelle du courant dans la spire de Frager.

[Time dependent current in the shaded ring.]

### Conclusion.

Ainsi, une nouvelle formulation a été présentée afin de prendre en compte tous les types de circuit dans la modélisation des dispositifs électrotechniques. Notamment, deux types de conducteurs spécifiques, les conducteurs « magnétiques », ont été mis en évidence : ils réalisent l'interaction entre les grandeurs électriques et magnétiques. On distingue les conducteurs massifs, qui peuvent être le siège de courants de Foucault et les conducteurs bobinés sans courant de Foucault. Ces conducteurs « magnétiques » peuvent être associés à des alimentations de tension ou de courant, des résistances, des inductances. Tous les types de connexions peuvent être envisagés entre ces composants.

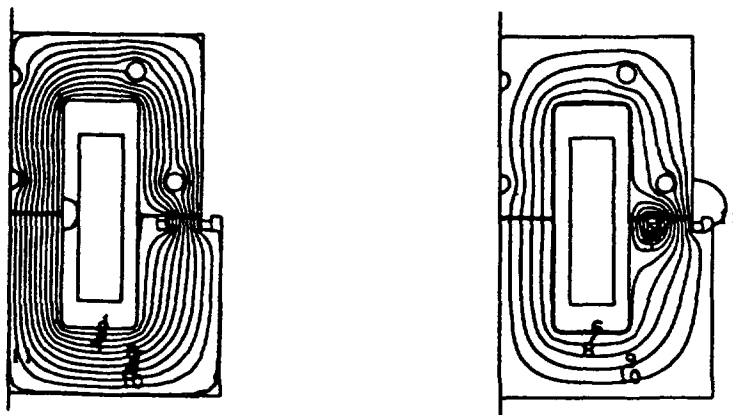
D'autre part, l'accent a été mis sur les difficultés rencontrées lors de l'implantation de ces équations dans un logiciel de calcul de champ. Notamment les modifications effectuées au cours des grandes étapes ont été montrées : description des circuits électriques, gestion des données (fichier de transmission), matrice symbolique, intégration/assemblage, résolution et exploitation.

A l'aide du logiciel réalisé (à partir de FLUX2D), une étude a été effectuée sur un contacteur. Après la description du problème, l'aspect équation de circuit a été particulièrement développé. L'agencement des équations a été montré afin de bien comprendre les équations électriques ajoutées au système magnétique. De plus les ordres de grandeurs permettent de faire apparaître quelques difficultés surmontées. Enfin, les temps de résolution comparés entre une résolution, réalisée avec cette formulation, et une résolution, utilisant une technique de rebouclage, met en évidence tout l'intérêt d'un tel couplage pour les concepteurs d'appareils électrotechniques. Les deux méthodes donnent des résultats identiques à quelques pourcents près.



Donc avec cet outil, il devient possible de modéliser plus finement toute une gamme d'appareils électrotechniques classiques : four à induction, machine asynchrone avec cage d'écurieuil, transformateurs (en court-circuit ou avec leur circuit de charge)...

De plus, nous avons l'intention d'ajouter des nouveaux composants électriques tels que diodes et capacités.



Instant de calcul : 0,163 s.

Instant de calcul : 0,164 s.

Fig. 6. — Equiflux.

[Equiflux.]

### Remerciements.

Les auteurs tiennent à remercier Electricité De France pour son soutien financier tout au long de ces études.

### Bibliographie

- [1] ARKKIO A., Finite element analysis of cage induction motors fed by static frequency converters, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-26** (1990) 551-554.
- [2] DAVAT B., FOCH H., TRANNOY B., Analysis of a converter fed asynchronous machine by a global simulation method, *Electric Machines Electromechanics* **5** (1980) 201-210.
- [3] NAKATA T., TAKAHASHI N., Direct finite element analysis of flux and current distribution under specified conditions, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-18** (1982) 325-330.
- [4] KONRAD A., Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady-state skin effect problems, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-18** (1982) 284-292.
- [5] SHEN D., MEUNIER G., COULOMB J. L., SABONNADIÈRE J. C., Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-21** (1985) 2288-2291.
- [6] MESA F., Méthodes d'études des circuits électriques (Eyrolles, 1985) pp. 189-228.
- [7] MEUNIER G., SHEN D., COULOMB J. L., Modélisation de 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite element method, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-24** (1988) 270-273.
- [8] LINDFORS H., LUOMI J., A general method for the numerical solution of coupled magnetic field and circuit equations, Proc. of the Int. Conf. on Electrical Machines (1988) pp. 141-146.
- [9] SALON S. J., PALMA R., HWANG C. C., Dynamic modeling of an induction motor connected to an adjustable speed drive, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-25** (1989) 3061-3063.
- [10] PIRIOU F., RAZEK A., Simulation of electromagnetic systems by coupling of magnetic and electric equations, *Math. Computer Simulation* (1989) n° 31, 189-194.