



HAL
open science

Résolution des équations thermo-électriques 3D couplées par la méthode des éléments finis. Application à un four polyphasé

J. Morandini, Y. Du Terrail Couvat, Ph. Massé

► **To cite this version:**

J. Morandini, Y. Du Terrail Couvat, Ph. Massé. Résolution des équations thermo-électriques 3D couplées par la méthode des éléments finis. Application à un four polyphasé. *Journal de Physique III*, 1992, 2 (11), pp.1979-1990. 10.1051/jp3:1992224 . jpa-00248859

HAL Id: jpa-00248859

<https://hal.science/jpa-00248859>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
41.90 — 02.60

Résolution des équations thermo-électriques 3D couplées par la méthode des éléments finis. Application à un four polyphasé

J. Morandini, Y. du Terrail Couvat et Ph. Massé

Laboratoire MADYLAM, ENSHMG, B.P. 95, 38402 Saint Martin d'Hères, France

(Reçu le 23 mars 1992, révisé le 26 juin 1992, accepté le 7 juillet 1992)

Résumé. — La simulation numérique de dispositifs industriels de chauffage par conduction électrique conduit à la résolution simultanée des équations électrique et thermique couplées par les propriétés électriques souvent fortement dépendantes de la température. Après une mise en équation des phénomènes physiques, la discrétisation en éléments finis des équations aux dérivées partielles est présentée. Quinze formulations différentes ont été générées à l'aide du logiciel FLUX-EXPERT, permettant ainsi de modéliser de nombreuses configurations industrielles (2D, axisymétriques et 3D) avec ou sans couplage fort entre les équations. Les problèmes modélisés sont généralement non linéaires et complexes. Ils conduisent à des systèmes mal conditionnés dissymétriques. Afin d'en optimiser la résolution un algorithme de Newton Raphson est utilisé. Deux installations industrielles ont été étudiées : i) un four à verre alimenté en tension polyphasée équilibrée et déséquilibrée ; ii) un dispositif de chauffage de fluide au défilé.

Abstract. — The numerical simulation of industrial devices where heat transfer is obtained by electrical conduction, generally leads to the simultaneous resolution of electrical and thermal equations coupled by electrical properties often strongly linked with temperature. After describing physical phenomena equations, a finite element discretization of partial derivative equations is presented. Fifteen different formulations have been generated with the FLUX-EXPERT package allowing the modelization of many industrial systems in 2D, axisymmetric or 3D geometries with or without equations coupling. Modelized problems are generally non linear and complicated. Matrices systems are dissymmetric and ill-conditioned. In order to optimize the resolution a Newton Raphson algorithm is used. Two applications are treated : i) a glass furnace with balanced and unbalanced AC supply ; ii) a traveling fluid heated by electrical conduction with DC supply.

1. Introduction.

Le logiciel FLUX EXPERT [1], doté d'un générateur d'équations, permet de décrire et de résoudre dans des géométries bi- ou tridimensionnelles, des équations aux dérivées partielles, par la méthode des éléments finis. C'est aussi un outil robuste qui permet la simulation numérique de phénomènes couplés.

Nous présentons ici sa mise en œuvre dans le cas d'un couplage thermo-électrique 3D dans une installation de chauffage du type four à conduction avec divers schémas d'alimentation (continue, polyphasée déséquilibrée).

2. Modélisation physique.

2.1 LE PROBLÈME ÉLECTRIQUE. — Les installations de chauffage de matériaux par conduction, tels que ceux que nous nous proposons de modéliser ici, sont alimentées en courant continu ou polyphasé très basse fréquence. Les effets d'induction électromagnétique sont alors nuls ou négligeables devant les effets de conduction électrique. Le problème électrique est alors décrit par l'équation de la conduction :

$$\operatorname{div} (-\sigma(T) \cdot \mathbf{grad} V) = 0 \quad (1)$$

Avec σ : conductivité électrique, V : potentiel électrique. Dans le cas où les sources sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω , la solution du problème est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation identique. Il est alors possible de représenter le potentiel électrique par un nombre complexe :

$$\bar{V}(\mathbf{x}, t) = V_m(\mathbf{x}) \cdot e^{j(\omega t + \phi(\mathbf{x}))} \quad (2)$$

Avec V_m : valeur maximum du potentiel électrique, \mathbf{x} : position, t : temps, ω : pulsation et ϕ : phase.

Le potentiel électrique dans une installation alimentée en alternatif est alors obtenu en résolvant :

$$\operatorname{div} (-\sigma(T) \cdot \mathbf{grad} \bar{V}) = 0. \quad (3)$$

Le potentiel électrique à l'instant t est alors $V(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(\bar{V}(\mathbf{x}, t))$.

2.2 LE PROBLÈME THERMIQUE. — La grande diversité des phénomènes thermiques rencontrés dans les dispositifs de traitement en poche, de chauffage au défilé ou encore de cuves à électrolyse, nous conduit à adopter pour le problème thermique une définition précise susceptible de simuler le comportement des diverses installations industrielles rencontrées.

Ainsi le transport de chaleur par mouvement de pièces ou par mouvement de fluide doit pouvoir être pris en compte. La connaissance d'un champ de vitesse est alors nécessaire et sera fournie par une expression analytique ou par la résolution numérique séparée des équations de Navier-Stokes dans la partie fluide du domaine de calcul [2]. De plus la variation avec la température de la conductivité thermique des matériaux utilisés ainsi que la présence éventuelle d'un front de solidification nous conduit à adopter, pour décrire le problème thermique en régime permanent, une équation de convection diffusion non linéaire :

$$\rho(T) \cdot C_p(T) \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} T + \operatorname{div} (-k(T) \cdot \mathbf{grad} T) - \Delta H - Q_{\text{TH}} - Q_{\text{ELEC}} = 0. \quad (4)$$

Avec ρ : masse volumique du matériau, C_p : capacité calorifique, \mathbf{U} : vitesse du milieu, k : conductivité thermique, T : température, ΔH : chaleur latente de changement d'état, Q_{TH} : sources thermiques internes d'origines diverses, Q_{ELEC} : sources d'origine électrique. Les propriétés ρ , C_p et k sont en général des fonctions connues de la température.

Les sources de chaleur dues au changement d'état peuvent être approchées avec une bonne approximation (dans le cas des alliages) par un modèle en capacité calorifique équivalente [4] défini par une fonction « en cloche » de la température $F_c(T)$ sur un intervalle de solidification I_c , tel que :

$$L_c = \int_{I_c} F_c(T) \cdot dT. \quad (5)$$

Où L_c est la chaleur latente de changement d'état.

2.3 COUPLAGE ENTRE LES ÉQUATIONS ÉLECTRIQUE ET THERMIQUE. — Le couplage entre les équations (1) ou (3) et (4) est dû d'une part à la forte variation de σ avec la température (comme c'est le cas des verres, des céramiques et des matériaux semi-conducteurs par exemple), et d'autre part aux sources thermiques d'origine électrique.

Ces dernières, qui se développent dans l'ensemble des matériaux siège de courants électriques, s'expriment simplement en alimentation continue par :

$$Q_{\text{ELEC}} = \sigma \cdot \text{grad } V^2 \quad (6)$$

En alimentation alternative, pour les fréquences d'alimentation utilisées (50 Hz), le temps caractéristique des phénomènes électriques est bien inférieur à celui des phénomènes thermiques. Il est alors raisonnable de calculer les sources thermiques d'origine électrique comme la moyenne temporelle sur la période des sources instantanées soit :

$$Q_{\text{ELEC}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \text{grad } \bar{V} \cdot (\text{grad } \bar{V})^* \quad (7)$$

où « * » désigne l'opérateur de conjugaison.

2.4 CONDITIONS AUX LIMITES. — Les conditions aux limites sont du type Dirichlet ou Neumann (arrivées de courant ou frontières isolantes) pour l'équation de la conduction électrique, et du type Dirichlet, Neumann homogène, Neumann non homogène (convection et/ou rayonnement sur l'ambiante aux frontières) pour l'équation de la chaleur.

$$-k(T) \cdot \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = h \cdot (T - T_a) + \varepsilon \cdot \Sigma \cdot (T^4 - T_a^4)$$

Convection Rayonnement

Avec h : coefficient d'échanges par convection, ε : émissivité, Σ : constante de Stephan, T_a : température ambiante.

3. Modélisation numérique par éléments finis.

Après avoir intégré par parties les formes fortes des équations issues des projections de Galerkin, on applique le théorème d'Ostrogradsky pour obtenir une forme faible où les intégrales surfaciques sont remplacées par leur expression à la frontière

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \sigma(T) \cdot \text{grad } \alpha_i \cdot \text{grad } V \, dv = 0 \quad (8) \\ & \iiint_{\Omega} k(T) \cdot \text{grad } \alpha_i \cdot \text{grad } T \, dv + \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot \rho \cdot C_p \cdot \mathbf{U} \cdot \text{grad } T \, dv + \\ & + \iint_F \alpha_i \cdot h \cdot (T - T_a) \, ds + \iint_F \alpha_i \cdot \varepsilon \cdot \Sigma \cdot (T^4 - T_a^4) \, ds \\ & - \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot \Delta H \, dv - \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot Q_{\text{ELEC}} \, dv - \iiint_{\Omega} \alpha_i \cdot Q_{\text{TH}} \, dv = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Avec Ω et F : domaine de calcul et sa frontière. Les α_i représentent les polynômes d'interpolation de Lagrange. Selon le type d'alimentation le potentiel électrique sera représenté par un nombre réel ou complexe.

Le système constitué des équations (8) et (9) peut être écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}(\mathbf{I}) = \bar{\bar{M}}(\mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{I}) = 0 \quad (10)$$

où le vecteur inconnu est constitué des valeurs de potentiel et de température aux nœuds du domaine. La constitution des différents termes intervenants dans (10) peut être schématisée par :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_V(\mathbf{I}) \\ \mathbf{S}_T(\mathbf{I}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{VV}(\mathbf{I}) & \bar{\mathbf{M}}_{VT}(\mathbf{I}) \\ \bar{\mathbf{M}}_{TV}(\mathbf{I}) & \bar{\mathbf{M}}_{TT}(\mathbf{I}) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Afin d'optimiser la résolution du système linéaire ainsi obtenu, un algorithme itératif de Newton-Raphson est utilisé.

Un développement limité du résidu du système au voisinage de la solution s'écrit :

$$\mathbf{R}(\mathbf{I}_{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_k + \delta\mathbf{I}_k) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_k) + \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{I}_k) \cdot \delta\mathbf{I}_k. \quad (14)$$

Où k et $k+1$ sont des indices relatifs à deux itérations successives et $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{I}_k)$ la matrice Jacobienne du système. Le résidu souhaité à l'itération $k+1$ étant nul, la résolution du système :

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{I}_k) \cdot \delta\mathbf{I}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{I}_k) \quad (15)$$

permet d'estimer un écart de solution $\delta\mathbf{I}_k$ et donc de calculer la solution à l'itération $k+1$ par :

$$\mathbf{I}_{k+1} = \mathbf{I}_k + \delta\mathbf{I}_k. \quad (16)$$

La matrice Jacobienne du système est évaluée à partir des différents termes des équations thermique et électrique, sa constitution peut être schématisée par :

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_{VV}(\mathbf{I}) & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{J}}_{TT}(\mathbf{I}) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_{VV,ij} &= \iiint_{\Omega} \sigma \cdot \mathbf{grad} \alpha_i \cdot \mathbf{grad} \alpha_j \, dv + \iiint_{\Omega} d\sigma/dT \cdot \mathbf{grad} V \cdot \mathbf{grad} \alpha_i \cdot \alpha_j \, dv \quad (18) \\ \bar{\mathbf{J}}_{TT,ij} &= \iiint_{\Omega} k \cdot \mathbf{grad} \alpha_i \cdot \mathbf{grad} \alpha_j \, dv + \iiint_{\Omega} dk/dT \cdot \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{grad} \alpha_i \cdot \alpha_j \, dv + \\ &+ \iiint_{\Omega} \rho \cdot C_p \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} \alpha_j \cdot \alpha_i \, dv + \iiint_{\Omega} d(\rho \cdot C_p)/dT \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} T \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \, dv \\ &+ \iint_{\Gamma} h \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \, ds + \iint_{\Gamma} dh/dT \cdot T \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \, ds \\ &+ 4 \cdot \iint_{\Gamma} \varepsilon \cdot \Sigma \cdot T^3 \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \, ds. \quad (19) \end{aligned}$$

Selon son conditionnement, le système d'équation (15) est résolu par une décomposition LU ou par la méthode du gradient bi-conjugué.

Pour être stable, l'algorithme de Newton-Raphson nécessite un état initial proche de la solution. Ce dernier peut être obtenu en découplant les deux équations. Lorsque cet état initial physiquement et numériquement acceptable est obtenu, l'algorithme itératif est appliqué au système d'équations couplées. Au cours des itérations, le système physique évolue ainsi jusqu'à un état d'équilibre où la production de chaleur interne, due à l'effet Joule, compense les pertes par convection et rayonnement aux frontières.

Pour traiter avec stabilité des phénomènes de transport (solide en mouvement ou liquide) le maillage doit être suffisamment fin pour que le Nombre de Peclet de maille reste inférieur à 2. Ceci conduit à des maillages comportant un grand nombre de nœuds dont la résolution peut être difficile. Afin de palier à ce problème, l'utilisation d'une conductivité thermique tensorielle équivalente permettant de décentrer le schéma pourra être utilisée [5].

4. Applications.

L'ensemble des formulations en géométries 2D, axisymétrique, 3D, découplées ou couplées, a été développé avec le générateur d'équations FLUX EXPERT (15 formulations différentes). Ceci conduit à un ensemble de logiciels éléments finis qui permet de modéliser les comportements électrique, thermique et thermo-électrique de dispositifs industriels variés.

Le cas de matériaux dont la conductivité électrique varie fortement avec la température a été étudié. Deux applications sont présentées. La première consiste à modéliser le comportement thermo-électrique d'un four à verre en alimentation polyphasée où sont pris en compte des propriétés variant avec la température (Fig. 1). la seconde est l'étude du chauffage au défilé d'un fluide conducteur circulant entre deux parois sur lesquelles sont disposées deux électrodes alimentées en courant continu. La mise en évidence du terme de transport dû à la vitesse du fluide y est caractéristique.

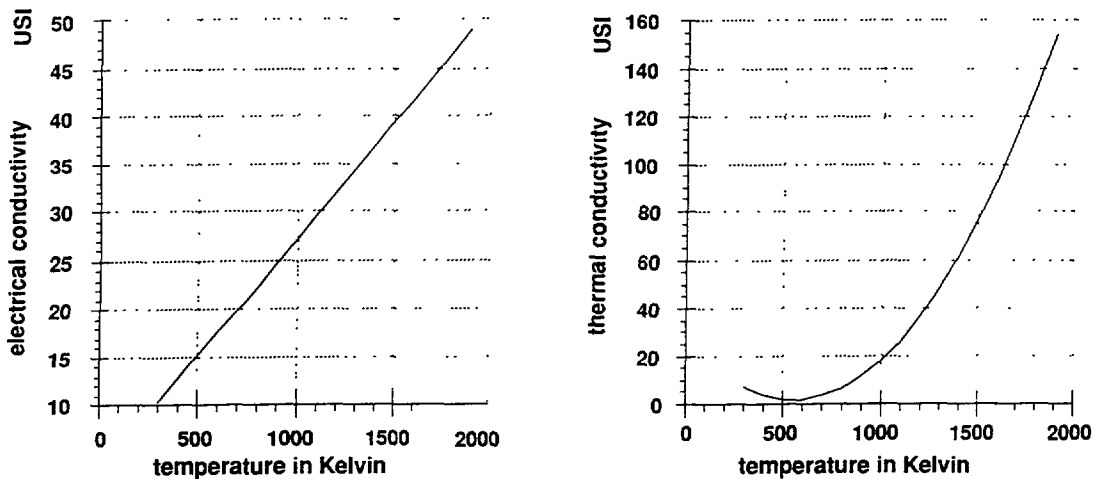


Fig. 1. — Modèles de conductivités électrique et thermique utilisés pour le verre.

[Electrical and thermal conductivity models used for the glass.]

4.1 MODÉLISATION D'UN FOUR A VERRE. — L'étude que nous présentons ici concerne un dispositif de fusion de verre dont les caractéristiques géométriques sont définies sur la figure 2.

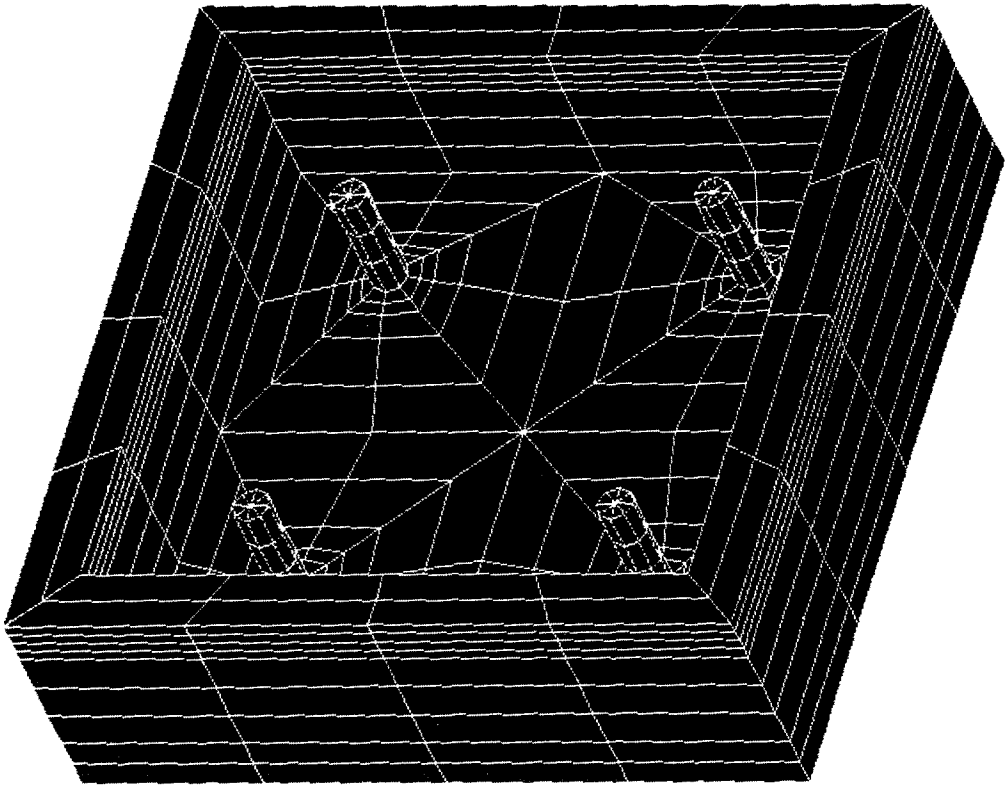


Fig. 2. — Géométrie du four à verre étudié.

[Glass furnace geometry.]

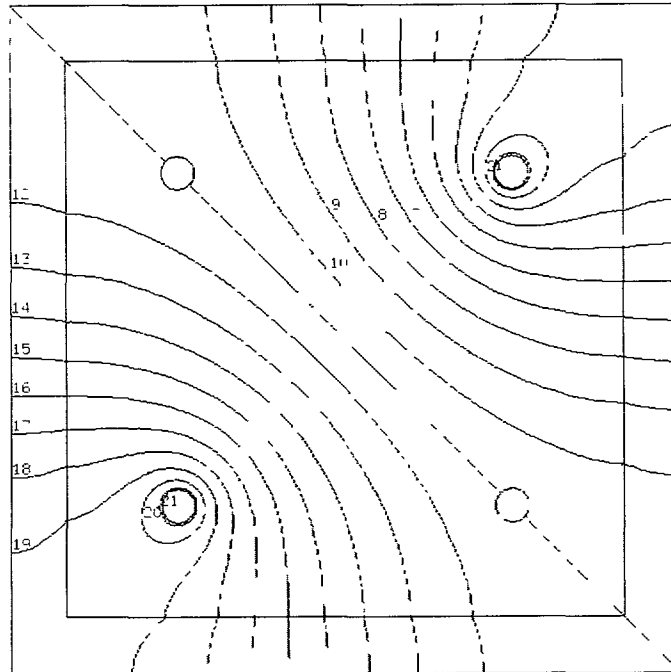
Une poche parallélépipédique, remplie de verre, dont les parois sont constituées d'un matériau dont nous avons considéré les propriétés physiques constantes, est traversée dans sa partie inférieure par quatre électrodes de molybdène qui pénètrent largement dans la poche.

L'étude est réalisée sur un domaine constitué de l'enceinte du four et de son contenu. Les alimentations en potentiel s'effectuent à la base des électrodes ; les parois du four sont considérées comme parfaitement isolantes. Les courants qui se développent ainsi dans le verre provoquent un échauffement de ce dernier. Le dispositif est refroidi sur l'ensemble de la frontière par convection et rayonnement sur la température ambiante.

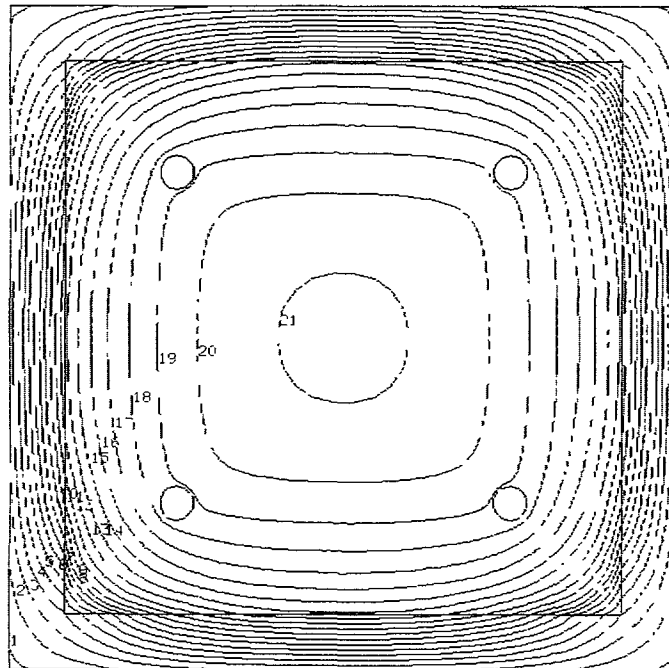
4.1.1 Modèle bidimensionnel. — L'étude est réalisée sur un domaine plan issu d'une coupe horizontale du four 3D (Fig. 2). Dans un premier temps les électrodes sont alimentées en tension alternative avec un déphasage de $\pi/2$. Les figures 3a, b et c représentent respectivement la tension calculée à la phase nulle, la répartition de température et la carte des sources thermiques dues à l'effet Joule.

Dans un second temps, un accident de fonctionnement est simulé en imposant un potentiel nul sur l'une des électrodes, le four est alors alimenté en déséquilibre, déséquilibre que l'on retrouve dans la répartition des sources et de la température (Figs. 4a, b et c).

4.1.2 Modèle tridimensionnel. — Les résultats obtenus en 2D équilibré mettent en évidence l'existence de symétries qui peuvent être exploitées afin de réduire le domaine de calcul 3D.



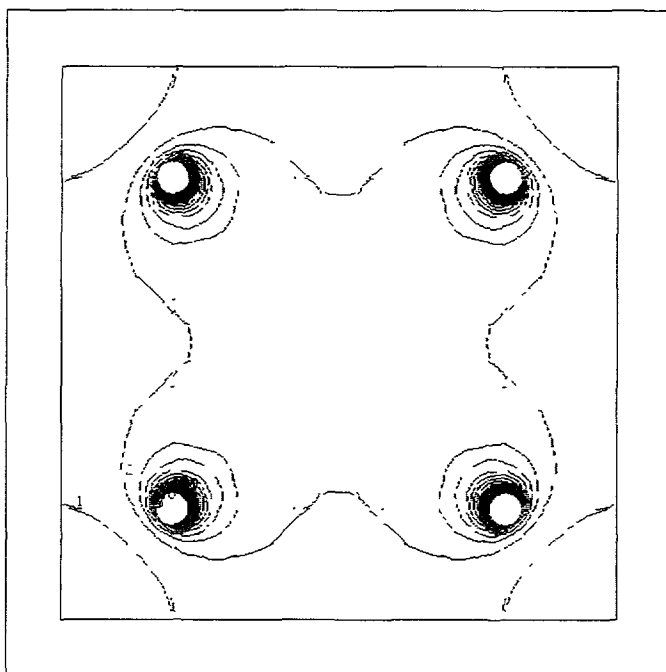
(a)



(b)

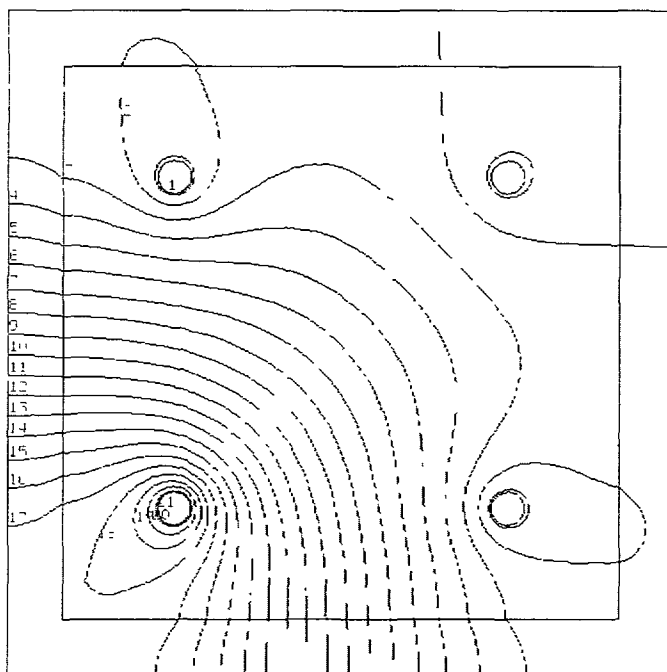
Fig. 3. — Résultats obtenus pour un modèle bidimensionnel de four en alimentation polyphasée équilibrée. a) Potentiel électrique adimensionnel. b) Température adimensionnelle. c) Sources électriques adimensionnelles.

[Results obtained for a 2D furnace model with a polyphase balanced supply. a) Adimensional electrical potential field. b) Adimensional temperature field. c) Adimensional electrical sources field.]



(c)

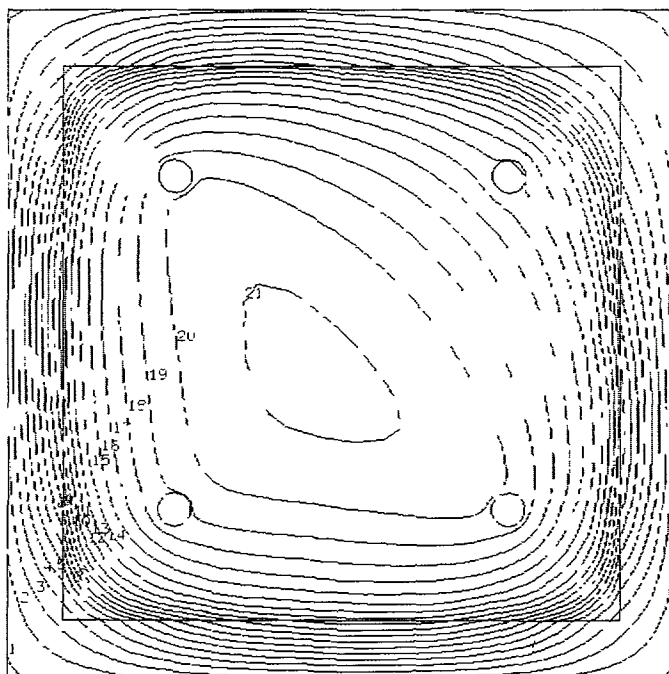
Fig. 3 (suite).



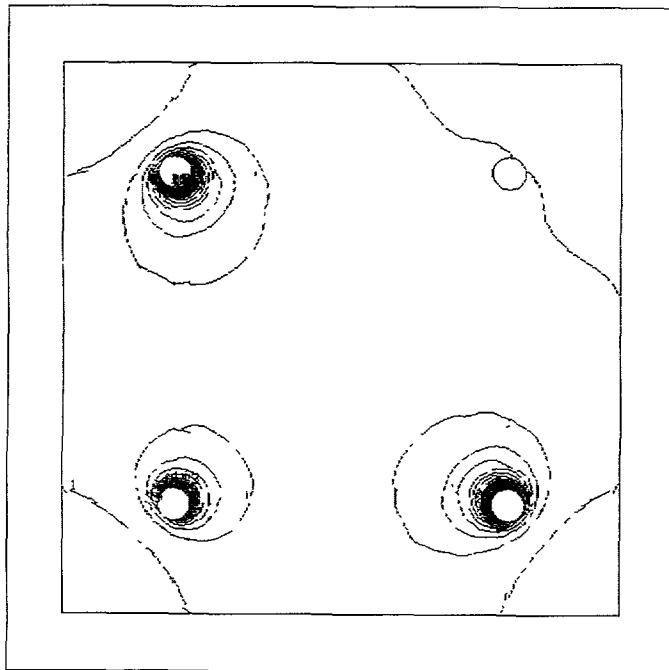
(a)

Fig. 4. — Résultats obtenus pour un modèle bidimensionnel de four en alimentation polyphasée déséquilibrée. a) Potentiel électrique adimensionnel. b) Température adimensionnelle. c) Sources électriques adimensionnelles.

[Results obtained for a 2D furnace model with a polyphase unbalanced supply. a) Adimensional electrical potential field. b) Adimensional temperature field. c) Adimensional electrical sources field.]

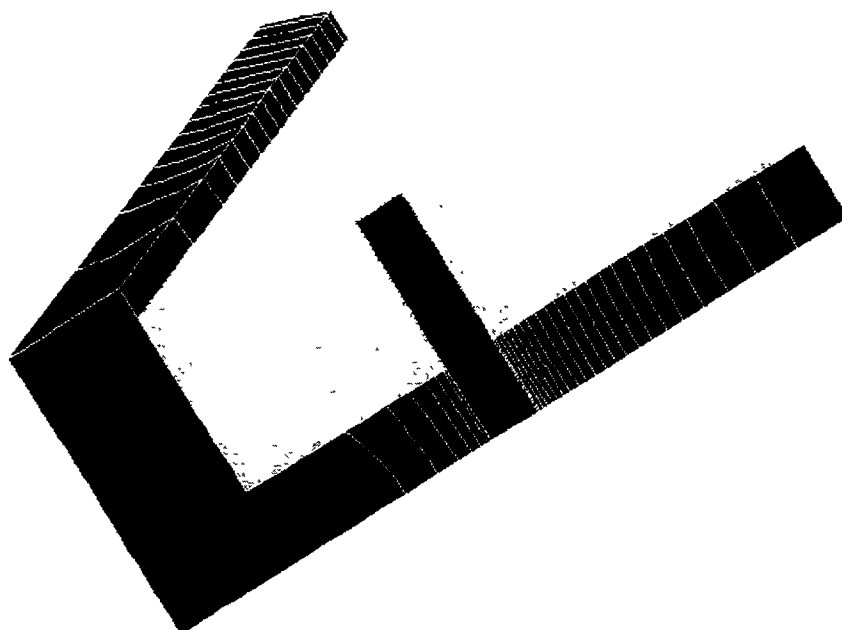


(b)

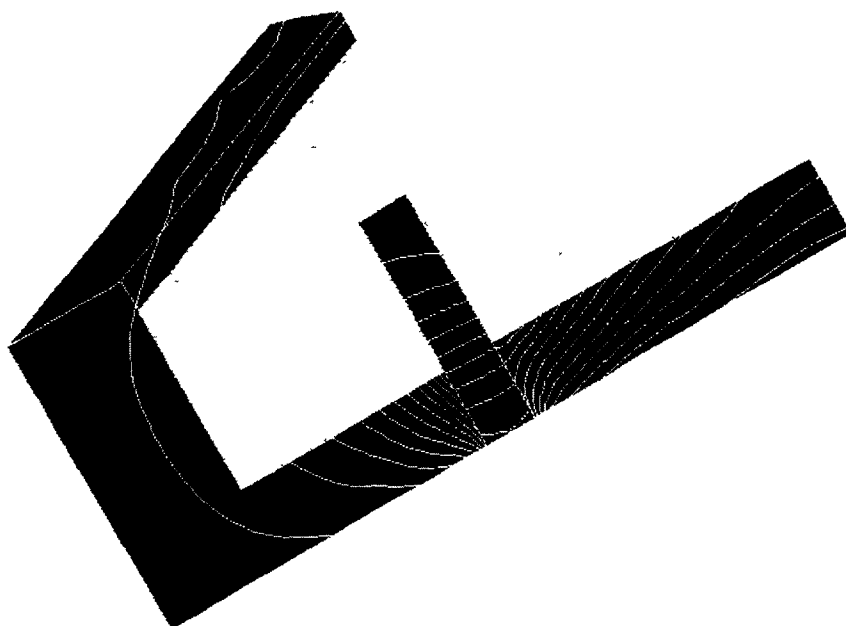


(c)

Fig. 4 (suite).



(a)



(b)

Fig. 5. — Résultats obtenus pour un modèle tridimensionnel de four en alimentation diphasée. a) Potentiel électrique. b) Température.

[Results obtained for a 3D furnace model with a diphasé supply. a) Electrical potential field. b) Temperature field.]

Un régime continu équivalent peut être envisagé en choisissant des conditions aux limites en potentiel telles que le champ de potentiel obtenu conduise à des sources Joule identiques :

$$\iiint_{\Omega} \sigma \cdot \text{grad } V^2 \, dv = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \text{grad } \bar{V} \cdot (\text{grad } \bar{V})^* \, dv . \quad (20)$$

Les figures 5a et 5b représentent les isovalues du potentiel ainsi que les isothermes dans 1/8 de four en alimentation diphasée.

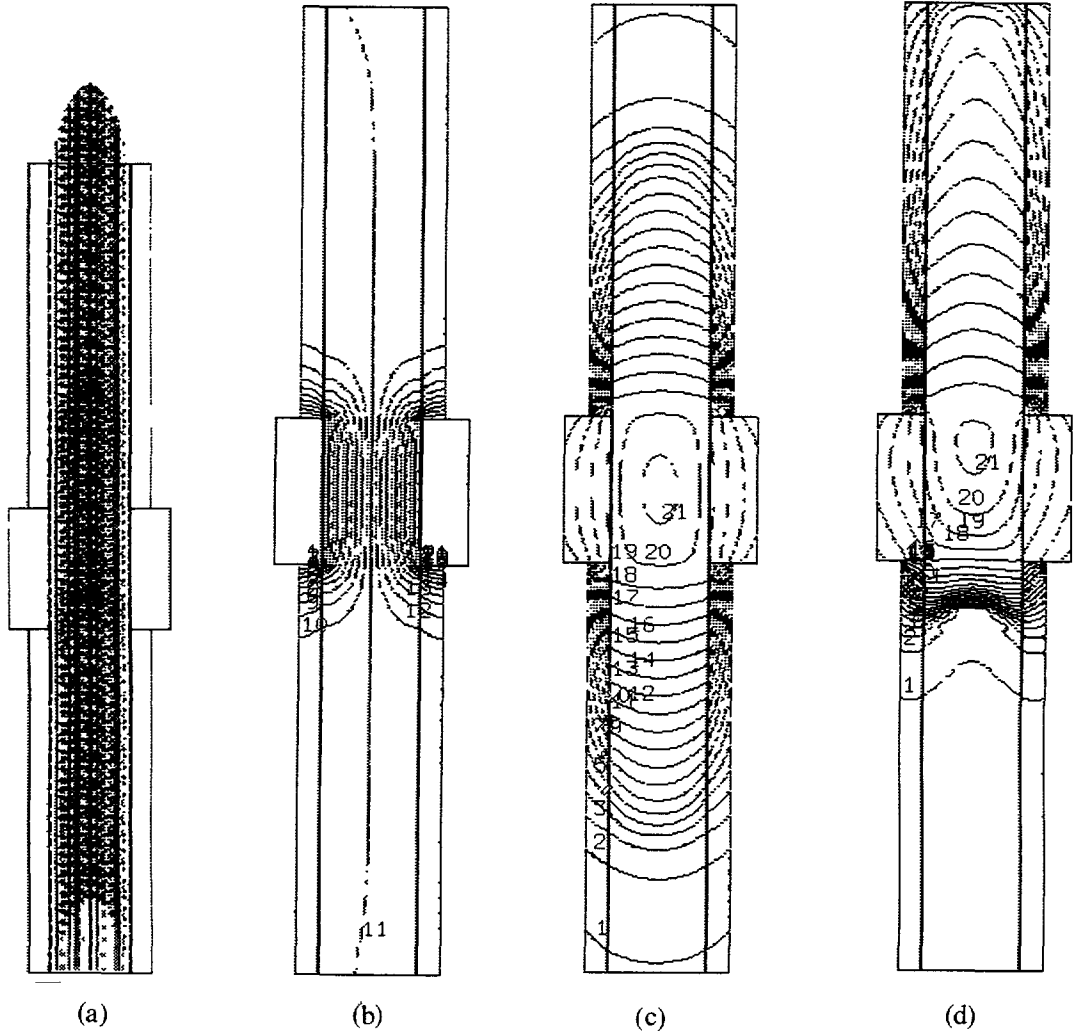


Fig. 6. — Chauffage par conduction d'un écoulement de fluide. a) Champ de vitesse adimensionnel. b) Potentiel électrique adimensionnel. c) Température adimensionnelle obtenue en absence d'écoulement. d) Température adimensionnelle obtenue avec écoulement.

[Traveling fluid heated by electrical conduction. a) Adimensional velocity field. b) Adimensional electrical potential field. c) Adimensional temperature field obtained without motion. d) Adimensional temperature field obtained with motion.]

4.2 MOLÉLISATION D'UN DISPOSITIF DE CHAUFFAGE AU DÉFILÉ. — Dans l'exemple traité ici, un écoulement de Poiseuille plan dans l'espace compris entre deux parois met en mouvement un fluide conducteur. Sur les parois sont disposées deux électrodes qui, alimentées à un potentiel constant, permettent le développement de courants électriques au cœur du fluide et donc un échauffement de ce dernier. Là encore le dispositif est refroidi à la frontière par convection et rayonnement sur la température ambiante. Les figures 6a, b, c et d représentent respectivement le champ de vitesse dans le fluide, la tension et les champs de température obtenus sans et avec vitesse.

5. Conclusion.

Il apparaît donc que malgré les difficultés posées par les équations électriques et thermiques (non-linéarités très importantes, couplage fort, effet 3D), les éléments finis permettent d'obtenir des modélisations efficaces qui peuvent apporter une aide considérable au dimensionnement de dispositifs industriels et à la compréhension de leur comportement lors d'incidents de fonctionnement.

Le logiciel FLUX-EXPERT, muni des 15 équations décrites précédemment, allège considérablement la tâche de l'ingénieur d'étude en supprimant de son travail la partie informatique de conception ou d'adaptation de code, délicate et dévoreuse de temps.

Le thermicien peut ainsi se consacrer exclusivement à la modélisation physique du dispositif étudié et en particulier à la détermination des propriétés des matériaux et des divers coefficients d'échange thermiques. Cette tâche n'a pas été abordée ici mais constitue cependant une étape importante du processus de modélisation dont dépend la qualité des résultats numériques obtenus.

Bibliographie

- [1] MASSÉ Ph., Modeling of continuous media methodology and CAD of Finite Element Programme, INTERMAG conference, Hambourg, Germany (1984).
- [2] RAFFOURT C., FAUTERELLE Y., MEYER J. L., HANNART B., Thermal and fluid flow calculations in the pump of an aluminium slab, Proc. 5th. Engineering foundation conf. on Modelling of casting, welding and advanced solidification processes, Davos (CH) (Sept. 1990).
- [3] PATANKAR S. V., Numerical heat transfert and fluid flow (McGraw Hill, 1980).
- [4] POIRIER D., SALCUDEAN M., On numerical methods used in mathematical modeling of the phase change in liquid metals, *J. heat transfert* (1988).
- [5] MAESTRALLI B., Modélisation numérique d'une installation d'élaboration de matériaux en creuset froid, Thèse de doctorat INP.Grenoble (1990).
- [6] HUTTON A. G., SMITH R. M., HICKMOTT S., Computation of turbulent flows of industrial complexity by the finite element method, *Int. J. Numerical Methods Fluids*, Vol. 7 (1987).