



**HAL**  
open science

## **Analyses théorique et expérimentale du gonflement dans le domaine de superplasticité**

J.-P. Lechten, J.-C. Patrat, B. Baudalet

► **To cite this version:**

J.-P. Lechten, J.-C. Patrat, B. Baudalet. Analyses théorique et expérimentale du gonflement dans le domaine de superplasticité. *Revue de Physique Appliquée*, 1977, 12 (1), pp.7-14. <10.1051/rphysap:019770012010700>. <jpa-00244124>

**HAL Id: jpa-00244124**

**<https://hal.science/jpa-00244124v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Classification  
 Physics Abstracts  
 9.128 — 9.126

## ANALYSES THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DU GONFLEMENT DANS LE DOMAINE DE SUPERPLASTICITÉ

J.-P. LECHTEN, J.-C. PATRAT (\*) et B. BAUDELET

Laboratoire de Physique et Technologie des Matériaux (\*\*)  
 Université de Metz, France

(Reçu le 4 mai 1976, accepté le 13 juillet 1976)

**Résumé.** — La déformation dans le domaine superplastique de tôles encastrées circulairement et soumises à une pression variable au cours du temps est étudiée. L'influence d'un paramètre rhéologique sur la géométrie des pièces finies et la cinétique de la déformation sont particulièrement mises en évidence. Les résultats expérimentaux obtenus avec deux alliages superplastiques, l'alliage eutectique PbSn et l'alliage de titane Ti6Al4V, sont confrontés aux résultats théoriques.

**Abstract.** — The superplastic deformation of circular metal sheets submitted to variable stresses is studied. Specifically, the influence of a rheological parameter on the shape of the bulged pieces and the kinetics of deformation are examined. The experimental results obtained with two superplastic alloys, the eutectic alloy PbSn and titanium alloy Ti6Al4V, are compared with theoretical results.

### Notation (voir Fig. 1).

$a_i$	: surface de l'élément $i$ .	$R_1, R_2$	: rayons de courbure d'une calotte de révolution autour de l'axe $z$ .
$a_{i+}$	: surface aréolaire réduite de l'élément $i$ .	$R$	: rayon de la calotte sphérique.
$\dot{a}_i$	: vitesse de déformation réduite de la surface de l'élément $i$ .	$R_+$	: rayon de la calotte sphérique réduite.
$C, K$	: constantes du matériau superplastique $C = 1/K^n$ .	$\dot{R}$	: $\frac{1}{R} \frac{dR_+}{dt}$ .
$h_i$	: position de l'élément $i$ repéré suivant l'axe $z$ à partir de la base de la calotte.	$r_0$	: rayon d'encastrement de la tôle.
$h_{i+}$	: position relative de l'élément $i$ repéré suivant l'axe $z$ à partir de la base de la calotte.	$S_0$	: épaisseur de la tôle de départ.
$h'_i$	: position de l'élément $i$ repéré suivant l'axe $z$ à partir du sommet de la calotte.	$\bar{S}$	: épaisseur moyenne de la calotte.
$h'_{i+}$	: position relative de l'élément $i$ repéré suivant l'axe $z$ à partir du sommet de la calotte.	$S_i$	: épaisseur de l'élément $i$ .
$h'_N = h_0$	: hauteur de la calotte.	$S_{i+}$	: épaisseur réduite de l'élément $i$ .
$i$	: indice repère d'un élément de la calotte.	$t$	: temps réel.
$m$	: coefficient donnant la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation.	$t^*$	: temps caractéristique du matériau.
$n$	: coefficient donnant la sensibilité de la vitesse de déformation à la contrainte $n = 1/m$ .	$t_+$	: temps réduit de formage.
$N$	: nombre d'éléments $i$ .	$t_{+f}$	: temps réduit de formage d'une demi-sphère ( $h_0 = r_0$ ).
$p$	: pression appliquée.	$v_i$	: volume de l'élément $i$ .
$p_+$	: pression appliquée réduite.	$v_{i+}$	: volume réduit de l'élément $i$ .
		$\alpha_i$	: aire de la calotte de hauteur $h'_i$ .
		$\alpha_{i+}$	: aire réduite de la calotte de hauteur $h'_i$ .
		$\dot{\alpha}_i$	: vitesse aréolaire réduite de la calotte de hauteur $h'_i$ : $\frac{1}{\alpha_{i+}} \frac{d\alpha_{i+}}{dt}$ .
		$\alpha_N$	: aire de la calotte totale.
		$\beta_i$	: rapport de la contrainte suivant un méridien à la contrainte suivant un parallèle.
		$\epsilon_\theta$	: déformation suivant un parallèle de la calotte.
		$\epsilon_\phi$	: déformation suivant un méridien de la calotte.
		$\bar{\epsilon}$	: vitesse de déformation équivalente.

(\*) Actuellement : Institut Universitaire de Technologie de Poitiers.

(\*\*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 155.

- $\sigma_{\theta i}$  : contrainte suivant un parallèle de la calotte en un point  $i$ .  
 $\sigma_{\phi i}$  : contrainte suivant un méridien de la calotte en un point  $i$ .  
 $\sigma_{i+}$  : contrainte suivant un méridien de la calotte rapportée à la contrainte équivalente initiale au sommet.  
 $\sigma_r$  : contrainte radiale dans la calotte.  
 $\bar{\sigma}$  : contrainte équivalente.  
 $\sigma_0$  : contrainte initiale équivalente au sommet.  
 $\Phi_i$  : demi-angle sous-tendu par la calotte de hauteur  $h'_i$ .  
 $\Phi_N$  : demi-angle sous-tendu par la calotte complète.  
 $\dot{\Phi}_i$  :  $\cotg \Phi_i \frac{d\Phi_i}{dt_+}$ .

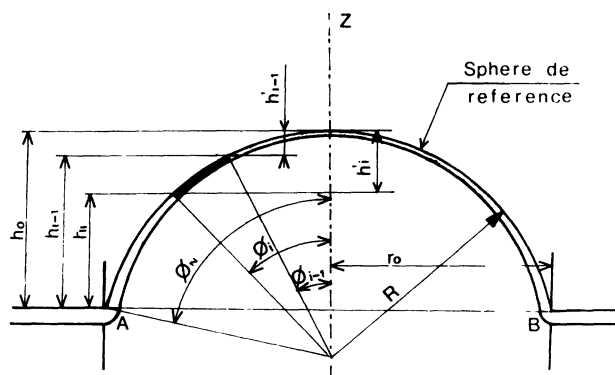


FIG. 1. — Coupe suivant un méridien d'une calotte donnant les différents paramètres utilisés dans le calcul théorique.

**Introduction.** — Le gonflement d'une tôle encadrée circulairement et soumise à une pression est un essai simple de thermoformage [1, 2]. Au cours de cette étude nous analyserons théoriquement et expérimentalement un tel essai avec deux matériaux présentant un comportement superplastique [3]. Nous mettrons en évidence l'influence d'un paramètre rhéologique sur la géométrie des pièces et nous déterminerons les cinétiques de la déformation en fonction de la loi de variation de la pression appliquée.

Plusieurs auteurs ont réalisé des gonflements de tôles dans le domaine où elles présentent un comportement superplastique [4, 5, 6], certains ont proposé une analyse théorique de cette opération de mise en forme [7, 8, 9, 10]. Jovane [8] et Belk [10] supposent que la répartition des épaisseurs est uniforme au cours du thermoformage ; cette hypothèse n'est admissible que dans le cas de gonflement de sphère complète. Holt [7] adopte l'égalité en chaque point des déformations principales, cette hypothèse est incompatible avec les conditions aux limites imposées par l'encastrement comme nous le montrerons en annexe II. Nous avons adopté les mêmes hypothèses que celles retenues par Cornfield et Johnson [9]. L'intérêt de ce présent travail réside dans le fait que l'analyse théorique a été menée sous une forme adimensionnelle beaucoup plus

maniable, une loi de pression mieux adaptée à la mise en forme par gonflement de matériaux superplastiques a été établie et les cinétiques de gonflement ont été déterminées avec cette loi de pression.

**1. Analyse théorique.** — Les détails de l'analyse théorique — hypothèses et techniques de calcul — sont reportés en annexe I. Dans un premier temps sont présentés les résultats indépendants de la loi de pression et uniquement fonction du paramètre rhéologique  $m$  supposé constant en tout point de la calotte et à chaque instant de la déformation. La répartition des épaisseurs est d'autant plus uniforme que la valeur du coefficient  $m$  est plus élevée : l'écart entre l'épaisseur au sommet et à la base s'accroît au cours de la déformation d'autant plus que la valeur du coefficient  $m$  est plus faible (Fig. 2) ; la répartition finale des épaisseurs le long

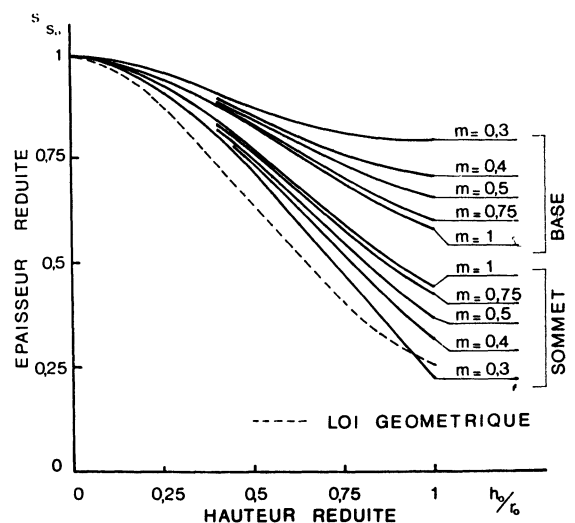


FIG. 2. — Evolutions théoriques de l'épaisseur au sommet et à la base rapportée à l'épaisseur initiale, en fonction de la hauteur  $h_0$  de la calotte rapportée au rayon d'encastrement  $r_0$ , pour différentes valeurs du coefficient  $m$ .

d'un méridien est d'autant plus uniforme que la valeur du coefficient  $m$  est plus grande (Fig. 3). Ainsi, les rapports entre l'épaisseur au sommet et à la base sont respectivement égaux à 0,27 et 0,73 lorsque la valeur du coefficient  $m$  vaut 0,3 et 1. La figure 4 montre qu'il y a accord entre cette analyse et celle de Cornfield et Johnson, les faibles différences observées pour les valeurs du coefficient  $m$  inférieures à 0,3 peuvent être imputables à des différences dans les méthodes de calcul utilisées. La connaissance de l'évolution de l'épaisseur au sommet au cours du thermoformage permet de déterminer une loi de variation de la pression appliquée qui maintient constant la valeur du coefficient  $m$  au sommet de la déformée (Fig. 5). Le choix d'une telle loi est justifié en annexe I. Une autre loi est également proposée à partir d'une analyse purement géométrique de la déformation (11), selon laquelle l'ensemble des trajectoires de chacun des points de la tôle serait un faisceau de cercles orthogonaux aux faisceaux des

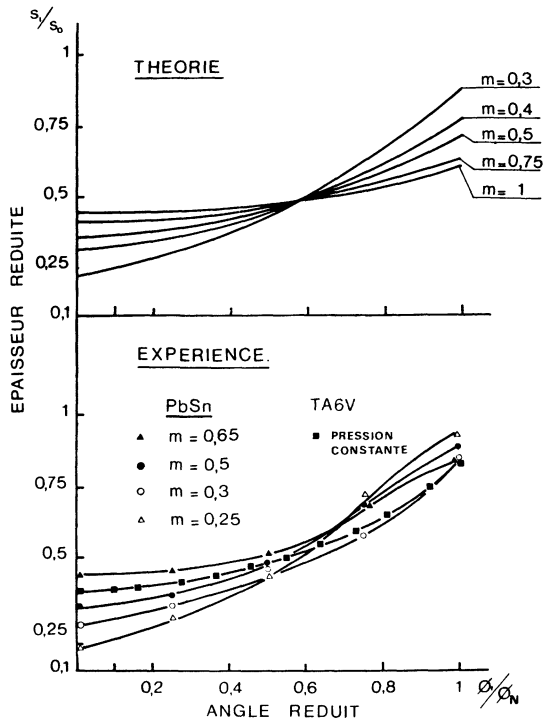


FIG. 3. — Courbes théoriques et expérimentales donnant l'épaisseur en un point ( $S_i$ ) rapportée à l'épaisseur initiale ( $S_0$ ) en fonction de la position de ce point sur un méridien repéré par son angle  $\Phi_i$  rapporté à l'angle  $\Phi_N$ . Les essais sur l'alliage de titane TA6V ont été réalisés à la Société Nationale Industrielle Aérospatiale.

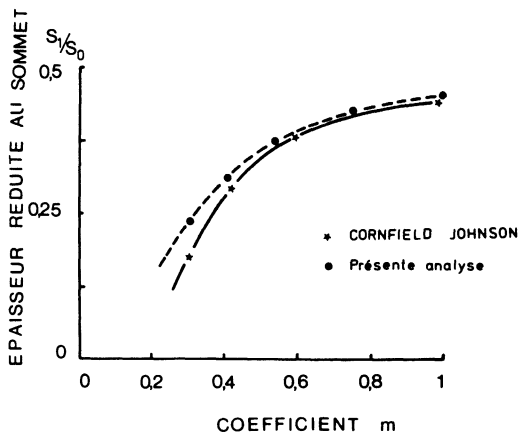


FIG. 4. — Variation théorique de l'épaisseur réduite au sommet en fonction du coefficient  $m$  suivant l'analyse de Cornfield *et al.* [9] et celle développée dans cette présente étude.

cercles formés par les déformées ; cette loi de variation de la pression appliquée coïncide avec les lois précédentes au début de la déformation.

Nous considérons maintenant les résultats qui sont fonction à la fois du coefficient rhéologique  $m$  et de la loi de pression retenue. On constate que la vitesse de déformation aréolaire varie en chaque point de la déformée et au cours du temps (Fig. 6) : en chaque point le rapport des vitesses est au maximum égal à trois entre le début et la fin de l'essai et à un instant donné, ce rapport en deux points différents est au

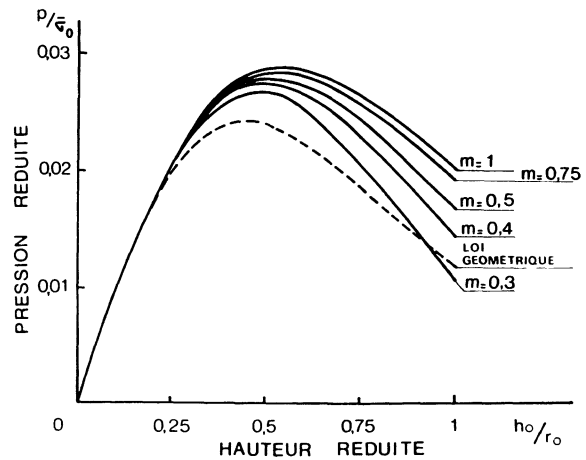


FIG. 5. — Evolutions théoriques de la pression de formage  $p$  rapportée à la contrainte équivalente initiale  $\bar{\sigma}_0$  en fonction de la hauteur de la calotte  $h_0$  rapportée au rayon d'encastrement  $r_0$ , telle que la contrainte équivalente au sommet soit maintenue constante et pour différentes valeurs du coefficient  $m$ .

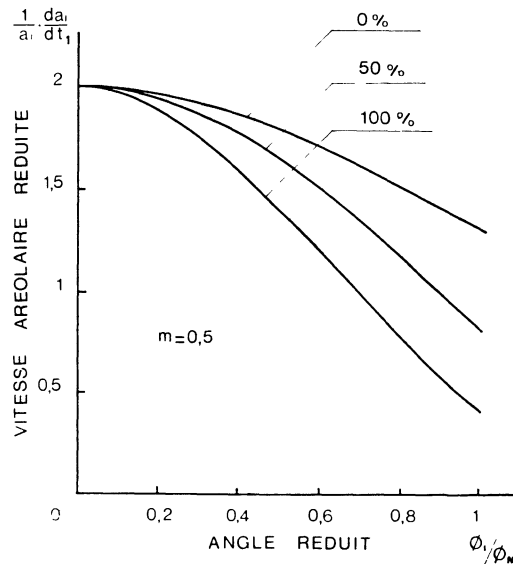


FIG. 6. — Courbes théoriques donnant la vitesse d'accroissement de la surface de l'élément  $i$  repéré par son angle  $\Phi_i$  rapporté à l'angle  $\Phi_N$  pour trois étapes de gonflement :

- 0 % au début du gonflement ;
- 50 % lorsque la surface de la calotte a augmenté de 50 % ;
- 100 % lorsque la surface de la calotte a augmenté de 100 % c'est-à-dire lorsque la demi-sphère est atteinte.

maximum égal à cinq. Des variations de cet ordre ont peu d'influence sur la valeur du coefficient  $m$  et d'autant moins que cette valeur est plus élevée [12]. Ce résultat justifie d'une part l'hypothèse qui a été faite de supposer constant le coefficient  $m$  en chaque point et à chaque instant et d'autre part le choix de la loi de pression retenue. Certaines opérations de thermoformage généralement à températures élevées ne permettent pas le contrôle de la déformation, il est alors intéressant de déterminer par le calcul les temps de formage ainsi que les cinétiques de

déformation. Des temps réduits de formage ont été déterminés en fonction du coefficient  $m$  pour la loi de pression précédente (Fig. 7). Le temps réel de mise

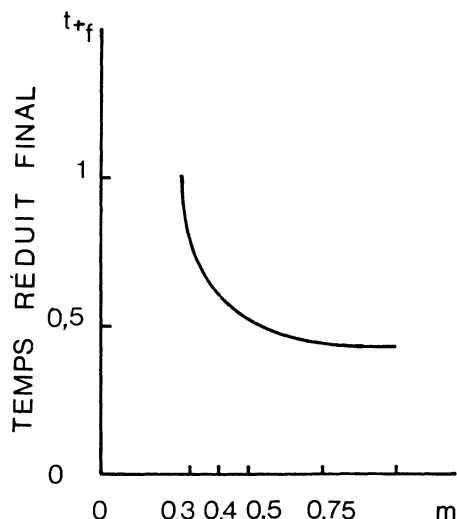


FIG. 7. — Evolution théorique du temps réduit final en fonction de la valeur du coefficient rhéologique  $m$ .

en forme est calculé en associant au temps réduit un temps caractéristique du matériau. Sur la figure 8 sont reportées les cinétiques déterminées pour différentes valeurs du coefficient  $m$ .

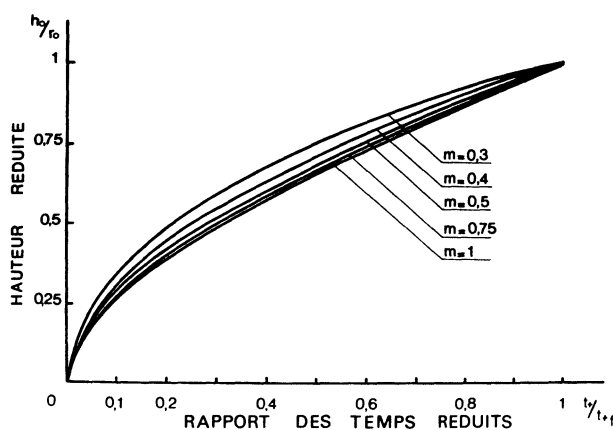


FIG. 8. — Evolutions théoriques de la hauteur  $h_0$  de la calotte rapportée au rayon d'encastrement  $r_0$  en fonction du temps caractéristique du matériau rapporté au temps caractéristique final, pour différentes valeurs du coefficient  $m$  et lorsque la contrainte équivalente est maintenue constante au sommet.

**2. Analyse expérimentale.** — Les essais de thermoformage ont été effectués sur deux alliages présentant un comportement superplastique. L'un, l'alliage eutectique PbSn [12-13] est superplastique à la température ambiante, l'autre, l'alliage de titane TA6V (Ti6Al4V), est superplastique à 920 °C environ [14-15]. Les techniques expérimentales de l'analyse rhéologique effectuée sur l'alliage PbSn sont présentées en annexe III. Les essais de gonflement sont réalisés sur des tôles de 2 mm d'épaisseur encastrées sous un diamètre

de 130 mm. Le rayon de raccordement de la matrice est égal à l'épaisseur de la tôle, soit 2 mm. Le fluide utilisé est de l'argon sous une pression maximale de quatre bars. L'alliage TA6V a été mis en forme avec le même fluide, la pression maximale est égale à seize bars. La tôle d'un millimètre cinq d'épaisseur est encastrée sous un diamètre de 218 mm, le rayon de raccordement de la matrice est de 20 mm. Au cours de ces deux essais, aucun glissement de la tôle n'a été constaté au niveau de l'encastrement.

Un découpage des pièces permet de relever la répartition des épaisseurs en fonction du coefficient  $m$ . On remarque (Fig. 2) que la répartition des épaisseurs est d'autant plus uniforme que la valeur du coefficient  $m$  est plus élevée : les rapports entre l'épaisseur au sommet et à la base sont respectivement égaux à 0,22 et 0,47 lorsque la valeur du coefficient  $m$  est égale à 0,25 et 0,65. De plus on constate que les résultats expérimentaux concordent bien avec ceux déduits de l'analyse théorique ; les faibles écarts observés à la base peuvent être imputés au fait qu'au début de la déformation d'un matériau superplastique, la contrainte d'écoulement est plus élevée tant que les grains ou phases ne sont pas devenus équi-axes [16]. Comme à la base, les taux de déformation sont faibles, ce stade transitoire ne peut pas être dépassé ; ceci diminue encore l'importance de la déformation à la base et justifie les épaisseurs plus grandes observées.

Au cours des essais de thermoformage, la hauteur de la déformée a été relevée en fonction du temps de formage (Fig. 9), la cinétique obtenue avec l'alliage

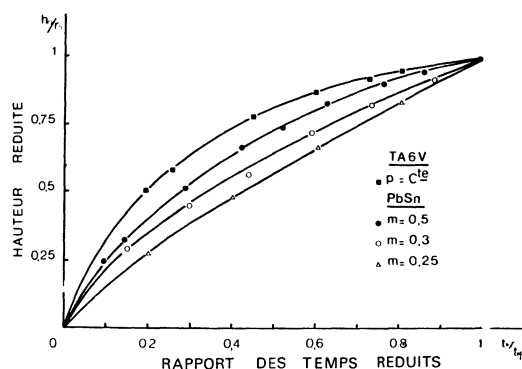


FIG. 9. — Evolutions expérimentales de la hauteur de la calotte  $h_0$  rapportée au rayon d'encastrement  $r_0$  en fonction du temps caractéristique du matériau rapporté au temps caractéristique final pour les alliages TA6V et PbSn. Les résultats sur l'alliage de titane TA6V ont été obtenus à la Société Nationale Industrielle Aéronautique.

PbSn est en bon accord avec la cinétique prévue par la théorie lorsque la valeur du coefficient  $m$  est prise égale à 0,5 (Fig. 10) ; cependant, au début de l'essai, l'évolution expérimentale de la hauteur de la déformée est un peu plus lente que celle déterminée par le calcul. Cette différence pourrait être interprétée comme précédemment.

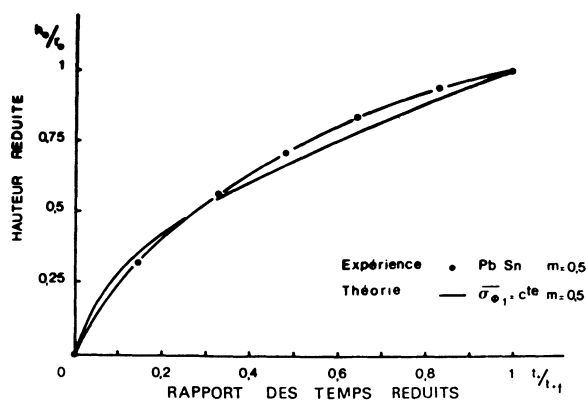


FIG. 10. — Comparaison des cinétiques théorique et expérimentale.

3. **Conclusion.** — Dans la partie théorique de cette étude du gonflement dans le domaine superplastique de tôles encastrees, les résultats suivants ont été obtenus :

— la géométrie des pièces est fortement dépendante du coefficient rhéologique  $m$ ,

— une loi de variation de la pression appliquée a été déterminée afin de rendre le coefficient  $m$  constant dans la zone qui se déforme le plus c'est-à-dire au sommet de la déformée,

— la cinétique de la déformation en fonction du coefficient  $m$  et de la loi de variation de la pression appliquée a été établie.

Ces résultats sont à considérer lors de la conception des pièces et de l'établissement des gammes de fabrication.

L'analyse expérimentale montre un bon accord compte tenu des hypothèses simplificatrices qui ont été faites lors du calcul, à savoir coefficient  $m$  supposé constant et loi de comportement du type superplastique  $\bar{\sigma} = k(\dot{\varepsilon})^m$ .

**Remerciements.** — Ce travail a été effectué dans le cadre du contrat D. G. R. S. T. n° 75.7.1222. Les auteurs expriment leurs remerciements pour l'aide que cet organisme leur a apportée. Ils sont reconnaissants à M. Georges Sertour (Société Nationale Industrielle Aérospatiale) pour sa collaboration dans les essais de gonflement sur l'alliage de titane Ti6Al4V et à M. le Professeur Jean Lemaître (Ecole Nationale Supérieure de l'Enseignement Technique) pour ses commentaires.

**Annexe I. — ANALYSE THÉORIQUE : HYPOTHÈSES ET TECHNIQUES DE CALCUL.** — L'analyse théorique repose sur les hypothèses suivantes :

- le matériau est homogène et isotrope,
- le volume est conservé au cours de la déformation,

— la loi de comportement utilisée lors d'essais uniaxiaux est valable pour un essai multiaxial lorsqu'elle est exprimée en contrainte et vitesse de déformation équivalente

$$\bar{\sigma} = K(\dot{\varepsilon})^m \quad (1)$$

où  $\bar{\sigma}$  est donné par l'expression :

$$2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_\phi - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2$$

et  $\dot{\varepsilon}$  est donné par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \left( \frac{2}{3} \sum_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

— la valeur du coefficient  $m$  est constante en tout point et à chaque instant de la déformation. Au cours d'un essai de gonflement cette double condition est impossible à réaliser expérimentalement car le coefficient  $m$  étant fonction de la vitesse de déformation, il serait nécessaire d'effectuer le gonflement à vitesse de déformation équivalente constante en tout point et à chaque instant. Or, au cours d'un essai de gonflement d'une part la vitesse de déformation équivalente varie d'un point à un autre de la calotte et d'autre part cette vitesse n'est pas constante en un point au cours de la déformation. Des lois de pression bien adaptées permettent de maintenir constant le coefficient  $m$  en un point au cours de la déformation. Nous avons établi une loi de pression qui maintient constant le coefficient  $m$  au sommet de la déformée car en ce point les taux de déformation sont plus importants et les risques de ruptures sont grands ;

— la déformée est supposée être à chaque instant un élément de sphère ;

— l'épaisseur de la calotte est supposée faible devant le rayon de la sphère  $R$ . Il en résulte que les contraintes de flexion sont considérées comme négligeables devant les contraintes tangentielles  $\sigma_\phi$  et circonférencielles  $\sigma_\theta$  ;

— la pression appliquée  $p$  est faible devant  $\sigma_\phi$  et  $\sigma_\theta$ . Il en résulte que la contrainte radiale  $\sigma_r$  peut être négligée.

Les conditions aux limites imposent une déformation nulle suivant un parallèle au niveau de l'encastrement :  $\varepsilon_{\theta_N} = 0$ .

L'équation d'équilibre d'un élément de calotte de révolution autour d'un axe  $z$  s'écrit :

$$\sigma_{\phi_1} = \frac{pR_1}{2S_1} \quad (3)$$

**TECHNIQUES DU CALCUL.** — L'analyse adimensionnelle du problème est réalisée à partir des grandeurs de références suivantes :

Le rayon d'encastrement  $r_0$ , la contrainte initiale équivalente au sommet de la calotte  $\bar{\sigma}_0$ , le temps  $t^*$

caractéristique du matériau utilisé et de la contrainte  $\sigma_0$ ,

$$t^* = \frac{2}{C \bar{\sigma}_0^n}.$$

Il est alors possible de définir des variables de dimension un :

$$R_+ = \frac{R}{r_0}; \quad S_{i+} = \frac{S_i}{r_0}; \quad h_{i+} = \frac{h_i}{r_0};$$

$$h'_i = \frac{h'_i}{r_0}; \quad a_{i+} = \frac{a_i}{r_0^2}; \quad \alpha_{i+} = \frac{\alpha_i}{r_0^2};$$

$$v_{i+} = \frac{v_i}{r_0^3}; \quad \sigma_{i+} = \frac{\sigma_{\phi_i}}{\sigma_0}; \quad p_+ = \frac{p}{\sigma_0};$$

$$t_+ = \frac{t}{t^*}.$$

Pour des commodités de calcul nous regrouperons différents termes et poserons :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{\phi_i}}{\sigma_{\theta_i}}; \quad \dot{R} = \frac{1}{R_+} \cdot \frac{dR_+}{dt_+}$$

$$\dot{a}_i = \frac{1}{a_{i+}} \cdot \frac{da_{i+}}{dt_+};$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_{i+}} \cdot \frac{d\alpha_{i+}}{dt_+};$$

$$\dot{\Phi}_i = \cotg \Phi_i \cdot \frac{d\Phi_i}{dt_+}.$$

Avec les présentes notations, la loi de comportement (1) s'exprime par les relations :

$$\dot{a}_i = \sigma_{i+}^n (1 + \beta_i^2 - \beta_i)^{n-1/2} (1 + \beta_i)$$

et

$$\beta_i = \frac{\dot{a}_i + \dot{R} + \dot{\Phi}_i}{2 \dot{a}_i - \dot{R} - \dot{\Phi}_i}.$$

Les relations géométriques entre les différents paramètres conduisent aux équations :

$$\dot{\Phi}_i = (\dot{\alpha}_i - 2 \dot{R}) \frac{R_+ - h'_{i+}}{2 R_+ - h'_{i+}}$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_{i+}} (\alpha_{(i-1)+} \dot{\alpha}_{(i-1)+} + a_{i+} \dot{a}_i)$$

$$\dot{R} = \dot{\Phi}_N = 0.$$

La conservation du volume s'exprime par la relation :

$$v_{i+} = a_{i+} S_{i+}.$$

La condition d'équilibre 3 suivant l'axe z devient :

$$\sigma_{\phi_{i+}} = \frac{P_+ R_+}{2 S_{i+}}.$$

L'hypothèse de sphéricité de la déformée permet d'écrire :

$$a_{i+} = 2 \pi R_+ (h'_{i+} - h'_{(i-1)+})$$

$$\alpha_{i+} = 2 \pi R_+ h'_{i+} = \sum_{j=1}^{j=i} a_{j+}$$

$$h'_{N+} = \sqrt{\frac{\alpha N}{\pi} - r_{0+}^2}.$$

Le présent problème a été analysé numériquement sur ordinateur en langage basic, la calotte est découpée en éléments  $i$  vus du centre de la sphère sous un angle  $\Phi_i - \Phi_{i-1}$  (Fig. 1). Les contraintes et la déformation sont supposées constantes dans chaque élément  $i$ . Au cours du calcul nous déterminons les vitesses de déformation de chaque élément  $i$  en fonction des contraintes appliquées et du comportement rhéologique du matériau. Le rapport des contraintes  $\beta_i$  et la vitesse de variation relative du rayon de la sphère sont déterminés à chaque instant et pour chaque élément à l'aide d'une double itération. La valeur de la contrainte suivant un méridien  $\sigma_{\phi_i}$  est calculée à chaque instant à l'aide de l'équation (3). L'évolution de la surface  $a_{i+}$  des différents éléments  $i$  en fonction du temps est ensuite déterminée en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

**Annexe II. — ÉTAT DES CONTRAINTES EN DIFFÉRENTS POINTS DE LA DÉFORMÉE POUR DIFFÉRENTES VALEURS DU COEFFICIENT  $m$ .** — L'évolution de l'état des contraintes dans les pièces a été déterminée en fonction de la déformation et du coefficient rhéologique  $m$ . Le rapport de la contrainte tangentielle rapportée à la contrainte circonférentielle a été calculé en différents points de la déformée en fonction de l'état de déformation pour un coefficient  $m$  égal à 0,5 (Fig. 11). Sur la figure 12 ce même rapport de contrainte

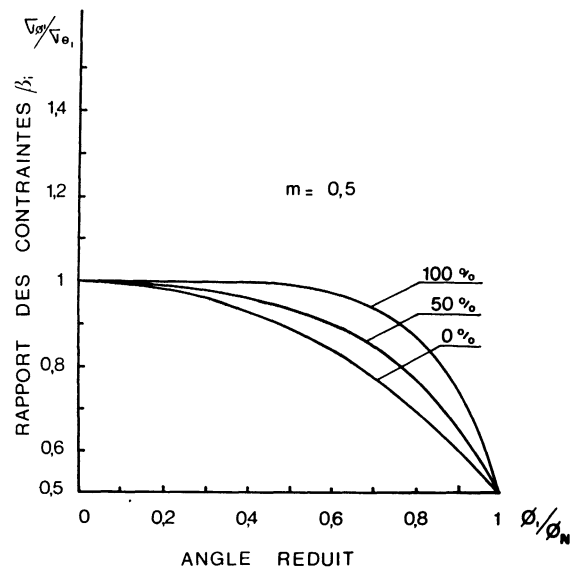


FIG. 11. — Evolution théorique du rapport des contraintes  $\beta_i$  en fonction de la position sur le méridien repéré par l'angle  $\Phi_i$  rapporté à l'angle  $\Phi_N$  pour  $m$  égale à 0,5 et à trois étapes de la déformation.

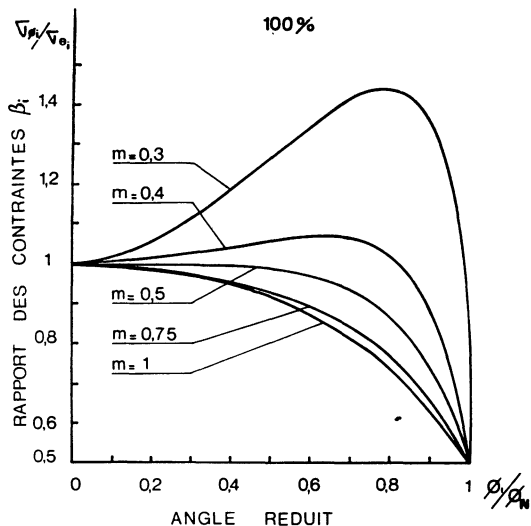


FIG. 12. — Evolution théorique du rapport des contraintes  $\beta_i$  en fonction de sa position sur le méridien repéré par l'angle  $\Phi_i$  rapporté à l'angle  $\Phi_N$  pour différentes valeurs du coefficient  $m$  et lorsque la demi-sphère est atteinte (100 % de déformation en surface).

est donné lorsque la demi-sphère est atteinte pour différentes valeurs du coefficient  $m$ . On constate qu'au sommet et à la base, le rapport est respectivement égal à 1 et à 0,5. Cette dernière valeur est en accord avec les conditions aux limites imposées par l'encastrement. Une analyse simple montre que l'hypothèse de Holt est justifiée lorsque le rapport des contraintes est égal à 1. On remarque sur les deux figures précédentes que cette condition n'est valable que dans une zone très réduite de la déformée.

**Annexe III. — ANALYSE RHÉOLOGIQUE DU GONFLEMENT.** — La déformation des tôles en alliage PbSn a été contrôlée au cours du thermoformage en photographiant des repères collés suivant un méridien. Il a été vérifié que la présence de ces repères n'a pas d'influence sur la déformation. La loi de variation de la pression appliquée est déduite d'une analyse géométrique des déformations qui rend approximativement constante la contrainte équivalente au sommet.

La déformation équivalente  $\bar{\epsilon}_1$  au sommet est représentée en fonction du temps (Fig. 13). La pente de ces courbes représente la vitesse de déformation, on constate que cette pente est variable pour les essais effectués avec une contrainte égale à 1 et 2 da N/mm<sup>2</sup>. Ceci est expliqué par le fait que l'hypothèse géométrique sur les déformations n'est pas entièrement vérifiée. Dans ces deux cas l'épaisseur réelle au sommet est supérieure à l'épaisseur prévue, il en résulte que la contrainte réelle dans le matériau est inférieure à la contrainte imposée. Cette variation de contrainte entraîne une variation de la vitesse de déformation au cours de l'essai. En corrigeant ces courbes il est néanmoins possible de tracer pour ce matériau la vitesse de déformation équivalente en fonction de la

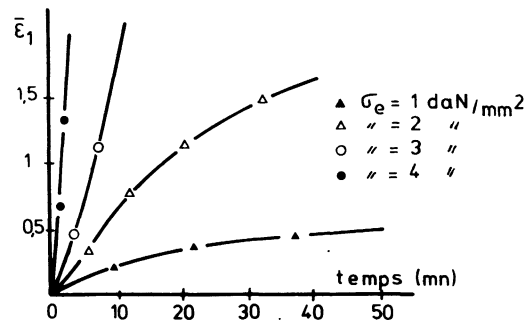


FIG. 13. — Variations expérimentales de la déformation équivalente au sommet en fonction du temps de gonflement de tôle d'alliage eutectique PbSn à l'ambiante lorsqu'une loi de pression du type géométrique est appliquée.

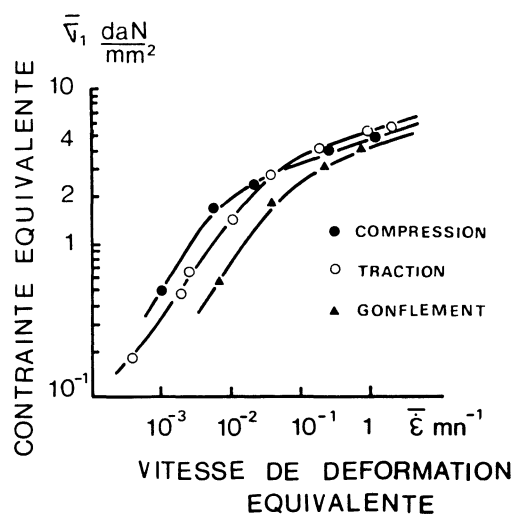


FIG. 14. — Variations de la contrainte équivalente en fonction de la vitesse de déformation équivalente pour trois types d'essais de déformation.

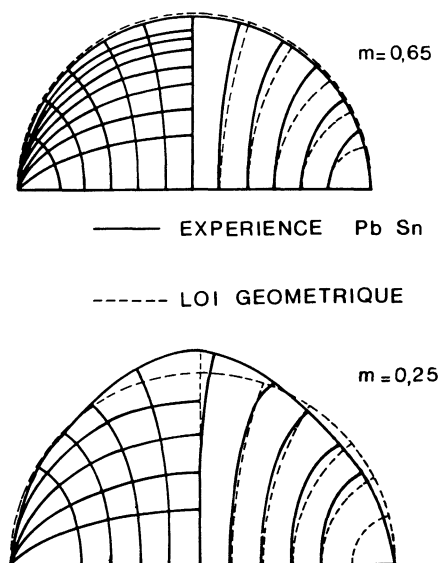


FIG. 15. — Trajectoires déduites de la loi géométrique et trajectoires expérimentales obtenues au cours du gonflement de tôles d'alliage eutectique PbSn à l'ambiante.

contrainte équivalente (Fig. 14). Sur cette figure les résultats issus des essais de gonflement sont comparés à ceux obtenus au cours d'essais de traction et de compression sur le même matériau. On constate que les courbes ont même allure générale. Les écarts peuvent être imputés à la différence de structure des éprouvettes : les éprouvettes de traction et de compression sont obtenues par extrusion avec des taux de réduction différents, les éprouvettes de gonflement sont des tôles obtenues par laminage.

La superposition des photographies prises lors des

essais de gonflement permet de tracer les trajectoires de déformation (Fig. 15). Ces trajectoires sont comparées à celles déterminées en suivant l'hypothèse géométrique [11]. On constate bien que les trajectoires sont fonction du coefficient  $m$ , résultat en accord avec la dépendance de la répartition des épaisseurs de la calotte à ce même coefficient. De plus cette dernière figure montre que l'hypothèse de déformée sphérique adoptée lors du calcul est acceptable lorsque la déformation procède sans striction localisée ( $m = 0,65$ ).

#### Bibliographie

- [1] WOO, D. M., *Int. J. Mech. Sci.* **6** (1964) 303.
- [2] STORAKERS, B., *Int. J. Mech. Sci.* **8** (1966) 619.
- [3] BAUDELET, B., Mémoires Scientifiques, *Revue de Métallurgie*, fév. 1975 p. 101.
- [4] HESTBEER, J., LANGER, E. W., ROSEN, A., *J. Inst. Met.* **99** (1971) 306.
- [5] AL-NAIB, T. Y. M., DUNCAN, J. L., *Int. J. Mech. Sci.* **12** (1970) 463.
- [6] THOMSEN, T. H., HOLT, D. L., BACKOFEN, W. A., *Met. Engin. Quat.* **11** (1970) 1.
- [7] HOLT, D. L., *Int. J. Mech. Sci.* **12** (1970) 491.
- [8] JOVANE, F., *Int. J. Mech. Sci.* **6** (1964) 303.
- [9] CORNFIELD, G. C., JOHNSON, R. H., *Int. J. Mech. Sci.* **12** (1970) 479.
- [10] BELK, J. A., *Int. J. Mech. Sci.* **17** (1975) 505.
- [11] HILL, R., *Phil. Mag.* **41** (1950) 1113.
- [12] AVERY, W. A., BACKOFEN, *Trans. A. S. M.* **58** (1965) 551.
- [13] ZEHR, S. W., BACKOFEN, W. A., *Trans. A. S. M.* **61** (1968) 300.
- [14] WU, K. C., LOWRIE, R. E., *Met. Engin. Quat.* **13** (1972) 25.
- [15] LECHTEN, J. P., Thèse de Spécialité Metz, janv. 1976.
- [16] SUERY, M., BAUDELET, B., *J. Mat. Sci.* **8** (1973) 363.