



HAL
open science

Evaluation de la dimension fractale d'un graphe

C. Tricot, J.F. Quiniou, D. Wehbi, C. Roques-Carmes, B. Dubuc

► **To cite this version:**

C. Tricot, J.F. Quiniou, D. Wehbi, C. Roques-Carmes, B. Dubuc. Evaluation de la dimension fractale d'un graphe. *Revue de Physique Appliquée*, 1988, 23 (2), pp.111-124. 10.1051/rphysap:01988002302011100 . jpa-00245754

HAL Id: jpa-00245754

<https://hal.science/jpa-00245754>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
06.50D — 06.20D

Evaluation de la dimension fractale d'un graphe (*)

C. Tricot ⁽¹⁾, J. F. Quiniou ⁽²⁾, D. Wehbi ⁽²⁾, C. Roques-Carnes ⁽²⁾ et B. Dubuc ⁽³⁾

⁽¹⁾ CRM, Université de Montréal, C.P. 6128-A, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

⁽²⁾ ENSMM, Laboratoire de Microanalyse des Surfaces, 25030 Besançon Cedex, France

⁽³⁾ CVaRL, McGill University, Montréal, Québec, H3A 2A7, Canada

(Reçu le 25 mai 1987, révisé le 30 octobre 1987, accepté le 9 novembre 1987)

Résumé. — Dans le but d'applications pratiques, cet article se propose de recenser les méthodes permettant de déterminer la dimension fractale de graphes de fonctions d'une variable non dérivables. Nous passons en revue les méthodes classiques d'évaluation de la dimension : méthodes du spectre, de Minkowski, des boîtes, ... Nous présentons des méthodes nouvelles dont l'efficacité est testée comparativement sur des fonctions connues (bruit brownien, fonction de Weierstrass-Mandelbrot). En particulier, notre « méthode de variation », fondée sur l'utilisation de segments structurants horizontaux, paraît présenter les meilleures garanties de rapidité d'emploi et surtout de précision du résultat.

Abstract. — For practical purposes this paper is a presentation of old and new methods for evaluating the fractal dimension of one-variable function graphs : spectral method, Minkowski, box counting, intersection, ... Their efficiency is tested comparatively on well-known functions (Brownian noise, Weierstrass-Mandelbrot function). It appears that one of the fastest and most accurate algorithms is our new « variation method », based upon the use of horizontal structural segments.

1. Introduction.

La dimension est l'un des paramètres les plus importants pour la description d'une courbe fractale [6]. On peut la calculer par des méthodes diverses, dont nous allons rappeler quelques-unes dans cet ouvrage. Elles vont toutes donner, théoriquement, le même résultat à la limite. Mais il est important de constater qu'elles ne sont pas toujours équivalentes en pratique. En effet, l'on observe que la précision du résultat dépend considérablement des méthodes utilisées, et que certaines d'entre elles, en particulier les plus généralement répandues, ne fournissent d'évaluation de la dimension fractale qu'avec une erreur de dix ou vingt pour cent. Pour tout calcul numérique, par exemple l'évaluation d'une intégrale, il est connu que certains algorithmes sont plus efficaces que d'autres : on recherche justement les méthodes les plus rapides et les plus précises, parfois en les adaptant spécialement au

type de fonction étudié. Nous nous proposons de considérer diverses formulations de la dimension fractale, et d'en faire la critique en les testant sur des courbes qui sont déjà parfaitement connues mathématiquement. Nous devons d'ailleurs souligner le fait que notre but ultime est l'évaluation de la dimension de profils de surfaces, tels qu'ils se présentent en rugosimétrie ou dans toute autre étude d'interfaces [9]. Les courbes-tests que nous utilisons sont donc des modèles théoriques de ce genre d'ensembles, en général des courbes de Weierstrass ou des mouvements browniens. Cet ouvrage présente dans le détail les techniques et les résultats annoncés dans la communication [12].

Le problème de la rapidité de la méthode est d'autant plus crucial ici que les données pratiques sont en nombre assez limité, alors que la dimension fractale est définie comme la limite d'une certaine suite à l'infini ! Il importe donc que les premiers calculs traduisent immédiatement la tendance finale de cette suite. Devant des résultats qui se traduisent par un nuage de points dont l'éparpillement n'indique aucune tendance précise, certains chercheurs sont tentés de conclure que « l'ensemble étudié n'est

(*) Ce rapport a été publié en partie grâce à une subvention du Fonds FCAR pour l'aide et le soutien à la recherche.

pas fractal » : conclusion qui revient à un abandon souvent hâtif du problème, et de toutes façons logiquement non justifiée, puisque, si l'hypothèse de fractalité se discute suivant le sens que l'on donne à cette notion, l'existence d'une dimension ne se discute jamais : tout modèle mathématique a une dimension. Il arrive aussi souvent que ces fameux diagrammes log-log dont la pente est égale à la dimension se présentent sous la forme d'une courbe régulière et nettement concave, au lieu de la ligne droite qu'on voudrait observer. On parle alors de *dimension instantanée*, qui est la pente locale. Avant d'en arriver à ces extrémités, insistons sur le fait qu'il faut mettre en cause la méthode de calcul de la dimension, avant de mettre en cause l'ensemble lui-même. Une certaine expérience pratique des meilleures méthodes à employer est donc nécessaire.

Passons rapidement en revue trois des méthodes les plus répandues :

1) *Méthode du spectre de puissance* : elle exige que z soit définie sur $(0, +\infty)$, ou tout au moins sur un intervalle de grande longueur. On fait la décomposition spectrale de cette fonction selon les procédés classiques de la théorie du signal (voir [13] par exemple). Le spectre de puissance de z est

$$P_z(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_0^T e^{-ifx} z(x) dx \right|^2 / T.$$

Il arrive que l'ordre de décroissance de P_z lorsque f tend vers l'infini soit en relation directe avec la valeur de la dimension fractale du graphe E . En particulier lorsque z est munie d'une structure d'affinité interne, elle vérifie, pour tout x , la relation

$$z(bx) = b^H z(x), \quad (1)$$

où b et H sont deux paramètres réels caractéristiques de z , $b > 1$, $0 < H < 1$ [7]. Dans le cas où P_z existe et où elle est continue, on peut déduire de (1) la relation

$$P_z(bf) = b^{-2H-1} P_z(f),$$

qui indique que P_z tend vers 0 lorsque f tend vers l'infini, selon une convergence dominée par $1/f^\alpha$, $\alpha = 2H + 1$ [10]. On sait d'autre part que dans le cas d'affinité interne, soit géométrique (courbes de Kiesswetter, de Weierstrass-Mandelbrot), soit en distribution (mouvement brownien fractionnaire), la dimension fractale vaut

$$\Delta(E) = 2 - H.$$

En portant une droite des moindres carrés sur l'ensemble des points du plan de coordonnées $(\log f, \log P_z(f))$, on évalue la pente α , d'où la dimension

$$\Delta(E) = (3 - \alpha)/2.$$

Dans le cas où le spectre de z est discret, le spectre de puissance n'est pas défini et on considère plutôt la densité spectrale de puissance [10].

Un inconvénient pratique de cette méthode est que le diagramme log-log défini ci-dessus présente souvent un mauvais alignement, rendant imprécise l'évaluation de α (Fig. 1). Même corrigée par des procédés de moyennes locales elle semble ne s'adapter vraiment bien qu'à des bruits particuliers. De plus son utilisation suppose des hypothèses assez restrictives sur l'ensemble étudié (affinité interne).

2) *Méthode de Bouligand-Minkowski* : elle est fondée sur la définition originale de $\Delta(E)$, due à G. Bouligand [1]. La saucisse de Minkowski de E est l'ensemble $E(\varepsilon)$ de tous les points à distance au plus ε de E . On l'appelle aussi *épaississement*, ou *dilatation* de E , comme en analyse d'image. Autrement dit, $E(\varepsilon)$ est la réunion de tous les disques centrés en E , de rayon ε . Notons $|S|_2$ l'aire 2-dimensionnelle d'une surface S du plan. L'aire de la saucisse de Minkowski vaut donc $|E(\varepsilon)|_2$, et la dimension fractale de E se définit comme suit :

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \log |E(\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon). \quad (2)$$

On peut dire aussi que $\Delta(E)$ est la borne inférieure de tous les α tels que l'expression

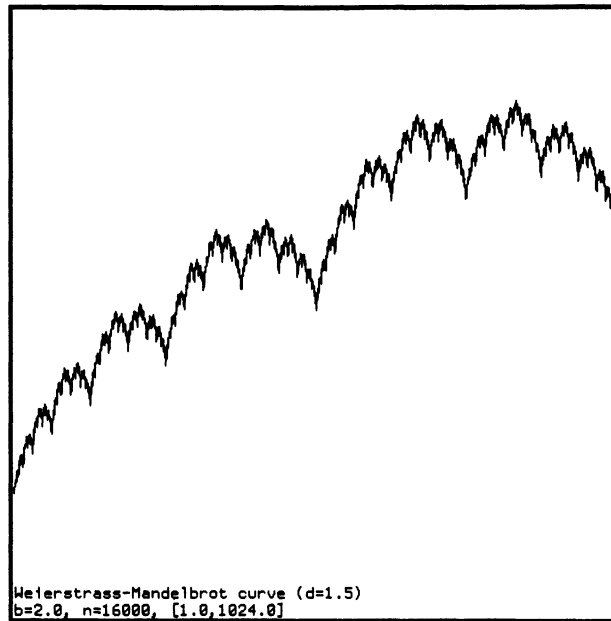
$$\varepsilon^{\alpha-2} |E(\varepsilon)|_2$$

tend vers 0 lorsque ε tend lui-même vers 0. En pratique, on obtient $\Delta(E)$ comme la pente de la droite des moindres carrés de l'ensemble des points du plan de coordonnées

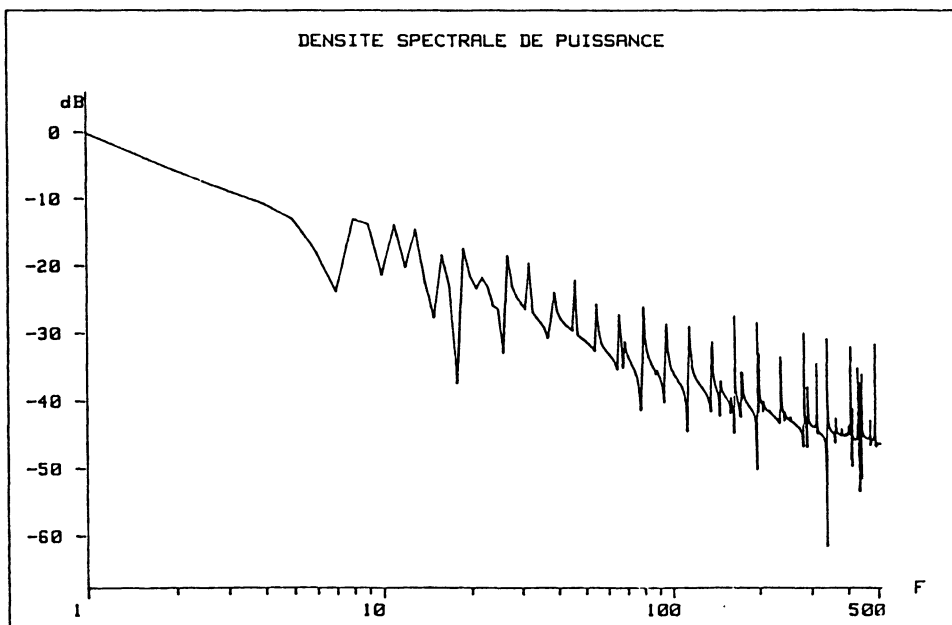
$$(\log (1/\varepsilon), \log |E(\varepsilon)|_2 / \varepsilon^2). \quad (3)$$

Cette méthode (voir par exemple [3-5]), se prête assez facilement aux calculs lorsque E est vu par un analyseur d'images. Elle est malheureusement peu précise, car il est rare que l'on obtienne un bon alignement pour le diagramme (3). Pour prendre un exemple très simple, si E est un segment de longueur l , alors $|E(\varepsilon)|_2 = 2l\varepsilon + \pi\varepsilon^2$, et du fait que cette aire n'est pas exactement proportionnelle à ε , le diagramme (3) présente une certaine concavité. Ce défaut est encore aggravé dans le cas d'un profil comportant un nombre illimité de maxima locaux (Fig. 2). D'une certaine façon la saucisse de Minkowski est trop « épaisse » pour permettre de très bons résultats. Nous verrons plus loin comment corriger ce défaut dans le cas particulier des graphes.

3) La *méthode des boîtes* est encore plus connue en pratique. On se donne une suite (ε_n) décroissante, et tendant vers 0 assez lentement, comme une suite géométrique par exemple (il suffit que le rapport $\log \varepsilon_n / \log \varepsilon_{n+1}$ tende vers 1). On recouvre



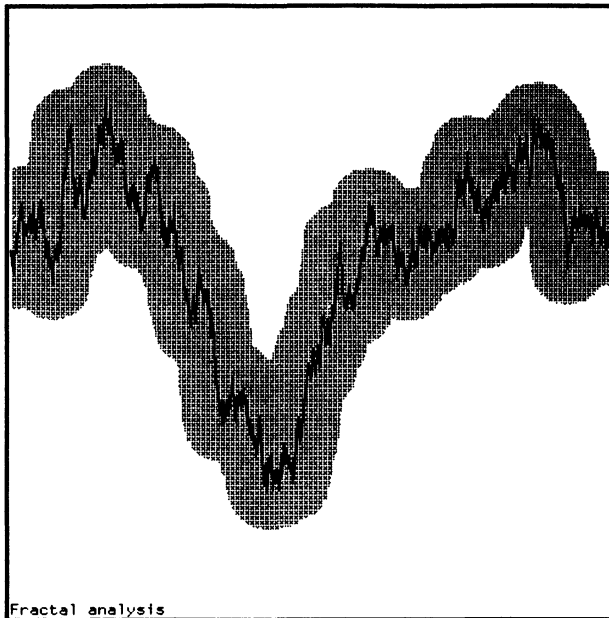
a)



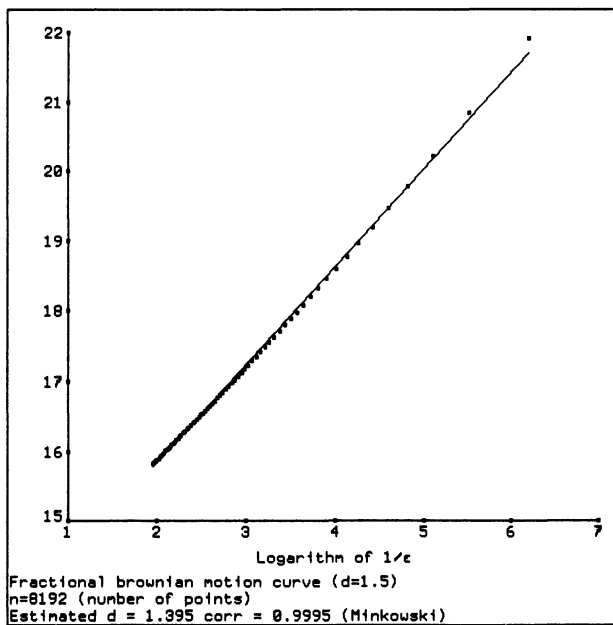
b)

Fig. 1. — Graphe de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot $\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{-nh}(1 - \cos b^n t)$, avec $b = 2$ et $h = 0,5$, et tracé de son spectre de puissance en coordonnées logarithmiques. La valeur de la pente moyenne est liée à celle de la dimension fractale. On constate l'imprécision d'une telle méthode.

[Graph of the Weierstrass-Mandelbrot function $\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{-nh}(1 - \cos b^n t)$ with $b = 2$ and $h = 0.5$, and its power spectrum in logarithmic coordinates. The average slope is related to the fractal dimension. Notice the lack of precision of such a method.]



a)



b)

Fig. 2. — Saucisse de Minkowski pour le graphe du mouvement brownien, et diagramme correspondant. On remarque sa concavité, qui empêche une évaluation précise de la dimension (valeur calculée 1,395 au lieu de 1,5).

[Minkowski sausage for the graph of Brownian motion. The error on the calculated value, 1.395 instead of 1.5, is due to the concavity of the corresponding log-log plot.]

E d'un réseau de mailles carrées de côté ε_n , et on compte le nombre Ω_n de ces carrés rencontrant un point de E. La dimension fractale vaut alors

$$\Delta(\mathbf{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \Omega_n / \log (1/\varepsilon_n). \quad (4)$$

Le diagramme log-log correspondant est donc

$$(\log (1/\varepsilon_n), \log \Omega_n). \quad (5)$$

Très simple à utiliser, cette méthode présente d'assez graves inconvénients. En particulier, si $1/\varepsilon_n$ n'est pas entier, les carrés de côté ε_n vont généralement déborder à gauche et à droite du graphe de z , ce qui fausse les résultats et introduit des irrégularités dans le diagramme (5), surtout lorsque ε_n est grand. Supposons z définie sur $[0, 1]$. Pour que la projection sur Ox des carrés rencontrant le graphe soit toujours incluse dans $[0, 1]$, l'ordinateur impose que ε_n soit dyadique, c'est-à-dire de la forme 2^{-n} . Si l'on s'en tient à cette suite, qui tend assez rapidement vers 0, on arrive très vite à la précision même des données et le processus s'arrête là : le diagramme (5) n'est formé que d'un petit nombre de points, insuffisant pour un calcul précis.

Il existe des méthodes pour corriger le défaut des ε_n non dyadiques [4]. Nous en présentons une nouvelle dans cet ouvrage. Mais nous verrons aussi qu'il est impossible d'éliminer une forme d'imprécision inhérente à cette méthode, imprécision qui est due au fait que Ω_n ne prend que des valeurs entières, et varie donc brusquement lorsqu'on passe de ε_n à ε_{n+1} .

Dans la section 2 nous donnons des résultats très généraux concernant la dilatation des profils. Nous montrons qu'il est possible de définir $\Delta(\mathbf{E})$ par des méthodes semblables à celle de la saucisse de Minkowski, mais en utilisant des « saucisses » de formes très diverses. Dans la section 3 est présentée une méthode des boîtes corrigée, qui permet d'utiliser des boîtes de côté quelconque, tout en assurant une certaine continuité au diagramme log-log correspondant. Les techniques de calcul développées dans la section 2 sont appliquées directement dans la section 4, pour la méthode dite *des éléments structuraux horizontaux*. Celle-ci est particulièrement adaptée à l'étude des graphes à affinité interne, et donne d'excellents résultats, dû au fait que l'on n'emploie que la partie « utile » de la saucisse de Minkowski. Nous montrons dans la section 5 que cette méthode peut aussi être introduite en utilisant la notion de ε -variation de la fonction $z(x)$, qui revient à considérer au voisinage de toute abscisse x la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de z . Nous la relierons dans la section 6 à la *méthode des intersections*, qui permet de ramener le calcul de la dimension fractale d'un profil dans le plan, à celui d'un ensemble de Cantor sur la droite. Le lecteur pourra juger lui-même du bien-fondé de telle ou telle méthode, en se rapportant aux calculs effectifs que nous présentons, calculs faits sur des exemples de courbes bien connues. Notons cependant que l'évaluation de la dimension fractale est en général légèrement inférieure à la valeur théorique que l'on

attend : en effet la courbe sur laquelle l'ordinateur travaille est définie par un nombre fini de données, et se trouve donc un peu moins irrégulière que la courbe théorique.

Dans ce qui va suivre, nous considérons que notre fonction z est définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Dilatation de profils.

Nous avons vu que dans la méthode des boîtes, l'ensemble E était recouvert par Ω_n carrés de côté ε_n . Appelons $U(\varepsilon_n)$ la réunion de ces carrés, et $|U(\varepsilon_n)|_2$ l'aire de cette « saucisse » de forme spéciale. Cette aire est égale à $\Omega_n \varepsilon_n^2$. La dimension fractale peut aussi bien s'écrire

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \log |U(\varepsilon_n)|_2 / \log \varepsilon_n). \quad (6)$$

Dans la méthode de Minkowski-Bouligand, $U(\varepsilon) = E(\varepsilon)$ est la réunion de tous les disques centrés en E , de rayon ε . La formule (6) est donc en fait générale. Les boîtes, ou les disques, sont ici considérés comme des *éléments de base* ; nous pouvons les remplacer par des figures géométriques plus diverses, dont le diamètre est de l'ordre de ε , que nous allons noter génériquement A . La réunion de ces A va constituer une *saucisse généralisée* recouvrant E . Nous notons \tilde{A} la famille constituée de ces figures. Nous voyons dans les exemples précédents que \tilde{A} peut être finie, dénombrable, ou même avoir la puissance du continu. Pratiquement nous admettrons que ces figures A sont des *domaines* : c'est-à-dire, en évitant de spécifier si les A sont ouverts, fermés ou aucun des deux, nous supposons simplement que la fermeture \bar{A} de A est homéomorphe au disque.

2.1 DÉFINITION. — Le *diamètre* d'un domaine A , noté $\text{diam } A$, est la plus grande distance entre deux points de \bar{A} . Le *diamètre interne* de A , noté $\text{diam}_{\text{int}} A$, est le diamètre du plus grand disque inclus dans \bar{A} .

2.2 DÉFINITION. — Etant donné deux réels positifs ε , et $c \leq 1$, on appelle (ε, c) -*saucisse* (ou ε -*saucisse* si aucune confusion n'est à craindre) pour E , tout ensemble $U(\varepsilon)$ pouvant s'écrire

$$U(\varepsilon) = \cup \{A \in \tilde{A}\}$$

où \tilde{A} est une famille de domaines tels que

- (i) $E \subset U(\varepsilon)$
- (ii) pour tout $A \in \tilde{A}$, A contient un point de E
- (iii) pour tout $A \in \tilde{A}$, $c\varepsilon \leq \text{diam}_{\text{int}} A \leq \text{diam } A \leq \varepsilon/c$.

Dans le cas de la saucisse de Minkowski les

domaines A sont des disques, \tilde{A} est en bijection avec E lui-même, et $c = 1$. Dans le cas des boîtes, les domaines A sont des carrés, \tilde{A} est fini (\tilde{A} comporte Ω_n éléments), et $c = 1/\sqrt{2}$. Le résultat sur la dimension est toujours le même :

2.3 PROPOSITION. — Soit une constante c , $0 < c \leq 1$, fixée, et une famille $U(\varepsilon)$ de (ε, c) -saucisses pour E . Alors

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \log |U(\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon). \quad (7)$$

Théoriquement, s'il n'y a pas de limite, il est d'usage de définir $\Delta(E)$ comme une limite supérieure.

Démonstration. Prenons la définition (2) de $\Delta(E)$, et montrons que (2) et (7) sont équivalentes. Appelons ces deux limites Δ_1 et Δ_2 respectivement. Pour tout $\varepsilon > 0$, les conditions (ii) et (iii) de la définition 2.2 impliquent que $U(c\varepsilon) \subset E(\varepsilon)$: donc $|U(c\varepsilon)|_2 \leq |E(\varepsilon)|_2$. Comme $\log |U(c\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon$ et $\log |U(\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon$ ont même limite, on en tire

$$\Delta_2 \leq \Delta_1.$$

Dans l'autre sens : fixons $\varepsilon > 0$, et considérons la saucisse $U(\varepsilon) = \cup \{A \in \tilde{A}\}$. Pour chaque A il existe un disque B de diamètre $c\varepsilon$ inclus dans A . Soit B' le disque de même centre et de diamètre $4\varepsilon/c$. On utilise le lemme suivant, sans démonstration pour éviter les longueurs :

2.4 LEMME. — Soit $0 < a < b$, et une famille de disques D de diamètre a . Pour chaque D , soit D' le disque de même centre et de diamètre b . Alors

$$a^2 | \cup D' |_2 \leq b^2 | \cup D |_2. \quad (8)$$

L'inégalité (8) devient, bien entendu, une égalité lorsque les D' sont disjoints. Dans le cas qui nous occupe, on en déduit que

$$c^4 | \cup B' |_2 \leq 16 | \cup B |_2.$$

Or tout point de $E(\varepsilon)$ se trouve à une distance $\leq \varepsilon$ d'un $A \in \tilde{A}$, donc à une distance $\leq \varepsilon(1 + 1/c) \leq 2\varepsilon/c$ du centre du disque B correspondant, donc appartient au disque B' . Ainsi $E(\varepsilon) \subset \cup B'$. Comme $\cup B \subset U(\varepsilon)$, on trouve finalement

$$|E(\varepsilon)|_2 \leq | \cup B' |_2 \leq 16 | \cup B |_2 / c^4 \leq 16 |U(\varepsilon)|_2 / c^4,$$

pour tout $\varepsilon > 0$: d'où $\Delta_1 \leq \Delta_2$. Ceci achève la démonstration.

3. Méthode des boîtes à pas continu.

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons présenter une méthode qui corrige les « effets de bords » correspondant à une valeur non dyadique du pas, c'est-à-dire de ϵ . Soit $0 < \epsilon < 1$, et N la partie entière de $1/\epsilon$. On construit un réseau de boîtes de côté ϵ , du type $]i\epsilon, (i + 1)\epsilon[\times]j\epsilon, (j + 1)\epsilon[$ où i, j sont entiers. Soit $\Omega_0(\epsilon)$ le nombre de ces boîtes qui rencontrent le graphe E de z , et qui ne coupent pas la droite verticale $x = 1$. Soit $\omega_x(\epsilon)$ le nombre de boîtes du même type qui rencontrent à la fois E et la droite verticale L_x d'abscisse x (on admet que ce nombre vaut 0 si x peut s'écrire $i\epsilon$ où i est entier). Soit $\Omega(\epsilon) = \Omega_0(\epsilon) + \omega_1(\epsilon)$ le nombre total de boîtes rencontrant E : on sait que la dimension fractale est donnée par la formule

$$\Delta(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \Omega(\epsilon) / \log(1/\epsilon). \tag{9}$$

C'est sur le nombre $\omega_1(\epsilon)$ que va porter notre correction. Soit $\omega'(\epsilon)$ le nombre de boîtes du type $]1 - \epsilon, 1[\times]j\epsilon, (j + 1)\epsilon[$ qui rencontrent E . Si on leur adjoint leur bord, la réunion de ces boîtes forme un rectangle d'aire $\epsilon^2 \omega'(\epsilon)$. La partie de ce rectangle dont la projection sur l'axe Ox est $[N\epsilon, 1]$ est un sous-rectangle d'aire $\epsilon(1 - N\epsilon) \omega'(\epsilon)$. Pour recouvrir E nous allons considérer la réunion $U(\epsilon)$ de ce dernier rectangle et des $\Omega_0(\epsilon)$ boîtes qui ne coupent pas le bord L_1 (Fig. 3). L'aire de cette saucisse vaut

$$\epsilon^2 \Omega_0(\epsilon) + \epsilon(1 - N\epsilon) \omega'(\epsilon),$$

ce qui revient à remplacer dans (9) le nombre $\Omega(\epsilon)$ par

$$\Omega'(\epsilon) = \Omega_0(\epsilon) + ((1/\epsilon) - N) \omega'(\epsilon). \tag{10}$$

Supposons que la fonction z est bornée par c . Alors $\omega_1(\epsilon)$ et $\omega'(\epsilon)$ sont tous deux inférieurs à c/ϵ . On en déduit les inégalités suivantes :

$$\Omega(\epsilon) - c/\epsilon \leq \Omega'(\epsilon) \leq \Omega(\epsilon) + c/\epsilon,$$

qui permettent d'assurer, dans le cas d'un graphe, que

$$\Delta(E) = \lim \log \Omega'(\epsilon) / \log(1/\epsilon). \tag{11}$$

On trace donc le diagramme

$$(\log(1/\epsilon), \log \Omega'(\epsilon)). \tag{12}$$

Il est clair que pour un calcul de dimension, on ne peut atteindre à une certaine précision que si le diagramme log-log utilisé ne comporte pas de saut brusque entre deux valeurs voisines de ϵ . Il est impossible d'obtenir une continuité partout avec la méthode des boîtes, car pour tout x la fonction $\omega_x(\epsilon)$ ne prend que des valeurs entières et n'est pas

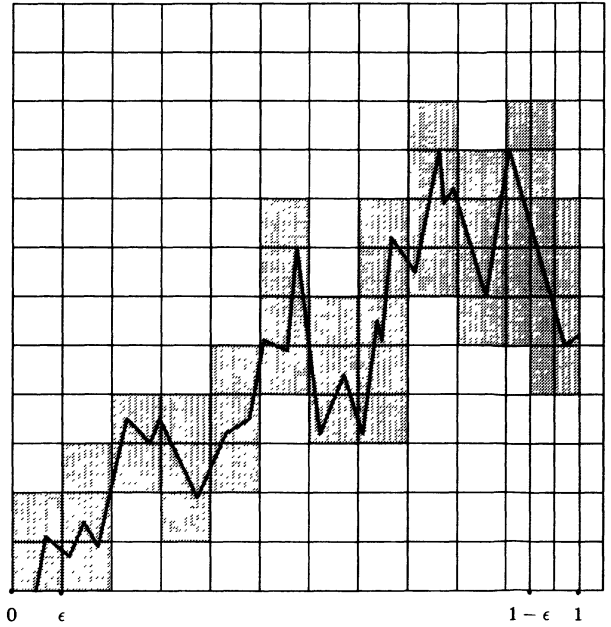


Fig. 3. — Saucisse $U(\epsilon)$ utilisée par la méthode des boîtes à pas continu. Dans ce cas de figure $1/\epsilon$ n'est pas un entier, et $N\epsilon$ est strictement compris entre 0 et 1.

[Sausage $U(\epsilon)$ used for the continuous step box counting method. In this caption, $1/\epsilon$ is not an integer and $N\epsilon$ is different from 0 or 1.]

continue : $\Omega'(\epsilon)$, somme de telles fonctions, ne peut donc être continue elle-même. Au moins la méthode corrigée que nous présentons a-t-elle l'avantage que ces discontinuités ne sont dues qu'à celles des $\omega_x(\epsilon)$, et nullement à l'effet de bord, comme le montre le résultat suivant :

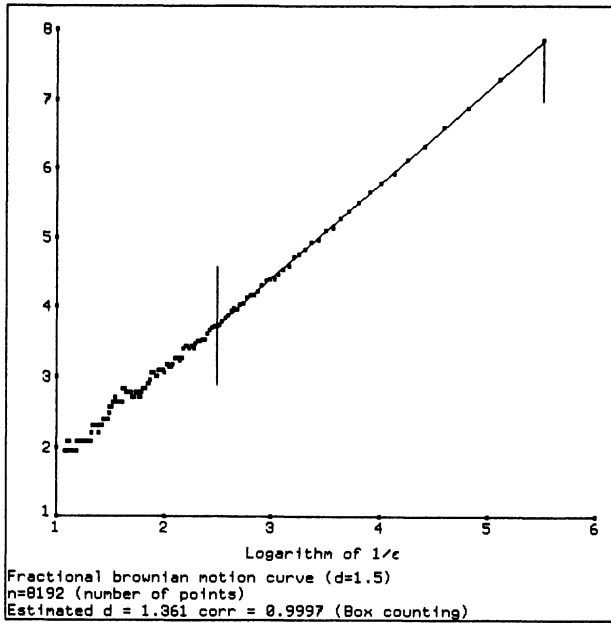
3.1 PROPOSITION. — Soit k un entier. Supposons que les fonctions $\omega_x(\epsilon)$ sont constantes au voisinage de $\epsilon = 1/k$, pour tout x différent de i/k , i entier. Alors $\Omega'(\epsilon)$ est continue en $1/k$.

Démonstration. On va montrer que les limites à droite et à gauche de $\Omega'(\epsilon)$, lorsque ϵ tend vers $1/k$, sont égales à $\Omega(1/k)$.

(a) Si ϵ tend vers $1/k$ par valeurs supérieures, on a $N = k - 1$, et $(1/\epsilon) - N$ tend donc vers 1. Pour tout $x \neq i/k$, les $\omega_x(\epsilon)$ sont constantes au voisinage de $1/k$, donc en particulier continues en $1/k$. Cette hypothèse implique que $\Omega_0(\epsilon)$ tend alors vers le nombre de boîtes de côté $1/k$ se projetant sur $[0, 1 - (1/k)]$, et $\omega'(\epsilon)$ vers le nombre de boîtes se projetant sur $[1 - (1/k), 1]$. On déduit de (10) que $\Omega'(\epsilon)$ tend donc vers $\Omega(1/k)$.

(b) Si ϵ tend vers $1/k$ par valeurs inférieures, on a $N = k$, et $(1/\epsilon) - N$ tend vers 0. Comme $\Omega_0(\epsilon)$ tend alors vers $\Omega(1/k)$, $\Omega'(\epsilon)$ tend vers $\Omega(1/k)$.

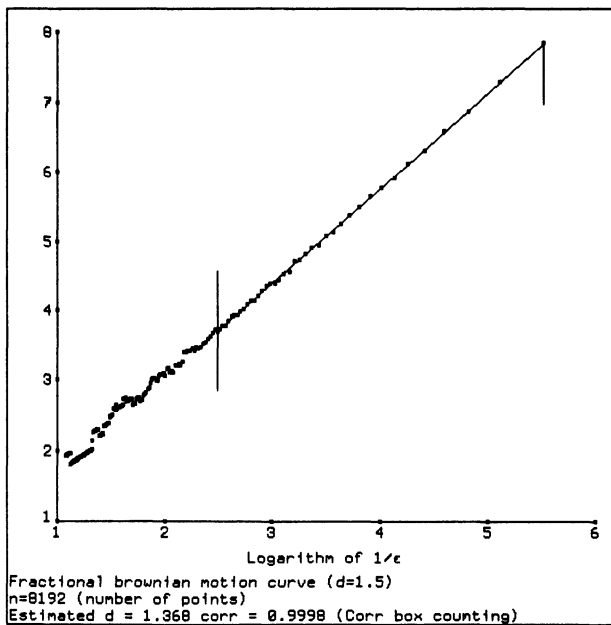
On peut observer l'effet de cette correction sur la figure 4.



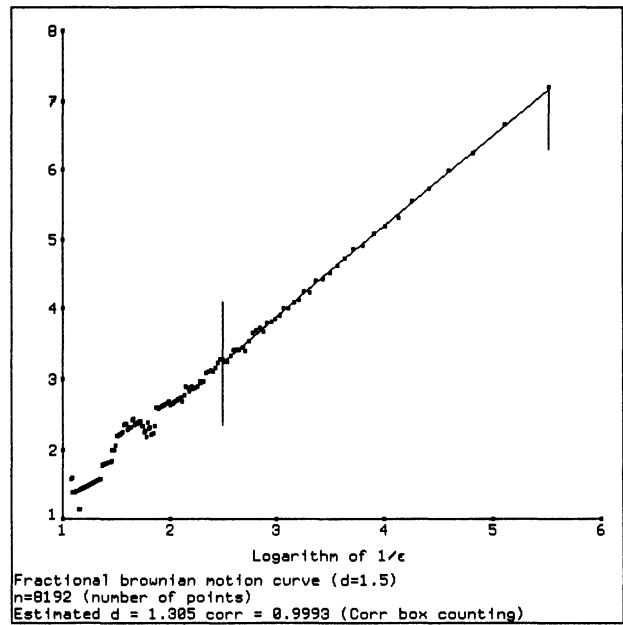
a)



a)



b)



b)

Fig. 4. — Diagrammes correspondant à la méthode des boîtes (a), et à la méthode des boîtes à pas continu (b), pour le graphe du mouvement brownien (Fig. 2).

[Log-log plots for the box counting (a) and the continuous step box counting (b) methods. The function used is the Brownian motion (Fig. 2).]

3.2 REMARQUE. — Cette dispersion du diagramme log-log, inhérente à la méthode des boîtes, permet d'expliquer la nette instabilité du résultat sur la dimension, observée lorsqu'on effectue certaines transformations élémentaires sur le graphe : c'est ainsi que si l'on divise la fonction z par 2, la valeur calculée de la dimension diminue (Fig. 5). Ce défaut

Fig. 5. — Même graphe du mouvement brownien (Fig. 2), mais dont les ordonnées sont divisées par 2, et diagramme correspondant à la méthode des boîtes à pas continu. Noter la diminution de la valeur calculée de la dimension fractale.

[Same graph of the Brownian motion as in figure 2, divided by a factor 2, and corresponding log-log plot. Notice the decrease of the computed value of the fractal dimension.]

est d'autant plus grave qu'en rugosimétrie, et dans la plupart d'autres applications pratiques, la donnée z est fournie avec une amplification arbitraire qui fait partie des normes imposées à l'appareillage. Les méthodes étudiées dans les chapitres suivants sont

au contraire indépendantes de toute amplification, dans des limites raisonnables bien entendu. En effet si l'on divise z par 100 l'ordinateur « verra » le profil comme une droite horizontale et la dimension calculée sera 1 ; si l'on multiplie z par 100 il « verra » une suite de droites verticales passant par les zéros de z : on aboutit à une méthode consistant à calculer la dimension de l'ensemble de ces zéros, étudiée en section 6.

4. Méthode des éléments structurants horizontaux.

Quelques expériences sur les graphes à affinité interne nous ont conduit à penser que la saucisse $U(\varepsilon)$, utilisée pour le calcul de la dimension fractale $\Delta(\mathbf{E})$ du graphe de z , devait présenter une forme d'invariance par des transformations affines. Ceci n'est pas vrai pour la saucisse de Minkowski, car une transformation affine change un disque en une ellipse, et change donc une saucisse de Minkowski en une surface qui n'est plus une réunion de disques. Nous allons définir d'autres *éléments structurants* qui s'adaptent mieux aux graphes que nous étudions.

Pour tout x dans l'intervalle $[0, 1]$, appelons $T(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times \{z(x)\}$ le segment horizontal de longueur 2ε , centré au point $(x, z(x))$ de \mathbf{E} . On pose

$$U(\varepsilon) = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} T(x, \varepsilon) \quad (13)$$

la réunion de tous ces segments dits « éléments structurants ». En raison de la continuité de z on peut vérifier que cet ensemble $U(\varepsilon)$ est d'aire non nulle, sauf dans le cas spécial où z est une fonction constante. Les arguments développés dans la proposition 2.3 vont nous permettre de démontrer le résultat suivant :

4.1 PROPOSITION. — Si $U(\varepsilon)$ est défini par (13), on a

$$\Delta(\mathbf{E}) = \max \left\{ 1, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \log |U(\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon) \right\}. \quad (14)$$

Démonstration. Notons

$$\Delta^* = \lim (2 - \log |U(\varepsilon)|_2 / \log \varepsilon).$$

Pour tout x , $0 \leq x \leq 1$, appelons $C(x, \varepsilon)$ le carré $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times [z(x) - \varepsilon, z(x) + \varepsilon]$. On pose

$$V(\varepsilon) = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} C(x, \varepsilon)$$

la réunion de ces carrés : c'est une $(\varepsilon, 2\sqrt{2})$ -saucisse au sens décrit en section 2, et elle vérifie la proposition 2.3. On a toujours $1 \leq \Delta(\mathbf{E})$. Comme $U(\varepsilon)$ est inclus dans $V(\varepsilon)$, on a aussi $\Delta^* \leq \Delta(\mathbf{E})$. L'inégalité

$$\Delta(\mathbf{E}) \geq \max \{1, \Delta^*\}$$

suit immédiatement. Démontrons l'inégalité inverse :

Soit $H(\varepsilon)$ l'ensemble des x tels que pour tout $x' \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, on a $|z(x') - z(x)| \leq \varepsilon$. Soit

$$V_1 = \bigcup_{x \notin H(\varepsilon)} C(x, \varepsilon) \quad \text{et} \quad V_2 = \bigcup_{x \in H(\varepsilon)} C(x, \varepsilon).$$

Estimons l'aire de ces deux ensembles.

(a) Si $x \notin H(\varepsilon)$, alors il existe un x' tel que $|x - x'| \leq \varepsilon$, et $|z(x) - z(x')| = \varepsilon$. Si l'on partage $C(x, \varepsilon)$ en 4 carrés de côtés ε , on en déduit que l'un au moins de ces carrés est inclus dans $U(\varepsilon)$. En appelant D_x le disque inscrit dans ce sous-carré, et D'_x le disque de même centre, de rayon $2\sqrt{2}\varepsilon$, qui contient $C(x, \varepsilon)$, on tire du lemme 2.4 l'inégalité suivante :

$$|\cup D'_x|_2 \leq c |\cup D_x|_2$$

où c est un réel indépendant de ε . Par conséquent

$$|V_1|_2 \leq c |U(\varepsilon)|_2. \quad (15)$$

(b) On appelle *section* de V_2 , pour tout x , l'ensemble (linéaire) des points de V_2 d'abscisse x . Choisissons un x quelconque, mais tel que la section de V_2 selon x soit non vide, et appelons $l(x)$ la mesure (longueur) de cette section. On a $l(x) \geq 2\varepsilon$. D'autre part on peut montrer que

$$l(x) \leq 6\varepsilon. \quad (16)$$

En effet, si l'on a $l(x) > 6\varepsilon$, la section selon x de V_2 contient la section d'au moins trois carrés disjoints du type $C(x', \varepsilon)$, $x' \in H(\varepsilon)$. Autrement dit, il existe au moins trois points de $H(\varepsilon)$, disons x_1, x_2, x_3 , à distance de x inférieure à ε . Parmi ces trois points, au moins deux, par exemple x_1 et x_2 , sont du même côté de x : en conséquence $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$, alors que $|z(x_1) - z(x_2)| \geq 2\varepsilon$ puisque leurs carrés respectifs sont disjoints. Ceci contredit le fait que ces points appartiennent à $H(\varepsilon)$. L'inégalité (16) étant vraie, un lemme bien connu de théorie de la mesure dit que l'aire d'un ensemble est égale à l'intégrale des longueurs de ses sections : on en tire immédiatement

$$|V_2|_2 \leq 6\varepsilon. \quad (17)$$

(c) Conclusion : (15) et (17) montrent que

$$|V(\varepsilon)|_2 \leq 6\varepsilon + c |U(\varepsilon)|_2.$$

Pour tout α , $0 \leq \alpha \leq 2$, on obtient

$$\varepsilon^{\alpha-2} |V(\varepsilon)|_2 \leq 6\varepsilon^{\alpha-1} + c\varepsilon^{\alpha-2} |U(\varepsilon)|_2.$$

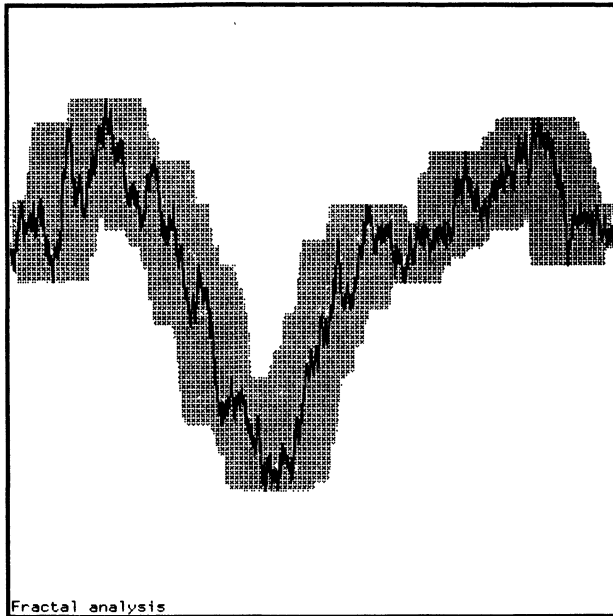
La valeur critique de α , pour les trois termes de cette

inégalité, est respectivement $\Delta(\mathbf{E})$, 1, et Δ^* . On en tire

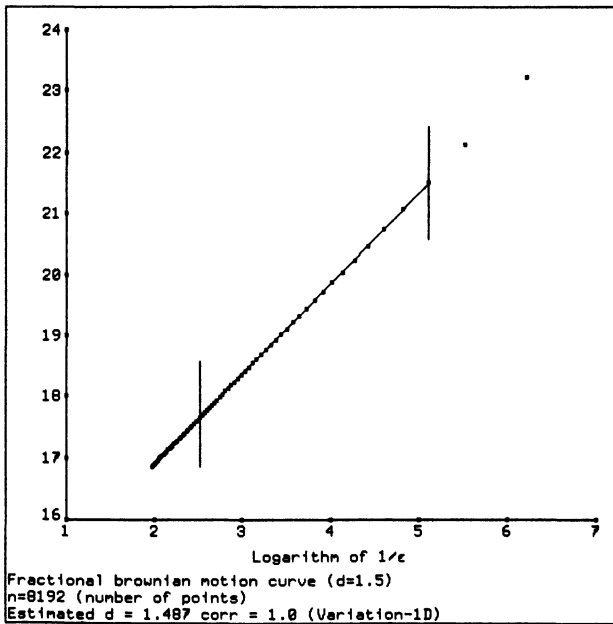
$$\Delta(\mathbf{E}) \leq \max \{1, \Delta^*\},$$

ce qui achève la démonstration.

4.2 REMARQUE. — Pour un calcul pratique, il est



a)



b)

Fig. 6. — Méthode des éléments structurants horizontaux pour le graphe du mouvement brownien : la saucisse $U'(\epsilon)$, et le diagramme correspondant. On voit le gain en précision par rapport aux méthodes précédentes.

[Method of horizontal segments for the graph of Brownian motion : sausage $U'(\epsilon)$, and corresponding log-log plot. Notice the precision, by comparison with the previous methods.]

encore meilleur de ne considérer que les points de $U(\epsilon)$ dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1 (voir Fig. 6). Autrement dit, si l'on note

$$T'(x, \epsilon) = [\max \{0, x - \epsilon\}, \min \{1, x + \epsilon\}] \times \{z(x)\}$$

la partie de $T(x, \epsilon)$ qui se projette sur $[0, 1]$, on remplace $U(\epsilon)$ par

$$U'(\epsilon) = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} T'(x, \epsilon). \quad (18)$$

Il va de soi que ce changement affecte peu les calculs précédents, et que (14) reste valable avec $U'(\epsilon)$.

4.3 REMARQUE. — Les profils dont nous cherchons à calculer la dimension ne sont évidemment pas rectifiables : on suppose d'emblée que leur dimension fractale est supérieure à 1. Il n'est alors pas nécessaire de tenir compte du maximum dans la formule (14). Pour un calcul pratique, le diagramme log-log correspondant est

$$(\log (1/\epsilon), \log (|U'(\epsilon)|_2/\epsilon^2)). \quad (19)$$

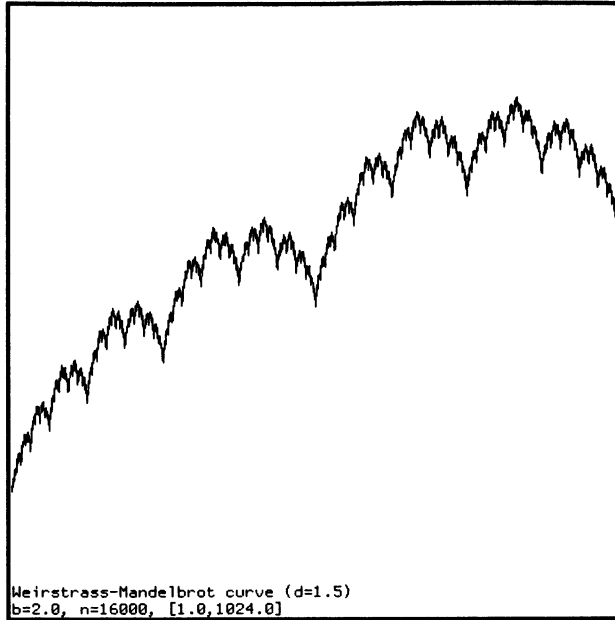
On peut observer dans les figures 6, 7 la précision de cette méthode. Elle est aussi appelée *méthode de variation*, pour les raisons qui vont suivre.

5. Méthode de variation.

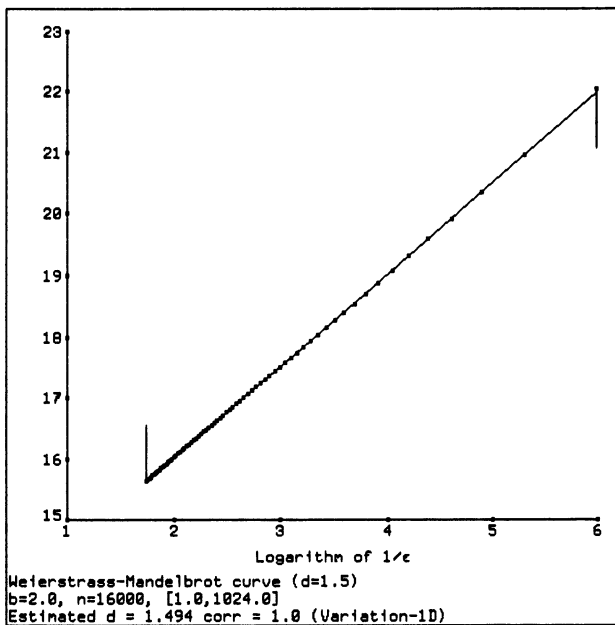
En fait nous allons donner dans ce paragraphe une présentation différente de la méthode précédente. Il nous semble intéressant d'en parler, car elle permet une meilleure vue de la structure interne de la fonction z étudiée. En effet, si le graphe \mathbf{E} de z est fractal, il existe au moins une portion de l'intervalle $[0, 1]$ (ensemble de définition de z) sur lequel z est nulle part dérivable, ou presque nulle part. Si $p(x, x')$ désigne la pente de la droite passant par les points $(x, z(x))$ et $(x', z(x'))$ du graphe, le concept fractal est lié à la propriété suivante : la limite supérieure de la valeur absolue $|p(x, x')|$ est infinie lorsque x' tend vers x . C'est bien entendu la vitesse de la convergence qui détermine la dimension fractale. Celle-ci dépend des propriétés hölderiennes locales de z [11], elles-mêmes liées aux dérivées fractionnaires de z . Pour mesurer ce genre de comportement, on définit une fonction de deux variables associée à z :

$$v(x, \epsilon) = \sup_{|x' - x| \leq \epsilon} z(x') - \inf_{|x' - x| \leq \epsilon} z(x') \quad (20)$$

qui est appelée ϵ -oscillation de la fonction z en x (noter que dans la formule (20), le point x' appartient nécessairement à $[0, 1]$, intervalle de définition de z . Le calcul de v est donc plus rapide sur les bords). Comme v est continue, l'intégrale de



a)



b)

Fig. 7. — Même étude que la précédente, mais pour le graphe de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot $\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{-nh}(1 - \cos b^n t)$, avec $b = 2$ et $h = 0,5$. La dimension théorique est $2 - h = 1,5$.

[Same as in figure 6, for the graph of the Weierstrass-Mandelbrot function shown in figure 1. The theoretical value of the dimension is $2 - h = 1.5$.]

$v(x, \epsilon)$ par rapport à x tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. Cette intégrale est l' ϵ -variation de z sur $[0, 1]$. Son ordre de croissance est directement lié à la

dimension de E . En fait on a le résultat, très simple, suivant :

5.1 PROPOSITION. — Soit $U'(\epsilon)$ la saucisse définie en (18) par la réunion des éléments structurants horizontaux, restreints aux abscisses comprises entre 0 et 1. Alors

$$|U'(\epsilon)|_2 = \int_0^1 v(x, \epsilon) dx. \quad (21)$$

Démonstration. Pour tout x , appelons $S(x, \epsilon)$ le segment vertical, d'abscisse x , dont les extrémités sont d'ordonnée respectivement

$$\sup_{|x' - x| \leq \epsilon} z(x') \text{ et } \inf_{|x' - x| \leq \epsilon} z(x').$$

Sa longueur est égale à $v(x, \epsilon)$. Notons

$$W(\epsilon) = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} S(x, \epsilon) \quad (22)$$

la réunion de tous ces segments verticaux. On a déjà utilisé en section 4 le lemme suivant : l'aire est égale à l'intégrale des longueurs des sections. Les sections verticales de $W(\epsilon)$ sont les segments $S(x, \epsilon)$. On a donc

$$|W(\epsilon)|_2 = \int_0^1 v(x, \epsilon) dx.$$

Il reste à prouver que les ensembles $U'(\epsilon)$ et $W(\epsilon)$ sont identiques.

Soit un point (x, y) de $W(\epsilon)$. L'ordonnée y est comprise entre les bornes supérieure et inférieure de $\{z(x') : |x' - x| \leq \epsilon\}$. Par continuité de z , il existe un x_0 , $|x_0 - x| \leq \epsilon$, tel que $z(x_0) = y$. Donc (x, y) appartient au segment horizontal $T'(x, \epsilon)$ (notations de la remarque 4.2). On en tire :

$$W(\epsilon) \subset U'(\epsilon).$$

Dans l'autre sens : soit (x, y) un point de $U'(\epsilon)$. Il existe un x_1 tel que $(x, y) \in T'(x_1, \epsilon)$, autrement dit $y = z(x_1)$ et $|x - x_1| \leq \epsilon$. Comme (x_1, y) est un point du graphe, y est compris entre les bornes supérieure et inférieure de $\{z(x') : |x' - x| \leq \epsilon\}$. Donc (x, y) appartient au segment vertical $S(x, \epsilon)$. Ainsi

$$U'(\epsilon) \subset W(\epsilon).$$

5.2 REMARQUE. — La formule (14) peut donc être remplacée par

$$\Delta(E) = \max \left\{ 1, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2 - \log \times \left(\int_0^1 v(x, \epsilon) dx \right) / \log \epsilon \right] \right\}. \quad (23)$$

Le diagramme log-log correspondant pour un calcul pratique est

$$\left(\log (1/\varepsilon), \log \left(\left(\int_0^1 v(x, \varepsilon) dx \right) / \varepsilon^2 \right) \right). \quad (24)$$

Cette méthode a été employée pour la première fois dans [8].

5.3 REMARQUE. — Il est très facile de constater sur l'expression (23) que cette méthode est pratiquement indépendante d'un changement d'amplification de z : si par exemple on divise z par 2, $v(x, \varepsilon)$ est aussi divisée par 2, de même que son intégrale, ce qui revient à une simple translation dans le diagramme log-log.

6. Méthode des intersections.

Soit m la borne inférieure de $z(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et M la borne supérieure. Soit L_y la droite horizontale d'ordonnée y . L'ensemble $E_y = E \cap L_y$ des points de E d'ordonnée y est une section de E . Par continuité de z , E_y est non vide si et seulement si $m \leq y \leq M$. Dans tout ce qui suit on admettra que y vérifie ces inégalités. Dans le cas où E est fractal, E_y est en général un ensemble de Cantor sur L_y . Pour obtenir la dimension de cet ensemble, l'une des meilleures méthodes est certainement celle de la « saucisse de Minkowski en dimension 1 » : sur L_y on considère la réunion

$$E_{y, \varepsilon} = \bigcup_{x \in E_y} [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

de tous les intervalles de longueur 2ε centrés sur E_y (à ne pas confondre avec $E(\varepsilon) \cap L_y$), et on calcule la longueur $l(y, \varepsilon)$ de $E_{y, \varepsilon}$. Alors

$$\Delta(E_y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \log l(y, \varepsilon) / \log \varepsilon). \quad (25)$$

Le calcul de $l(y, \varepsilon)$ s'effectue de la manière suivante : on prend, dans la droite L_y , le plus petit segment $[a, b]$ contenant E_y . Le complémentaire de E_y dans $[a, b]$ est une réunion disjointe d'intervalles ouverts C_1, C_2, C_3, \dots , de longueur c_1, c_2, c_3, \dots (en pratique bien entendu on n'a affaire qu'à un nombre fini d'intervalles). On les suppose rangés de façon que la suite (c_n) soit décroissante. Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe donc un entier n tel que

$$c_{n+1} < 2\varepsilon \leq c_n.$$

Si $i \leq n$, $C_i \cap E_{y, \varepsilon}$ est formé de deux intervalles de longueur ε .

Si $i > n$, C_i est inclus dans $E_{y, \varepsilon}$. D'où, en tenant compte de la partie de voisinage qui est extérieure à $[a, b]$:

$$l(y, \varepsilon) = 2(n+1)\varepsilon + \sum_{i > n} c_i, \quad (26)$$

formule qui est vraie en théorie si E_y est de longueur nulle (pratiquement il suffit de vérifier que cette section ne contient aucun segment). Cette méthode de calcul de $\Delta(E_y)$ est très rapide et particulièrement simple à mettre en œuvre [2]. Il reste à faire le rapport entre $\Delta(E)$ et la famille des dimensions $\Delta(E_y)$, pour tout y . Lorsqu'une droite de position aléatoire L coupe E , on s'attend à ce que la relation

$$\Delta(E) = 1 + \Delta(E \cap L) \quad (27)$$

soit vérifiée. Dans le cas qui nous occupe, les droites L_y ont toutes la direction horizontale ; de plus, (27) peut être fautive pour certaines valeurs particulières de y , par exemple si E comporte un segment horizontal d'ordonnée y . Pour essayer d'éliminer théoriquement les valeurs aberrantes, nous utilisons une notion connue dans l'étude des espaces L_∞ :

6.1 DÉFINITION. — Etant donné une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle *supremum essentiel* de f la valeur

$$\begin{aligned} \text{ess sup } f &= \inf \{ a \in \mathbb{R} \text{ tel que l'ensemble} \\ &\quad \{ x : f(x) > a \} \text{ est de mesure nulle} \} \\ &= \sup \{ a \in \mathbb{R} \text{ tel que l'ensemble} \{ x : f(x) < a \} \\ &\quad \text{est de mesure non nulle} \}. \end{aligned}$$

Ceci revient à éliminer les valeurs négligeables de f pour le calcul de son maximum. Il va de soi que $\text{ess sup } f$ est égal à la borne supérieure de f lorsque f est continue. Mais ce n'est pas le cas en général de $\Delta(E_y)$, que nous considérons ici comme une fonction de y . En fait on peut démontrer

6.2 PROPOSITION. — Avec les notations précédentes :

$$\Delta(E) \geq 1 + \text{ess sup } \Delta(E_y). \quad (28)$$

Démonstration. Si α est un réel quelconque $> \Delta(E)$, alors l'expression $\varepsilon^{\alpha-2} |E(\varepsilon)|_2$ tend vers 0 lorsque ε tend lui-même vers 0. Pour tout y on a $E_{y, \varepsilon} = U(\varepsilon)_y$ où $U(\varepsilon)$ est défini au paragraphe 4. Comme l'aire de $U(\varepsilon)$ est égale à l'intégrale des longueurs de ses sections, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \varepsilon^{\alpha-2} l(y, \varepsilon) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-2} |U(\varepsilon)|_2.$$

Cette limite est nulle d'après (14).

Un autre résultat connu de théorie de la mesure nous permet de conclure que pour presque tout y , c'est-à-dire pour tout y sauf dans un ensemble F de mesure nulle, on a

$$\lim \varepsilon^{\alpha-2} l(y, \varepsilon) = 0. \quad (29)$$

Lorsque y vérifie (29), alors $\Delta(E_y) \leq \alpha - 1$. En faisant tendre α vers $\Delta(E)$, on en déduit que $\Delta(E) - 1$ est au moins égal à tous les $\Delta(E_y)$, sauf pour $y \in F$. Ceci prouve la proposition.

6.3 REMARQUE. — En fait les mêmes arguments montrent que (28) est vraie pour n'importe quel ensemble E borné, de sections E_y .

L'inégalité inverse de (28) est plus difficile à obtenir. Dans notre cas (graphes continus), nous pouvons montrer que l'égalité

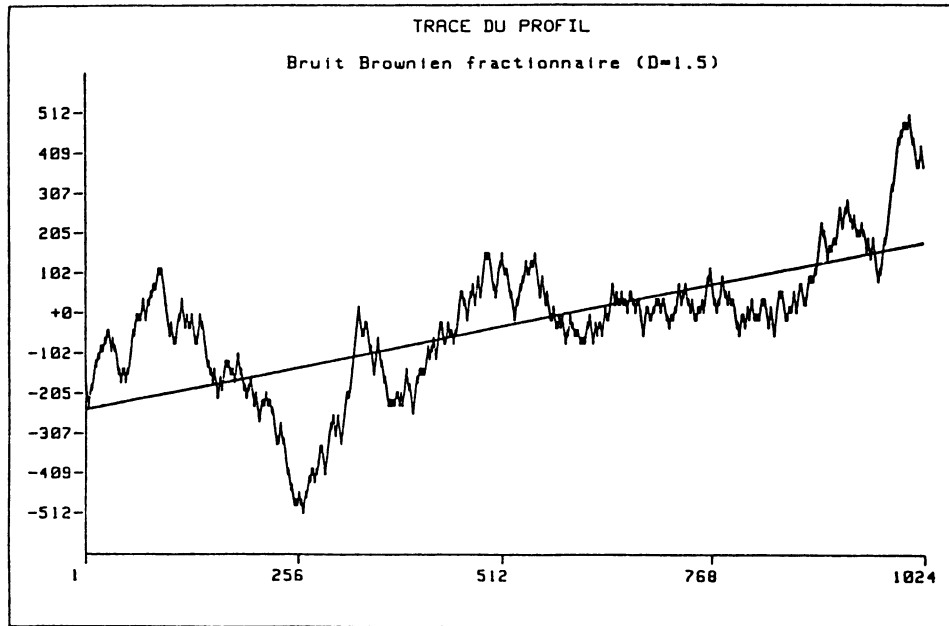
$$\Delta(E) = 1 + \text{ess sup } \Delta(E_y) \quad (30)$$

est vraie, lorsque, pour tout $\alpha > \text{ess sup } \Delta(E_y)$, la valeur

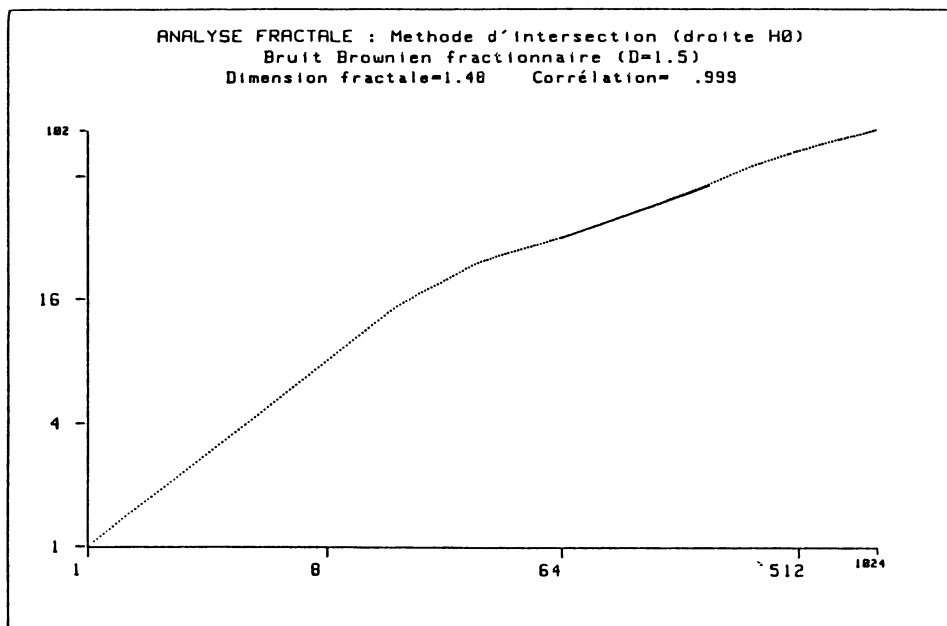
$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_y \varepsilon^{\alpha-1} l(y, \varepsilon)$$

est finie : on peut alors utiliser le théorème de convergence dominée des intégrales pour démontrer (30). Pratiquement nous admettons la relation (30), et nous balayons le graphe E par un certain nombre de droites horizontales, en calculant à chaque fois la dimension de l'intersection par la méthode définie en (25) et (26). Les résultats obtenus doivent être sensiblement constants.

6.4 REMARQUE. — Certains graphes présentent une croissance générale assez rapide, et dans ce cas, en pratique, le nombre de points de E_y est petit : cela



a)



b)

Fig. 8. — Diagramme correspondant à la méthode d'intersection par la droite des moindres carrés, pour le graphe du mouvement brownien.

[Log-log plot for the intersection method, by the least-mean-square line for the graph of the Brownian motion.]

nuit à la précision des résultats. Or les considérations qui précèdent s'appliquent tout aussi bien à des sections de E par une famille de droites parallèles, de pente non nulle. Si en particulier L désigne la droite des moindres carrés de E , l'ensemble de Cantor $L \cap E$ comporte généralement assez de points pour une bonne précision, et la valeur

$$1 + \Delta(L \cap E)$$

fournit une estimation raisonnable, et très rapide, de $\Delta(E)$ (voir Fig. 8). On peut obtenir une valeur encore meilleure en construisant une courbe Γ de

lissage de E par moyenne glissante, et en calculant

$$1 + \Delta(\Gamma \cap E).$$

Il faut bien entendu estimer la dimension de cette intersection avec des valeurs de ε inférieures au pas du lissage. Lorsqu'un arc inclus dans Γ possède une longueur supérieure à ε , on peut alors assimiler cette longueur à celle du segment de mêmes extrémités. On peut alors effectuer le calcul de la saucisse de Minkowski de E sur Γ de la manière décrite précédemment sur une droite (voir Fig. 9). D'autres méthodes de lissage pourraient être essayées.

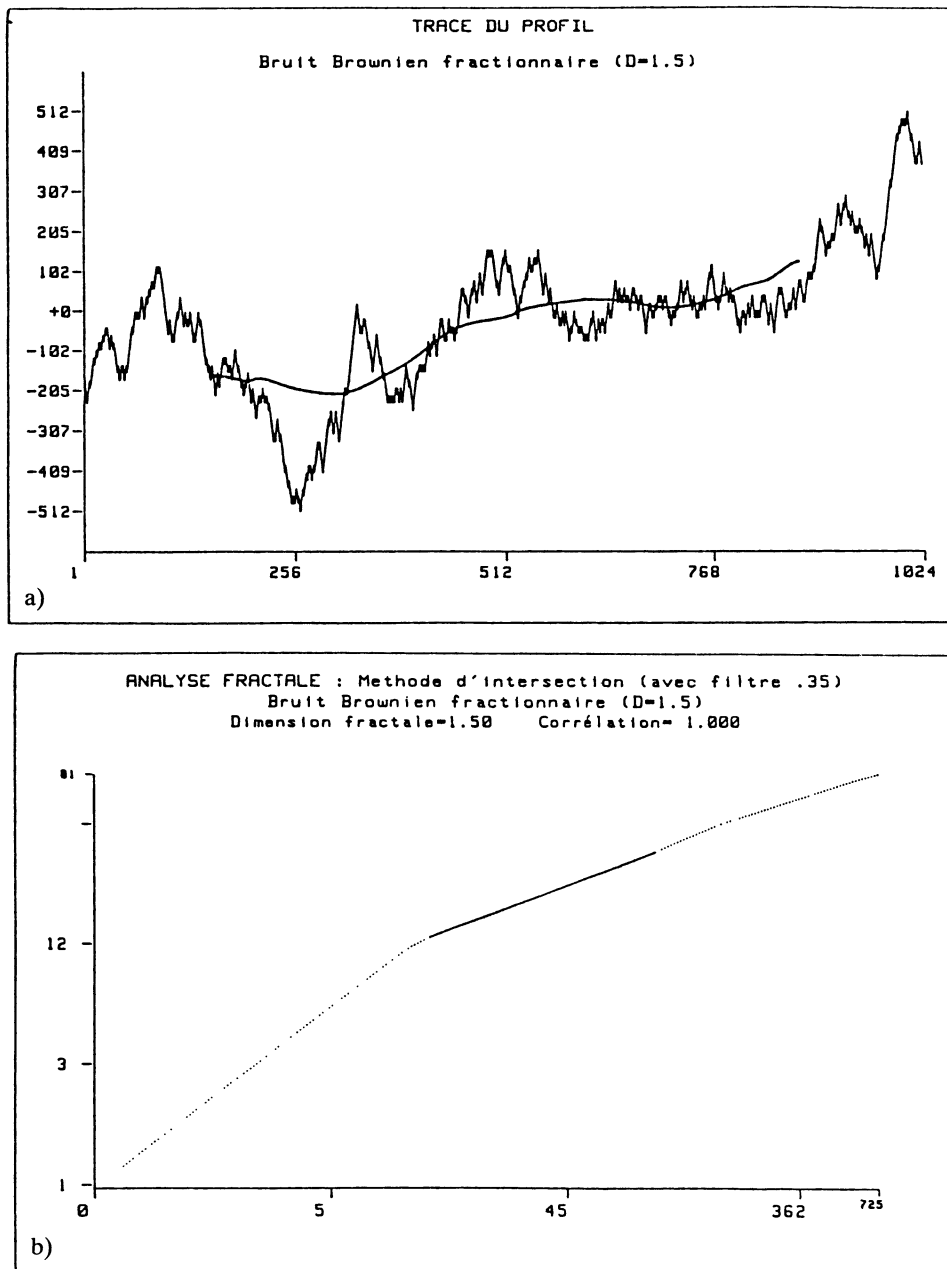


Fig. 9. — Courbe de lissage pour le graphe du mouvement brownien, et calcul de la dimension de leur intersection. Le résultat obtenu ($\Delta(\Gamma \cap E) = 0,5$) est bien le même que celui prévu théoriquement.

[A smoothing curve intersecting the graph of the Brownian motion. In this case, the estimated value is identical to the theoretical intersection dimension ($\Delta(\Gamma \cap E) = 0.5$).]

Conclusion.

Dans cette liste de méthodes, nous remarquons l'antinomie habituelle entre ces deux qualités : précision du résultat, et généralité d'emploi. La méthode des boîtes, et celle de Bouligand-Minkowski, qui peuvent être utilisées sur n'importe quel ensemble, sont trop peu précises dans notre cas. La méthode d'intersection peut rendre de grands services lorsqu'on a besoin d'une évaluation rapide, surtout en employant une courbe de lissage appropriée. L'hypothèse de continuité est ici nécessaire. Cependant on pourrait certainement l'utiliser sur n'importe quelle courbe continue. L'emploi de notre méthode de variation ne se justifie que pour les graphes de fonctions continues (profils rugosimétriques par exemple). Elle donne les meilleurs résultats sur des graphes suffisamment homogènes, où le modèle d'affinité interne paraît bien s'appliquer. Elle s'emploie très facilement sur un analyseur d'images.

On peut d'ailleurs encore remarquer une légère tendance à la concavité dans le diagramme log-log correspondant. Ceci pourrait se corriger de façon systématique, en modélisant l'erreur faite sur l'obtention des données par un bruit brownien. On peut aussi remarquer que cette estimation de la dimension fractale par la pente d'une droite des moindres carrés, n'a de sens au fond que si l'on admet *a priori* que l'intégrale $\int_0^1 v(x, \varepsilon) dx$ est proportionnelle à la fonction $\varepsilon^{2-\alpha}$ lorsque ε est assez petit. Il existe bien d'autres fonctions dont la croissance vers 0 est du même ordre, et dont certaines pourraient mieux se prêter à un ajustement statistique. Observons enfin que plus la valeur de la dimension est proche de 2, plus il faut augmenter l'intervalle où les valeurs du pas ε sont prises. Dans une publication ultérieure nous montrerons que la méthode de variation se généralise facilement à l'espace \mathbf{R}^n , $n \geq 3$, et qu'elle donne des résultats excellents pour le calcul de dimension de surfaces.

Bibliographie

- [1] BOULIGAND, G., Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan, *Bull Sc. Math.* **II-52** (1929) 185-192.
- [2] CHAMPIGNY, J.-P., Détermination de la dimension fractale de profils échantillonnés, application à la rugosimétrie, Thèse de Docteur-Ingénieur, ENSMM, Besançon (1986).
- [3] CHERMANT, L., CHERMANT, J.-L., COSTER, M., *Acta Stereologica* **2** (1983) 71.
- [4] GAGNEPAIN, J.-J., ROQUES-CARMES, C., *Wear* **109** (1986) 119.
- [5] KAYE, B. H., *Particle characterization in technology*, vol. 1, Chap. 5, Ed. K. Beddow (CRC Press Inc., Boca Raton, FL) 1984.
- [6] MANDELBROT, B., *The fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman) 1982.
- [7] MANDELBROT, B., Self-affine fractal sets, in *Fractals in Physics*, Proceedings of the 6th International Symposium of the International Center for Theoretical Physics (Trieste 1985) (North Holland) 1986.
- [8] QUINIOU, J.-F., Thèse en cours de rédaction, ENSMM, Besançon.
- [9] ROQUES-CARMES, C., WEHBI, D., Approche fractal des surfaces et implications analytiques, dans *Méthodes usuelles d'étude de surfaces* (Société Française de Métallurgie) en cours d'édition.
- [10] TRICOT, C., Fractales en rugosimétrie, Rapport 1433 du CRM, Université de Montréal (1986).
- [11] TRICOT, C., Dimensions de graphes, *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci. Paris* **303** (1986) 609-612.
- [12] TRICOT, C., CHAMPIGNY, J.-F., LE MÉHAUTÉ, A., ROQUES-CARMES, C., Practical evaluation of the fractal dimension for 2-dimensional profiles, communication to the 1986 Fall Meeting of the MRS.
- [13] VOSS, R., Random Fractals, in *Scaling phenomena in disordered systems* (Plenum) 1985.