



**HAL**  
open science

## Diverses résonances de croisement de niveaux sur des atomes pompés optiquement en champ nul. I. Théorie

C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, F. Laloë

► **To cite this version:**

C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, F. Laloë. Diverses résonances de croisement de niveaux sur des atomes pompés optiquement en champ nul. I. Théorie. *Revue de Physique Appliquée*, 1970, 5 (1), pp.95-101. 10.1051/rphysap:019700050109500 . jpa-00243381

**HAL Id: jpa-00243381**

**<https://hal.science/jpa-00243381>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## DIVERSES RÉSONANCES DE CROISEMENT DE NIVEAUX SUR DES ATOMES POMPÉS OPTIQUEMENT EN CHAMP NUL

### I. THÉORIE

Par C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC, S. HAROCHE et F. LALOË,  
Faculté des Sciences, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure, Paris (France).

**Résumé.** — La lumière absorbée par une vapeur atomique soumise à un pompage optique transversal varie de manière résonnante lorsqu'on balaie le champ magnétique statique au voisinage du point de croisement en champ nul des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental (effet Hanle).

Des résonances analogues apparaissent lorsqu'on effectue le pompage optique transversal de la vapeur atomique dans un champ modulé en amplitude (résonances paramétriques).

La très grande finesse des raies ainsi observées sur les atomes alcalins les rend très intéressantes pour la détection et la mesure des champs magnétiques très faibles. On discute les propriétés de ces deux types de résonances et on met en évidence les avantages qu'il y a à utiliser les résonances paramétriques.

**Abstract.** — The light absorbed by an atomic vapour in a transverse optical pumping experiment exhibits resonant variations when the static magnetic field is swept around the zero field value corresponding to the crossing of the ground state Zeeman sublevels (Hanle effect).

Resonances of the same kind also appear when the transverse pumping is done in an amplitude modulated magnetic field (parametric resonances).

These resonances are extremely narrow when observed on alkali vapors and therefore they are of great interest for the detection and measurement of very weak magnetic fields. The characteristics of the two types of resonances are discussed and the advantages of the parametric resonances are emphasized.

**Introduction.** — La lumière absorbée ou diffusée par un atome varie de façon résonnante lorsqu'on balaie le champ magnétique statique au voisinage d'un point de croisement de deux sous-niveaux Zeeman de cet atome. Ce phénomène porte le nom « d'effet Hanle » [1] lorsqu'il s'agit du point de croisement en champ nul de deux sous-niveaux Zeeman d'un état excité; « d'effet Franken » [2] lorsque les deux sous-niveaux excités appartiennent à des niveaux hyperfins différents, le croisement ayant lieu alors en champ non nul.

Des résonances de même nature, beaucoup plus fines sont observables aux points de croisement de deux sous-niveaux de l'état fondamental d'atomes pompés optiquement, en particulier au voisinage du champ nul [3]. La finesse de ces résonances les rend très intéressantes pour la détection et la mesure de champs très faibles. Nous présentons une théorie de ces résonances et analysons leurs caractéristiques : largeur, intensité, conditions d'observation.

Nous étudions également un autre type de résonances très analogues aux précédentes, apparaissant lorsqu'on effectue le pompage optique transversal d'une vapeur atomique dans un champ magnétique modulé en amplitude [4]. Les caractéristiques de ces résonances les rendent encore plus intéressantes que les précédentes, en ce qui concerne l'application à la détection et la mesure de champs très faibles.

Après un bref rappel sur les équations du pompage

optique (§ A), nous étudions en détail ces deux types de résonances (§§ B et C).

**A. Rappels sur le pompage optique** [5]. — Afin de bien dégager la signification physique des phénomènes, nous prenons un modèle très simple : pompage optique sur la raie  $D_1$  d'un alcalin dont on néglige le spin nucléaire : transition  ${}^2S_{1/2} \leftrightarrow {}^2P_{1/2}$ . Les atomes étudiés n'ont alors que deux sous-niveaux Zeeman dans l'état fondamental, comme dans l'état excité. Toutes les propriétés de la vapeur atomique se décrivent simplement en termes d'orientation ou d'aimantation globale  $\mathbf{M}$  (il est possible de tenir compte de l'effet du spin nucléaire. Les conclusions importantes demeurent inchangées).

**1. POMPAGE OPTIQUE EN CHAMP RIGOREUSEMENT NUL.** — La vapeur alcaline contenue dans une cellule de résonance est éclairée, en champ nul, par un faisceau lumineux  $F$ , polarisé circulairement, se propageant le long de la direction  $Ox$ , et excitant la raie  $D_1$  de l'alcalin (*fig. 1*).

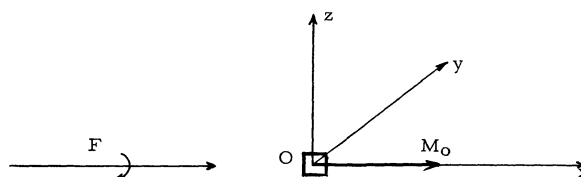


FIG. 1.

Comme la seule direction privilégiée est la direction de propagation du faisceau lumineux, il est tout indiqué de prendre Ox comme axe de quantification. La figure 2 représente les niveaux d'énergie de l'atome en champ nul (les nombres quantiques magnétiques sont relatifs à Ox) et les quatre composantes Zeeman

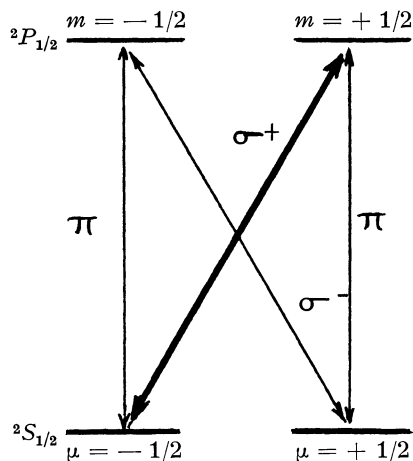


FIG. 2.

de la raie D<sub>1</sub> dont deux ont une polarisation  $\pi$  ( $\Delta m = 0$ ), les deux autres une polarisation  $\sigma^+$  ( $\Delta m = 1$ ) et  $\sigma^-$  ( $\Delta m = -1$ ).

A l'équilibre thermique, et en l'absence d'irradiation lumineuse, les deux sous-niveaux Zeeman  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  sont également peuplés et l'aimantation globale,  $\mathbf{M}$ , de la vapeur est nulle dans l'état fondamental.

L'irradiation par  $F$  fait subir aux atomes de la vapeur un « cycle de pompage optique » et rend  $\mathbf{M}$  différent de 0. Par suite de la polarisation  $\sigma^+$  de la lumière excitatrice, seuls les atomes dans le sous-niveau Zeeman  $\mu = -\frac{1}{2}$  peuvent absorber un photon et monter en  $m = +\frac{1}{2}$ . Ils retournent ensuite à l'état fondamental par émission spontanée, une certaine fraction en  $\mu = +\frac{1}{2}$ , l'autre en  $\mu = -\frac{1}{2}$ . L'effet global du cycle de pompage a été de transférer des atomes de  $\mu = -\frac{1}{2}$  à  $\mu = +\frac{1}{2}$  et de rendre ainsi inégales les populations des deux sous-niveaux  $\mu = \pm \frac{1}{2}$ , ce qui fait donc apparaître une aimantation globale non nulle le long de Ox. En d'autres termes, une certaine fraction du moment cinétique transporté par les photons est transférée aux atomes.

Si l'on négligeait tous les processus de relaxation, au bout d'un certain nombre de cycles de pompage, tous les atomes seraient transférés en  $\mu = +\frac{1}{2}$ , et l'on obtiendrait une aimantation à saturation,  $\mathbf{M}_0$ , parallèle à Ox. Désignons par  $\frac{d^{(1)}}{dt} \mathbf{M}$  la vitesse de variation de  $\mathbf{M}$  sous le seul effet du pompage optique. On peut montrer [6] que :

$$\frac{d^{(1)}}{dt} \mathbf{M} = \frac{1}{T_p} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) \quad (1)$$

$\mathbf{M}$  tend vers  $\mathbf{M}_0$  avec une constante de temps caractéristique du pompage;  $T_p$ , appelée temps de pompage, d'autant plus courte que l'intensité lumineuse est plus grande (en toute rigueur,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  tendent vers leurs valeurs limites  $M_0$ , 0, 0 avec des constantes de temps inégales. Nous négligeons pour simplifier ce caractère anisotrope de la « relaxation optique »).

Notons enfin que la lumière absorbée sur le faisceau  $F$ ,  $L_A$ , est proportionnelle au nombre d'atomes susceptibles d'absorber des photons  $\sigma^+$ , c'est-à-dire encore au nombre d'atomes dans l'état  $\mu = -\frac{1}{2}$ ; on vérifie aisément que  $L_A$  est proportionnelle à  $(M_0 - M_x)/T_p$  (l'absorption est en effet nulle quand  $M_x = M_0$ , maximum quand  $M_x = -M_0$ , proportionnelle à  $1/T_p$ , c'est-à-dire à l'intensité lumineuse).

En résumé, le pompage par  $F$  tend à faire apparaître dans la vapeur une aimantation globale parallèle à Ox. La mesure de la lumière absorbée  $L_A$  permet d'atteindre expérimentalement  $M_x$ .

2. AUTRES CAUSES D'ÉVOLUTION DE  $\mathbf{M}$ . — Sous le seul effet des processus de relaxation thermique,  $\mathbf{M}$  tend vers la valeur à l'équilibre thermique, c'est-à-dire 0, avec une constante de temps  $T$ , qui est le temps de relaxation thermique (nous supposons également pour simplifier cette relaxation isotrope). En appelant  $\frac{d^{(2)}}{dt} \mathbf{M}$  la vitesse de variation correspondante de  $\mathbf{M}$ , on a :

$$\frac{d^{(2)}}{dt} \mathbf{M} = -\frac{1}{T} \mathbf{M}. \quad (2)$$

Enfin, en présence d'un champ magnétique extérieur  $\mathbf{H}$ , statique ou variable,  $\mathbf{M}$  subit une précession décrite par :

$$\frac{d^{(3)}}{dt} \mathbf{M} = \gamma \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} \quad (3)$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique de l'état fondamental.

3. ÉQUATION D'ÉVOLUTION GLOBALE DE  $\mathbf{M}$ . — La théorie quantique du cycle de pompage optique [6] permet de montrer que l'évolution globale de  $\mathbf{M}$  sous l'effet du pompage optique par  $F$ , de la précession dans des champs appliqués, de la relaxation s'obtient simplement en ajoutant les vitesses de variation dues à ces divers processus :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \frac{d^{(1)}}{dt} \mathbf{M} + \frac{d^{(2)}}{dt} \mathbf{M} + \frac{d^{(3)}}{dt} \mathbf{M}. \quad (4)$$

La signification physique de l'équation (4) est très claire. Pour une discussion de ses conditions de validité, on se reportera à la référence [6]. En toute rigueur, il faut écrire deux équations couplées, analogues à (4) et décrivant les évolutions couplées de  $\mathbf{M}$  et  $\mathcal{M}$ , aimantations globales des états fondamental et excité. La grande différence entre les constantes de temps d'évolution  $T_p$  et  $T$  de l'état fondamental et  $\tau_R$  de l'état excité ( $\tau_R$ , durée de vie radiative) permet, pour les applications étudiées ici, de découpler ces deux équations et d'obtenir (4). On a en effet :

$$\tau_R \ll T_p, T. \quad (5)$$

En utilisant (1), (2), (3), il vient pour (4) :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \frac{1}{\tau} (\mathbf{M}'_0 - \mathbf{M}) + \gamma \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} \quad (6)$$

en posant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T} \\ \mathbf{M}'_0 &= \mathbf{M}_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{T_p} + \frac{1}{T}} \end{aligned} \right.$$

$\tau$  est une constante de temps globale qui décrit l'effet combiné de la relaxation « optique » et thermique;  $\mathbf{M}'_0$  est l'aimantation globale atteinte en régime stationnaire en champ nul. Il y a compétition entre le pompage et la relaxation.  $\mathbf{M}'_0$  est d'autant plus voisin de  $\mathbf{M}_0$  que le premier processus est important devant le second, c'est-à-dire que  $1/T_p$  est grand devant  $1/T$ .

4. ANALOGIES ET DIFFÉRENCES AVEC LES ÉQUATIONS DE BLOCH. — Les équations (6) ont la même structure que les équations de Bloch [7].

Dans les équations de Bloch,  $\mathbf{M}'_0$  est l'aimantation à l'équilibre thermique, résultant du facteur de Boltzmann, toujours parallèle au champ statique  $\mathbf{H}_0$  appliqué.

Ici nous négligeons l'orientation très faible due au facteur de Boltzmann.  $\mathbf{M}'_0$  est créée essentiellement par le pompage optique et est par suite parallèle à  $F$  (c'est-à-dire à Ox sur la figure 1).  $\mathbf{M}'_0$  n'est donc pas assujéti à être parallèle au champ statique  $\mathbf{H}_0$ . En particulier, si l'on choisit  $\mathbf{H}_0$  le long de Oz,  $\mathbf{M}'_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont perpendiculaires. Dans ce cas, on dit qu'on fait une expérience de pompage optique transversal.

Cette possibilité d'avoir  $\mathbf{M}'_0$  et  $\mathbf{H}_0$  non parallèles est typique du pompage optique et conduit à des effets intéressants comme nous le verrons par la suite.

B. Pompage optique transversal dans un champ statique très faible : effet Hanle de l'état fondamental [3]. — 1. CONDITIONS DE L'EXPÉRIENCE. — Dans cette expérience,  $F$  est toujours parallèle à Ox; le champ extérieur est un champ statique  $\mathbf{H}_0$  perpendiculaire à  $F$  (parallèle à Oz). Le pompage optique est

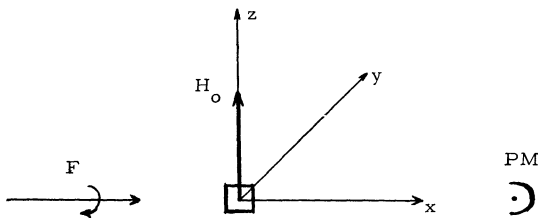


FIG. 3.

donc transversal. Un photomultiplicateur PM mesure les variations de la lumière absorbée proportionnelle à  $M_x$ .

On balaie très lentement  $H_0$  autour de la valeur 0. Quelle est la variation avec  $H_0$  du signal optique  $L_A$ , c'est-à-dire encore de  $M_x$  ?

Le problème théorique est donc le suivant : on remplace dans (6)  $\mathbf{H}$  par  $\mathbf{H}_0$ . On cherche pour chaque amplitude du champ,  $H_0$ , la solution stationnaire de (6),  $^{(s)}\mathbf{M}$ , et on étudie la variation avec  $H_0$  de  $^{(s)}M_x$ .

2. CALCUL DE LA SOLUTION STATIONNAIRE  $^{(s)}\mathbf{M}$ . — Posons :

$$\omega_0 = +\gamma H_0 \quad (7)$$

$\omega_0$  est la pulsation de Larmor dans le champ  $H_0$ . Lorsque  $\mathbf{H}_0$  est parallèle à Oz, (6) est équivalent aux trois équations suivantes dans lesquelles on a posé :

$$M_{\pm} = M_x \pm iM_y \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dM_{\pm}}{dt} &= \frac{M'_0}{\tau} - \frac{M_{\pm}}{\tau} \mp i\omega_0 M_{\pm} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dM_z}{dt} &= -\frac{M_z}{\tau} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

En égalant à 0,  $\frac{d}{dt} M_{\pm}$  et  $\frac{d}{dt} M_z$ , on obtient immédiatement la solution stationnaire :

$$\left\{ \begin{aligned} ^{(s)}M_z &= 0 \\ ^{(s)}M_{\pm} &= \frac{M'_0}{1 \pm i\omega_0 \tau} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

c'est-à-dire encore, en utilisant (8) :

$$\left\{ \begin{aligned} ^{(s)}M_x &= M'_0 \frac{1}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \\ ^{(s)}M_y &= M'_0 \frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \\ ^{(s)}M_z &= 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$^{(s)}M_z$  reste toujours nul. Les variations en fonction de  $H_0$ , plus exactement en fonction du paramètre sans dimensions  $\omega_0 \tau$ , de  $^{(s)}M_x$  et  $^{(s)}M_y$  sont représentées sur la figure 4. Ce sont celles d'une courbe d'absorption

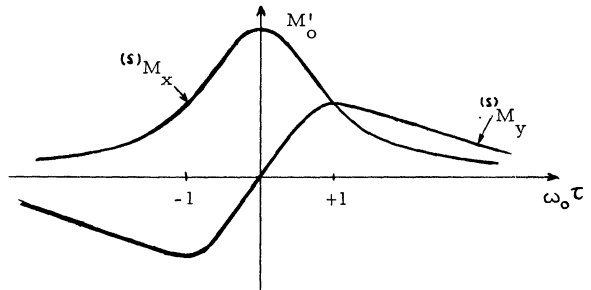


FIG. 4.

ou de dispersion de Lorentz, centrées autour du champ nul, de largeur  $\Delta(\omega_0 \tau) = 2$ , c'est-à-dire encore  $\Delta H_0 = 2/\tau$ , c'est-à-dire encore, d'après (7) :

$$\Delta H_0 = 2/\gamma \tau. \quad (13)$$

En champ nul ( $\omega_0 \tau = 0$ ),  $^{(s)}M_y$  et  $^{(s)}M_z$  sont nuls,  $^{(s)}M_x = M'_0$  : le pompage optique par  $F$  fait apparaître en champ nul une aimantation parallèle à  $F$ , comme nous l'avons déjà vu plus haut (§ A.1). En champ fort, ( $\omega_0 \tau \gg 1$ ), les trois composantes de  $^{(s)}\mathbf{M}$  sont nulles : le pompage optique transversal en champ statique fort ne crée aucune orientation. La transition entre ces deux cas limites se fait sur un domaine de champ de largeur donnée par (13).

3. INTERPRÉTATION PHYSIQUE DU RÉSULTAT. — Le pompage optique par  $F$  crée en permanence des dipôles atomiques qui pointent dans la direction Ox de  $F$ . Aussitôt après avoir été orientés dans cette direction, les dipôles se mettent à précesser autour de  $H_0$

dans le plan  $xOy$  à la vitesse angulaire  $\omega_0$  et sont détruits avec une constante de temps globale  $\tau$  soit par suite de collisions (relaxation thermique), soit parce que, absorbant un photon, ils quittent l'état fondamental (relaxation optique).

A un instant donné,  $t = 0$ , représentons dans le plan  $xOy$  l'ensemble des dipôles atomiques dans l'état fondamental. Il y a ceux qui viennent juste d'être pompés par  $F$  et qui pointent donc le long de  $Ox$  (fig. 5). Il y a ceux qui ont été pompés à l'instant  $-t$

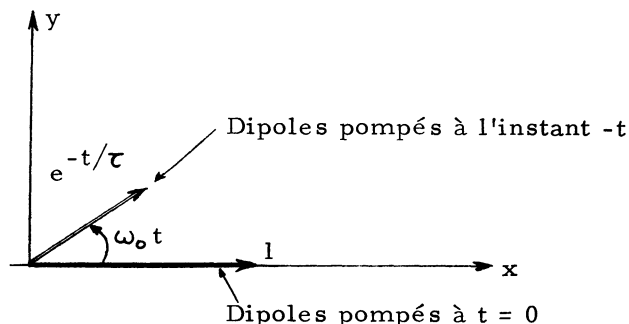


FIG. 5.

( $t > 0$ ) et qui n'ont pas été encore détruits : ils ont donc tourné par rapport à leur direction initiale, c'est-à-dire  $Ox$ , d'un angle  $\omega_0 t$  et leur nombre a diminué par suite de la relaxation par un facteur  $\exp(-t/\tau)$ . Pour obtenir l'aimantation globale à  $t = 0$ , il faut sommer vectoriellement tous ces petits vecteurs pour  $-t$  variant de 0 à  $-\infty$ .

La figure 6 représente l'ensemble des dipôles dans le plan  $xOy$  pour les trois cas  $\omega_0 \tau \ll 1$ ,  $\omega_0 \tau \sim 1$ ,  $\omega_0 \tau \gg 1$ .

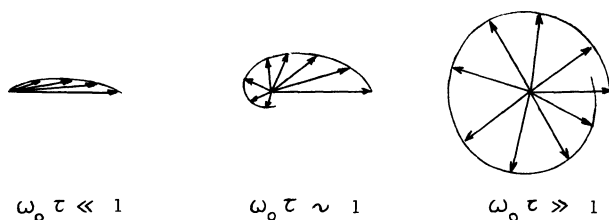


FIG. 6.

Si  $H_0$  est très faible ( $\omega_0 \tau \ll 1$ ), tous les vecteurs sont parallèles à  $Ox$ . La résultante a sa valeur maximale,  $M'_0$ , parallèle à  $Ox$ .

Dès que  $H_0$  devient non nul, les vecteurs ne sont plus parallèles et  $^{(s)}M_x$  diminue. Par contre,  $^{(s)}M_y$  devient différent de 0. On voit d'ailleurs que si l'on change de signe  $H_0$ , l'angle de rotation  $\omega_0 t$  change de signe et par suite aussi  $^{(s)}M_y$ , ce qui explique la forme de dispersion de  $^{(s)}M_y$  (fig. 4).

Lorsque  $H_0$  est suffisamment grand ( $\omega_0 \tau \gg 1$ ), pendant le temps  $\tau$ , les dipôles ont le temps de faire plusieurs tours; les différents vecteurs à sommer sont alors répartis de façon isotrope dans le plan  $xOy$ , et l'aimantation globale est nulle :  $^{(s)}M_x = ^{(s)}M_y = 0$ .

On comprend ainsi physiquement les variations de  $^{(s)}M_x$  et  $^{(s)}M_y$  représentées sur la figure 4. Elles résultent du fait que le pompage de  $F$  le long de  $Ox$  est contrarié par la précession de Larmor autour de  $H_0$ , qui lui est perpendiculaire. On voit toute l'importance

du caractère transversal du pompage optique par rapport à  $H_0$  : c'est ce caractère transversal qui est responsable de la variation résonnante de  $^{(s)}M_x$  et  $^{(s)}M_y$  autour de  $H_0 = 0$ . Si le pompage était longitudinal, c'est-à-dire si  $H_0$  était appliqué le long de  $Ox$ , les dipôles pompés par  $F$  le long de  $Ox$  resteraient immobiles, quel que soit  $H_0$ , et l'on aurait pour toute valeur du champ  $^{(s)}M_x = M'_0$ ,  $^{(s)}M_y = ^{(s)}M_z = 0$ .

4. ORDRE DE GRANDEUR DE LA LARGEUR DES RÉSONANCES. — La largeur  $\Delta H_0$  est donnée par (13). Nous allons envisager deux types d'atomes pouvant être pompés optiquement dans l'état fondamental : les alcalins et les isotopes impairs de Hg et Cd.

Dans les deux cas, on sait réaliser des cellules de résonance permettant d'obtenir des temps de relaxation  $\tau$  égaux ou supérieurs à 1 s; pour les alcalins, en utilisant des cellules recouvertes intérieurement d'un enduit paraffiné hydrogéné ou deutéré [8]; pour Hg et Zn des cellules en silice fondue (en chauffant les parois de la cellule on peut dans ce dernier cas atteindre des  $\tau$  de l'ordre de la minute [9]). Notons enfin que la longueur de ces temps de relaxation permet d'opérer en l'absence de gaz tampon, ce qui assure, par suite du va-et-vient rapide des atomes entre les parois, un moyennage par le mouvement des inhomogénéités statiques du champ.

Pour Hg et Cd, le paramagnétisme dans l'état fondamental est purement nucléaire : on a  $\gamma/2\pi \sim 1$  kHz/gauss; de sorte qu'en prenant  $\tau \sim 1$  s, on obtient, d'après (13),  $\Delta H_0$  de l'ordre du milligauss. Pour les alcalins, le paramagnétisme est électronique,  $\gamma$  est donc environ 1 000 fois plus grand, et par suite  $\Delta H_0$  1 000 fois plus petit, c'est-à-dire de l'ordre du microgauss. On voit ainsi que l'effet Hanle dans l'état fondamental donne des raies de résonance extrêmement fines.

Remarque. — La formule (13) est également valable pour l'effet Hanle de l'état excité;  $\gamma$  a le même ordre de grandeur que pour l'état fondamental des alcalins; par contre,  $\tau$  doit alors être remplacé par la durée de vie radiative  $\tau_R$  de l'état excité, de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$  s, ce qui entraîne une largeur  $\Delta H_0$  beaucoup plus grande, de l'ordre du gauss.

Dans le domaine de champ où se produit l'effet Hanle de l'état fondamental, on peut donc complètement négliger la variation des signaux optiques due à l'effet Hanle de l'état excité. C'est ce type d'argument qui permet de découpler les équations d'évolution des magnétisations des états fondamental et excité; qui permet aussi de considérer le cycle de pompage optique (qui dure un temps  $\tau_R$ ) comme instantané vis-à-vis de  $\tau$  et des périodes de Larmor associées aux champs très faibles dans lesquels se produit l'effet Hanle de l'état fondamental.

C. Pompage optique transversal dans un champ magnétique modulé en amplitude (résonances paramétriques) [4]. — 1. CONDITIONS DE L'EXPÉRIENCE. — Elles sont identiques à celles de la figure 3, à ceci près qu'on ajoute maintenant au champ statique  $H_0$  un champ oscillant  $H_1 \cos \omega t$ , parallèle à  $H_0$ , donc à  $Oz$ , ce qui a pour effet de moduler en amplitude le champ statique.

Notons tout de suite que l'on prend  $\omega \gg 1/\tau$ . En d'autres termes, il s'agit d'une modulation rapide du champ

que les spins ne peuvent suivre adiabatiquement (et non d'une modulation lente destinée à fournir un signal modulé, proportionnel, si  $H_1$  est suffisamment petit, à la dérivée du signal étudié dans le § B précédent).

Posons :

$$\omega_1 = \gamma H_1. \quad (14)$$

Les équations d'évolution de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  sont identiques aux équations (9) et (10) à condition de remplacer  $\omega_0$  par  $\omega_0 + \omega_1 \cos \omega t$ . Il vient :

$$\left\{ \frac{d}{dt} M_{\pm} = \frac{M'_0}{\tau} - \frac{M_{\pm}}{\tau} \mp i(\omega_0 + \omega_1 \cos \omega t) M_{\pm} \right. \quad (15 a)$$

$$\left. \frac{d}{dt} M_z = -\frac{M_z}{\tau} \right. \quad (15 b)$$

La présence de  $\cos \omega t$  au deuxième membre de (15 a) entraîne qu'il faut maintenant chercher une solution, non pas stationnaire, mais forcée, de (15 a) : en d'autres termes, oscillant aux diverses harmoniques  $p\omega$ , de  $\omega$ .

2. CALCUL DE LA SOLUTION EN RÉGIME FORCÉ. — La solution de (15 b) est toujours  $M_z = 0$ . On peut récrire l'équation donnant  $\frac{d}{dt} M_{\pm}$  sous la forme :

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + \omega_1 \cos \omega t) \right] M_{\pm} = \frac{M'_0}{\tau}. \quad (16)$$

La solution de l'équation (16) sans second membre s'écrit :

$$M_{\pm}(t) = \lambda e^{-t/\tau} e^{-i(\omega_0 t + \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t)}. \quad (17)$$

Reportons maintenant (17) dans (16) en considérant  $\lambda$  comme une fonction de  $t$  (méthode de la variation des constantes). Il vient l'équation différentielle suivante pour  $\lambda$  :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{M'_0}{\tau} e^{t/\tau} e^{i\omega_0 t} e^{i\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}. \quad (18)$$

Pour intégrer (18), on remarque que  $e^{i\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$  est une fonction périodique de  $t$  (qui intervient toujours dans les problèmes de modulation de fréquence) et dont on connaît le développement en série de Fourier :

$$e^{\pm i\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{\pm i n \omega t}. \quad (19)$$

Dans cette expression,  $J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  lorsque  $n$  est un entier  $\geq 0$ . Lorsque  $n$  est un entier négatif, on a posé :

$$J_n = (-1)^n J_{-n}. \quad (20)$$

En portant (19) dans (18), il vient :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{M'_0}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{\left[ \frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + n\omega) \right] t} \quad (21)$$

(21) s'intègre immédiatement pour donner :

$$\lambda = \frac{M'_0}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{\left[ \frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + n\omega) \right] t}}{\frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + n\omega)} \quad (22)$$

(dans (22), on prend la constante d'intégration égale à 0, car cette constante reportée dans (17) donne une contribution qui disparaît au bout d'un temps  $\tau$ , et

n'intervient donc pas dans la solution forcée). En utilisant (19), on peut récrire (17) sous la forme :

$$M_{\pm}(t) = \lambda \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{-\left[ \frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + q\omega) \right] t}. \quad (23)$$

En reportant (23) dans (22) et en posant  $n - q = p$ , il vient finalement :

$$M_{\pm}(t) = \frac{M'_0}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{n-p} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{\frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + n\omega)} e^{ip\omega t} \quad (24)$$

c'est-à-dire encore :

$$\frac{M_{\pm}(t)}{M'_0} = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_p e^{ip\omega t} + A_{-p} e^{-ip\omega t}) \quad (25)$$

avec :

$$A_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{1 + i(\omega_0 + n\omega) \tau} \quad (26)$$

$$A_{\pm p} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{n \mp p} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{1 + i(\omega_0 + n\omega) \tau}. \quad (27)$$

Comme, d'après (9),  $M_x = \mathcal{R}e M_{\pm}$ ,  $M_y = \mathcal{I}m M_{\pm}$ , on en déduit les résultats suivants pour  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$ .

$M_x(t)$  et  $M_y(t)$  (et par suite aussi le signal optique  $L_A$ ) sont, en régime forcé, des fonctions périodiques de  $t$ , de période  $2\pi/\omega$  dont on peut calculer à partir de (25) le développement en série de Fourier. Au moyen d'un amplificateur sélectif, on peut isoler dans le signal optique  $L_A$  la modulation à l'harmonique  $p\omega$  de  $\omega$  qui dépend, comme on le voit sur (25), de  $A_p$  et  $A_{-p}$ .

On voit sur les dénominateurs de (26) et (27) que chaque modulation  $p\omega$  du signal subit des variations résonnantes lorsqu'on balaie le champ autour des valeurs telles que  $\omega_0 + n\omega = 0$ . Comme  $n$  est un entier positif négatif ou nul, on voit que chaque modulation  $p\omega$  résonne pour  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_0 = \pm \omega$ ,  $\omega_0 = \pm 2\omega \dots$  La largeur de ces résonances est la même quel que soit  $n$ , et vaut  $\Delta\omega_0 = 2/\tau$ , ou encore  $\Delta H_0 = 2/\gamma\tau$ . L'intensité de la résonance d'ordre  $n$ , détectée sur l'harmonique d'ordre  $p$ , est entièrement calculable à partir de  $J_n \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)$ ,  $J_{n \pm p} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)$ .

Bien que les résonances d'ordre  $n \neq 0$  soient intéressantes et aient fait l'objet d'études détaillées, nous allons nous limiter dans ce qui suit à l'étude de la résonance en champ nul ( $n = 0$ ).

3. ÉTUDE DE LA RÉSONANCE  $n = 0$ . — Au voisinage du champ nul,  $\omega_0 \tau \lesssim 1$ , on peut dans les sommes sur  $n$  qui figurent dans (26) et (27) négliger la variation avec  $\omega_0$  des termes  $n \neq 0$  par rapport à celle du terme  $n = 0$ . La partie intéressante de  $A_0$  et  $A_{\pm p}$  s'écrit alors :

$$A_0^{(0)} = \frac{J_0^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{1 + i\omega_0 \tau} \quad (28)$$

$$A_{\pm p}^{(0)} = \frac{J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{\mp p} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{1 + i\omega_0 \tau}. \quad (29)$$

En reportant (28) et (29) dans (25), en utilisant (20), et le fait que  $M_x = \Re M_+$ , on obtient le résultat suivant pour le comportement de  $M_x(t)$  au voisinage du champ nul.

Au voisinage de  $\omega_0 = 0$ , les diverses modulations  $p\omega$  contenues dans le mouvement de  $M_x(t)$  résonnent.

Lorsque  $p$  est pair, l'expression de la modulation  $p\omega$  est la suivante :

$$M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_p \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) \frac{1}{1 + (\omega_0 \tau)^2} \cos p\omega t. \quad (30)$$

La résonance a alors la forme d'une courbe d'absorption, de largeur  $2/\gamma\tau$ , d'intensité  $M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_p \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)$ .

Lorsque  $p$  est impair, on a pour la modulation  $p\omega$  :

$$M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_p \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) \frac{\omega_0 \tau}{1 + (\omega_0 \tau)^2} \sin p\omega t. \quad (31)$$

La résonance a la forme d'une courbe de dispersion de largeur  $2/\gamma\tau$ , d'intensité  $M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_p \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)$ .

Pour  $M_y(t)$ , les conclusions sont inversées, les formes d'absorption et de dispersion étant respectivement associées aux valeurs impaires et paires de  $p$ .

4. AVANTAGES DE CES RÉSONANCES PAR RAPPORT A CELLES ÉTUDIÉES AU § B. — Les résonances en champ nul que nous venons de décrire possèdent des propriétés très intéressantes que nous passons maintenant en revue.

a) Elles apparaissent sur des modulations. On peut donc utiliser les techniques d'amplification sélective et de détection synchrone et améliorer considérablement le rapport signal sur bruit.

b) La résonance apparaît « sur fond noir ». Dès que  $\omega_0 \gg 1/\tau$ , les modulations disparaissent. Au contraire, dans l'expérience décrite en B, le signal continu sur le PM existe toujours quel que soit  $\omega_0$ ; il ne fait que varier autour de  $\omega_0 = 0$ . Les dérivées lentes de l'intensité lumineuse sont donc beaucoup moins gênantes dans l'expérience décrite ici.

c) On pourrait songer dans l'expérience décrite en B à obtenir des signaux modulés en modulant lentement le champ  $H_0$  autour de chaque valeur. Comme  $\tau \sim 1$  s, les fréquences de modulation devraient être inférieures à 1 Hz, ce qui n'est pas une gamme de fréquence commode pour les détections synchrones.

Ici, au contraire, il s'agit d'une modulation rapide comme nous l'avons déjà souligné plus haut :  $\omega \gg 1/\tau$ . En fait, on peut travailler à  $\omega/2\pi \sim 500$  Hz, ce qui est une gamme très commode. De plus, l'expérience montre que le bruit des sources lumineuses est beaucoup moins important autour de 500 Hz qu'autour de 1 Hz.

d) Sur les modulations impaires, la forme des résonances est celle d'une *courbe de dispersion pure*. Le signal est donc, pour  $\omega_0 \tau \ll 1$ , directement proportionnel au champ statique appliqué.

e) La radiofréquence  $H_1 \cos \omega t$  n'élargit à aucun niveau les raies. On a toujours  $\Delta H_0 = 2/\gamma\tau$ .

f) Il est facile de voir que  $J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_p \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)$  présente des maxima lorsqu'on fait varier  $\frac{\omega_1}{\omega}$ . Lorsqu'on se place sur un maximum, le signal devient, au premier

ordre, insensible à toute variation de  $\omega_1$  ou  $\omega$ , c'est-à-dire de l'intensité et de la fréquence du champ  $H_1 \cos \omega t$ .

5. EFFET D'UN DÉFAUT DE PARALLÉLISME ENTRE  $\mathbf{H}_0$  ET  $\mathbf{H}_1$ . — Nous avons toujours supposé jusqu'à présent  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_1 \cos \omega t$  parallèles. Nous allons étudier maintenant les conséquences d'un léger défaut de parallélisme. Supposons  $\mathbf{H}_1 \cos \omega t$  toujours aligné sur Oz; le champ statique a une composante  $H_0$  sur Oz, et des composantes  $\delta H_x$ ,  $\delta H_y$  sur Ox et Oy supposées très petites. De façon plus précise, nous posons :

$$\begin{cases} \omega_0 = \gamma H_0 \\ \delta \omega_x = \gamma \delta H_x \\ \delta \omega_y = \gamma \delta H_y \end{cases} \quad (32)$$

et nous supposons :

$$\delta \omega_x \cdot \tau, \quad \delta \omega_y \cdot \tau \ll 1. \quad (33)$$

On peut récrire les équations d'évolution de  $\mathbf{M}$  en tenant compte de  $\delta H_x$  et  $\delta H_y$ . Nous avons vu précédemment comment calculer la solution exacte de ces équations lorsque  $\delta \omega_x = \delta \omega_y = 0$ . On peut partir de cette solution *exacte* et chercher, lorsque  $\delta \omega_x$  et  $\delta \omega_y$  sont différents de 0, une solution des équations sous forme d'un développement de perturbations en puissances de  $\delta \omega_x \cdot \tau$  et  $\delta \omega_y \cdot \tau$ . Le calcul ne présente pas de difficultés considérables :

On trouve pour la modulation  $\omega$  ( $p = 1$ ), à laquelle on s'intéressera par la suite, le comportement suivant au voisinage du champ nul :

$$\begin{aligned} M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_1 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) \sin \omega t & \left[ \frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \right. \\ & \left. - J_0^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{(1 + \omega_0^2 \tau^2)^2} (\delta \omega_x^2 \tau^2 + \delta \omega_y^2 \tau^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\delta \omega_x \tau \cdot \delta \omega_y \cdot \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \right\} + \dots \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Le premier terme du crochet représente la solution calculée plus haut pour  $\delta \omega_x = \delta \omega_y = 0$ .

Les autres termes représentent les corrections en  $\delta \omega_x \tau$  et  $\delta \omega_y \tau$  à l'ordre le plus bas où elles interviennent. On voit que c'est au deuxième ordre seulement. La résonance en champ nul est donc assez peu sensible aux composantes de  $\mathbf{H}_0$  perpendiculaires à  $H_1$ .

Il est intéressant de développer (34) en puissances de  $\omega_0 \tau$ , lorsque la composante sur Oz du champ statique est également très faible. On posera alors  $\omega_0 = \delta \omega_z$ . Au deuxième ordre inclus en  $\delta \omega_z \tau$ ,  $\delta \omega_x \tau$ ,  $\delta \omega_y \tau$ , il vient :

$$\begin{aligned} M'_0 J_0 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_1 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) \sin \omega t & \left[ \delta \omega_z \cdot \tau - J_0^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right) (\delta \omega_x \cdot \tau) (\delta \omega_y \cdot \tau) + \dots \right]. \quad (35) \end{aligned}$$

On voit ainsi qu'en champ très faible la modulation  $\omega$  est, à l'ordre 1, proportionnelle à  $\delta \omega_z$  et insensible à  $\delta \omega_x$  et  $\delta \omega_y$ .

Si l'on réalise volontairement une valeur non négligeable de  $(\delta \omega_x \cdot \tau)$ , le signal devient sensible au premier ordre à  $\delta \omega_y$  et réciproquement. Cette propriété est très utile, comme on le verra dans la prochaine communication, pour compenser les trois composantes d'un champ très faible.

En conclusion, nous voyons que le pompage optique transversal d'une vapeur atomique dans un champ statique ou modulé en amplitude permet d'obtenir des résonances extrêmement fines centrées autour de

la valeur 0 du champ. Nous avons étudié en détail les propriétés et les caractéristiques de ces résonances. Leur application à la détection ou la mesure de champs très faibles est décrite dans la communication suivante.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] HANLE (W.), *Z. Phys.*, 1924, **30**, 93.
- [2] COLEGROVE (F. D.), FRANKEN (P. A.), LEWIS (R. R.) et SANDS (R. H.), *Phys. Rev. Letters*, 1959, **3**, 420. Pour une interprétation des résonances de croisements de niveaux en termes d'interférences entre deux amplitudes de diffusion, voir aussi COHEN-TANNOUJJI (C.), *Cargese Lectures in Physics*, Gordon and Breach, 1967, 366.
- [3] LEHMANN (J. C.) et COHEN-TANNOUJJI (C.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1964, **258**, 4463.
- [4] POLONSKY (N.) et COHEN-TANNOUJJI (C.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **260**, 5231. Pour les états excités, voir aussi FAVRE (C. J.) et GENEUX (E.), *Phys. Letters*, 1964, **8**, 190 ; ALEXANDROV (E. B.), CONSTANTINOV (O. B.), PERELI (B. I.) et KHODOVOY (B. A.), *J.E.T.P.*, 1963, **45**, 503.
- [5] Voir par exemple références dans : *Progress in Optics*, vol. V, « Optical Pumping » par COHEN-TANNOUJJI (C.) et KASTLER (A.), North-Holland Publishing Company, 1966.
- [6] COHEN-TANNOUJJI (C.), Thèse, Paris, 1962; *Ann. de Phys.*, 1962, **7**, 423 et 469.
- [7] Voir par exemple ABRAGAM (A.), « The principles of nuclear magnetism », Oxford University Press, 1961.
- [8] BOUCHIAT (M. A.) et BROSEL (J.), *Phys. Rev.*, 1966, **147**, 41.
- [9] CAGNAC (B.) et LEMEIGNAN (G.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1967, **264**, 1850.