



HAL
open science

Analyse de la fonction de transfert générale d'un amplificateur à choppers

Hervé Aubert, M. Bazilinski

► **To cite this version:**

Hervé Aubert, M. Bazilinski. Analyse de la fonction de transfert générale d'un amplificateur à choppers. *Revue de Physique Appliquée*, 1967, 2 (4), pp.301-308. 10.1051/rphysap:0196700204030100 . jpa-00242809

HAL Id: jpa-00242809

<https://hal.science/jpa-00242809>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE DE LA FONCTION DE TRANSFERT GÉNÉRALE D'UN AMPLIFICATEUR A CHOPPERS

Par H. AUBERT et M. BAZILINSKI.

Résumé. — La fonction de transfert d'un ensemble d'amplification à choppers présente, dans la gamme d'utilisation, une déformation inhérente au principe de cet appareil, même si l'amplificateur proprement dit est supposé parfait, phénomène dont il semble que la théorie n'avait pas été élaborée.

Par un passage à la limite laissant valables les conclusions pratiques, on montre que, bien que les processus mis en jeu soient essentiellement non linéaires, cette fonction obéit au principe de superposition. On la met sous la forme d'un produit dont les trois facteurs représentent respectivement le gain à fréquence nulle, le gain relatif complexe filtre non compris et l'effet du filtre.

On en déduit des formules permettant de choisir au mieux les caractéristiques des composants en vue de minimiser ce défaut particulièrement gênant dans les travaux de recherche exigeant une réponse transitoire aussi fidèle que possible.

On montre en outre que l'imperfection de l'amplificateur proprement dit entraîne un décalage entre l'abscisse du minimum d'amplitude et celle du passage à zéro de la phase.

Les formules obtenues se simplifient beaucoup dans nombre de cas pratiques en donnant des approximations en général suffisantes.

Abstract. — The transfer function of a chopper-modulated amplifier is derived by the authors. The expressions obtained show the possible significant variations of amplitude and phase within the usable frequency range even if the amplifying component is practically perfect.

The mathematical analysis of this behavior does not appear to have been made in detail at the present time.

It is shown that despite the nonlinearity of the current versus time relationship, the principle of superposition may be applied to the transfer function, which can be written in the form of a product of three factors. These factors represent respectively : the gain at zero frequency, the complex gain without filter, and the effect of the filter.

Formulae for optimization of values of different components are given for improvement of transient response. It is shown, moreover, how the imperfections of the amplifying component affect the characteristics of amplitude and phase.

The formulae obtained can be simplified in most practical cases, generally giving satisfactory approximations.

Généralités. — UTILITÉ DE L'ÉTUDE. — Malgré les progrès technologiques récents concernant la dérive des amplificateurs continus proprement dits, l'usage des choppers, mécaniques, optiques ou par transistors à effet de champ par exemple, est encore nécessaire dans bien des cas.

Or, un raisonnement hâtif assimilant la modulation et la démodulation par choppers à de simples déplacements du spectre, tels qu'on les pratique en téléphonie à courants porteurs, ne rend pas compte d'un phénomène gênant, propre au fonctionnement des choppers.

En effet, même en utilisant entre les choppers un amplificateur parfait, la fonction de transfert obtenue présente, bien en deçà de la fréquence de découpage, dans une région utile si l'on s'intéresse à la réponse transitoire, une baisse systématique du module suivie d'une remontée, accompagnées d'un déphasage assez

rapidement variable, s'annulant avec la dérivée du module. Et si l'amplificateur est imparfait cette coïncidence n'est même plus assurée.

Cet accident, qui peut limiter ou compliquer l'usage des choppers dans certaines applications, est lié aux valeurs des constantes de temps associées aux choppers, et au rapport des temps d'ouverture et de fermeture, rapport dont dépend le gain à fréquence nulle.

Il a semblé utile d'étudier ce phénomène en détail pour établir des relations dont l'emploi permettrait à l'ingénieur d'étude de minimiser ce défaut et d'optimiser son projet.

Accessoirement, cette étude montre que, bien que les processus mis en jeu soient essentiellement non linéaires, la fonction de transfert globale obéit au principe de superposition : l'ensemble du système se comporte, dans la bande utile, comme un système linéaire.

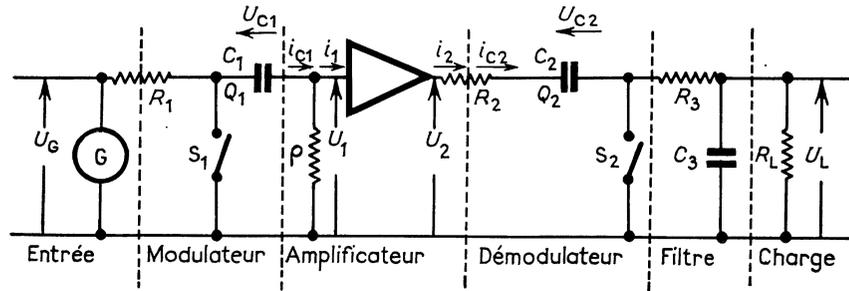


FIG. 1. — Schéma de principe de l'amplificateur à choppers.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE. — L'analyse rigoureuse, par raccordements successifs des conditions finales et initiales de deux équations distinctes, est pratiquement inextricable. Mais il est possible, parce que la fréquence de découpage peut être choisie très au-delà de la limite supérieure du spectre à amplifier, de ramener le problème à des calculs simples grâce aux artifices suivants :

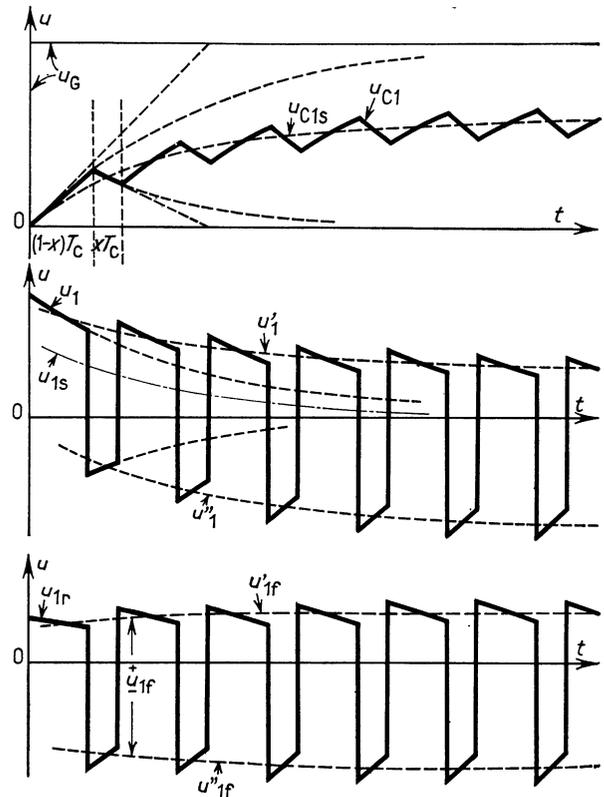
On définit, d'une façon rigoureuse par un passage à la limite, des composantes lentes et des composantes rapides, notions qui prolongent celles de composante continue et de composante alternative dans le cas du régime établi. Ces composantes lentes, ainsi que les amplitudes et les enveloppes des composantes rapides, sont alors traitées légitimement comme des fonctions continues dont les transformées de Laplace ont une expression simple. La fréquence de découpage, que l'on a fait tendre vers l'infini, ne figure plus dans les calculs. On la réintroduit seulement à la fin pour le calcul de l'ondulation résiduelle du signal de sortie.

La figure 1 donne la décomposition du dispositif en divers éléments ainsi que les conventions de signe adoptées.

La figure 2 donne, dans le cas particulier d'une tension d'entrée en échelon, l'allure des tensions obtenues aux bornes de C_1 et de ρ , et de leurs composantes. L'examen de ces courbes facilite la compréhension des définitions données plus loin.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :

$T_0 = 1/f_0$	= période de découpage,
xT_0	= durée de fermeture des choppers,
$(1-x)T_0$	= durée d'ouverture des choppers,
u_G	= tension à amplifier,
u_{C1}	= tension aux bornes de C_1 ,
Q_1	= charge de C_1 à l'instant t ,
$\Delta' Q_1$	= variation de Q_1 pendant la durée $(1-x)T_0$ de la charge,
$\Delta'' Q_1$	= variation de Q_1 pendant la durée xT_0 de la décharge,
u_1	= tension discontinue appliquée à l'entrée de l'amplificateur,
ν	= limite supérieure du spectre à amplifier.

FIG. 2. — Décomposition des signaux en composantes lentes et rapides. Exemple pour $x = 1/3$, $C_1(R_1 + \rho) = 2T_0$, $\rho/R_1 = 2$, $u_G =$ échelon unité.

f_0 étant bien supérieure à ν , le spectre total se compose de deux parties nettement séparées, couvrant respectivement :

- 1) le spectre utile allant de 0 à ν ;
- 2) l'ensemble des domaines $n f_0 \pm \nu$, où $n f_0$ désigne le $n^{\text{ième}}$ harmonique de f_0 .

On peut donc considérer chaque fonction du temps comme la somme d'une fonction à variation lente dont le spectre s'étend de 0 à ν et d'une fonction à

variation rapide possédant le reste du spectre, ce qui permet de poser :

u_{1s} = fonction continue interpolant les points d'abscisse $(n + 1/2) T_c$ et d'ordonnée $\frac{1}{T_c} \int_{nT_c}^{(n+1)T_c} u_1 dt$

(suite des centres de gravité de l'ensemble des deux arcs de courbe de chacune des périodes successives complètes) que nous appellerons composante lente de u_1 (se reporter à la figure 2),

u_{1r} = $u_1 - u_{1s}$ que nous appellerons composante rapide de u_1 ,

u'_1 = fonction continue interpolant les points d'abscisse $(n + \frac{1-x}{2}) T_c$ et d'ordonnée

$$\frac{1}{(1-x) T_c} \int_{nT_c}^{(n+1-x)T_c} u_1 dt$$

(suite des centres de gravité des arcs de courbe supérieurs seulement de chacune des périodes successives) que nous appellerons enveloppe supérieure de u_1 ,

u''_1 = fonction continue interpolant les points d'abscisse $(n + 1 - \frac{x}{2}) T_c$ et d'ordonnée

$$\frac{1}{x T_c} \int_{(n+1-x)T_c}^{(n+1)T_c} u_1 dt$$

(suite des centres de gravité des arcs de courbe inférieurs seulement de chacune des périodes successives) que nous appellerons enveloppe inférieure de u_1 ,

u'_{1f} = fonction définie à partir de u_{1r} de la même façon que u'_1 est définie à partir de u_1 . Nous l'appellerons enveloppe supérieure de la composante rapide,

u''_{1f} = fonction définie à partir de u_{1r} de la même façon que u''_1 est définie à partir de u_1 . Nous l'appellerons enveloppe inférieure de la composante rapide,

u_{1f} = $u'_{1f} - u''_{1f}$, fonction continue que nous appellerons amplitude de crête à crête de la composante rapide.

La façon dont sont faites ces interpolations n'est pas exactement précisée car elle n'interviendra pas dans la suite. On peut par exemple supposer qu'elle correspond au passage à la limite pour $m \rightarrow \infty$ de l'interpolation entre m points consécutifs au moyen d'un polynôme de degré $m - 1$.

Les mêmes notations seront reprises pour les tensions sortant de l'amplificateur, avec l'indice 2 au lieu de l'indice 1.

Étude du circuit d'entrée. — APPROXIMATION. —

Faisons tendre f_c vers l'infini. Les définitions données ci-dessus deviennent indépendantes du mode d'interpolation choisi. Ceci suppose que l'on utilisera des constantes de temps associées aux choppers très

grandes devant T_c . L'expérience vérifie alors les résultats de la théorie avec une bonne approximation :

u_{1s} = limite pour $T_c \rightarrow 0$ de $\frac{1}{T_c} \int_t^{t+T_c} u_1 dt$ (u_1 discontinue),

u_{1r} = $u_1 - u_{1s}$ est une tension en créneaux dont la valeur moyenne sur T_c est nulle.

Nous conservons les mêmes notations pour désigner après passage à la limite les fonctions

$$u'_1, \dots, u'_{1f} \text{ et } u_{1f}.$$

Les transformées de Laplace correspondantes seront désignées par les mêmes symboles mais avec des U majuscules.

MARCHE DU CALCUL :

$$u_{1s} = \frac{1}{T_c} \left[\int_{nT_c}^{(n+1-x)T_c} u_1 dt + \int_{(n+1-x)T_c}^{(n+1)T_c} u_1 dt \right]$$

mais $u_1 = u'_1$ dans la première somme, tandis que $u_1 = u''_1$ dans la deuxième, et comme ces fonctions sont continues elles sortent du signe somme pour $T_c \rightarrow 0$, ce qui donne :

$$u_{1s} = u'_1(1-x) + u''_1 x.$$

Le même calcul fait sur u_{1r} donne :

$$u'_{1f}(1-x) + u''_{1f} x = 0.$$

On obtient aussi simplement les relations :

$$u'_1 - u'_{1f} = u_{1s}; \quad u''_1 - u''_{1f} = u_{1s}; \quad u_{1f} = u'_1 - u''_1$$

fonctions que nous exprimerons à partir de la tension u_{C1} .

$$\text{CALCUL DE } u_{C1}. \quad \Delta' Q_1 = \int_{nT_c}^{(n+1-x)T_c} \frac{u_G - u_{C1}}{R_1 + \rho} dt.$$

Comme T_c est très petit, u_G et u_{C1} qui sont continues sortent du signe somme :

$$\Delta' Q_1 = \frac{u_G - u_{C1}}{R_1 + \rho} (1-x) T_c.$$

On a de même :

$$\Delta'' Q_1 = -\frac{u_{C1}}{\rho} x T_c$$

soit sur une période complète :

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \Delta' Q_1 + \Delta'' Q_1 \\ &= \frac{u_G - u_{C1}}{R_1 + \rho} (1-x) T_c - \frac{u_{C1}}{\rho} x T_c \\ &= u_G \frac{1-x}{R_1 + \rho} T_c - u_{C1} \frac{\rho + xR_1}{\rho(R_1 + \rho)} T_c. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\Delta Q_1 = C_1 \Delta u_{C1}$, d'où l'équation :

$$\frac{\Delta u_{C1}}{T_c} + \frac{\rho + R_1 x}{C_1 \rho (R_1 + \rho)} u_{C1} = \frac{1-x}{C_1 (R_1 + \rho)} u_G.$$

La dérivée de $u_{C1}(t)$ n'étant pas une fonction continue, appelons $u_{C10}(t)$ la valeur de $u_{C1}(t)$ à la fin de chaque période complète. Cette fonction n'est pas

définie pour $t \neq nT_c$, mais si $T_c \rightarrow 0$, u_{C10} tend vers une fonction continue, et en prenant T_c comme infiniment principal dt , il vient :

$$\frac{d}{dt} u_{C10} + \frac{\rho + R_1 x}{C_1 \rho (R_1 + \rho)} u_{C10} = \frac{1 - x}{C_1 (R_1 + \rho)} u_G$$

(qu'il n'est pas question d'intégrer puisque $u_G(t)$ n'est pas précisée).

Posons la constante de temps $\frac{C_1 \rho (R_1 + \rho)}{\rho + R_1 x} = \tau_{M2}$ et désignons par des capitales les transformées de Laplace : $A(s) = \int_0^\infty a(t) e^{-st} dt$. En supposant $Q_1(0) = 0$, il vient :

$$U_{C10} = \frac{1 - x}{C_1 (R_1 + \rho)} \frac{\tau_{M2}}{1 + s\tau_{M2}} U_G.$$

Si les dérivées $\frac{d}{dt} u_{C1}$ et $\frac{d}{dt} u_{C10}$ sont différentes, les fonctions elles-mêmes ne diffèrent en tout point au maximum que d'un infiniment petit de l'ordre de $\frac{u_{C1} x}{C_1} dt$ (limite de $\frac{\Delta'' Q_1}{C_1}$) et l'on peut remplacer u_{C1} par u_{C10} partout où sa dérivée n'intervient pas. Le schéma montre alors que : $u_1 = (u_G - u_{C10}) \frac{\rho}{R_1 + \rho}$ quand S_1 est ouvert, $u_1 = -u_{C10}$ quand il est fermé. Ces valeurs de u_1 ne sont autres, à du_1 près, que u'_1 et u''_1 respectivement. On peut en tirer :

$$u_{1s} = u'_1(1 - x) + u''_1 x = \frac{(1 - x)\rho}{R_1 + \rho} u_G - \frac{R_1 x + \rho}{R_1 + \rho} u_{C1}$$

$$u_{1f} = u'_1 - u''_1 = \frac{\rho}{R_1 + \rho} u_G + \frac{R_1}{R_1 + \rho} u_{C1}$$

$$u'_{1f} = u'_1 - u_{1s} = \frac{\rho x}{R_1 + \rho} u_G + \frac{R_1 x}{R_1 + \rho} u_{C1}$$

$$u''_{1f} = u''_1 - u_{1s} = -\frac{(1 - x)\rho}{R_1 + \rho} u_G + \frac{R_1 x - R_1}{R_1 + \rho} u_{C1}.$$

En posant $\tau_{M1} = C_1 \rho$ et en utilisant la définition de τ_{M2} , les transformées correspondantes s'écrivent facilement :

$$U_{1s} = \frac{\rho(1 - x)}{R_1 + \rho} \frac{s\tau_{M2}}{1 + s\tau_{M2}} U_G$$

$$U_{1f} = \frac{\rho}{R_1 x + \rho} \frac{1 + s\tau_{M1}}{1 + s\tau_{M2}} U_G$$

$$U'_{1f} = \frac{\rho x}{R_1 x + \rho} \frac{1 + s\tau_{M1}}{1 + s\tau_{M2}} U_G$$

$$U''_{1f} = -\frac{\rho(1 - x)}{R_1 x + \rho} \frac{1 + s\tau_{M1}}{1 + s\tau_{M2}} U_G.$$

Il était nécessaire de calculer toutes ces expressions, car l'amplificateur n'a pas le même gain pour la

composante lente u_{1s} que pour la composante rapide u_{1r} et parce que les deux enveloppes de u_{1r} interviennent séparément dans le fonctionnement du démodulateur.

Étude du circuit de sortie. — AMPLIFICATION. —

On voit que U_{1s} est nul à l'origine et limité à l'intervalle $0 < s < 2\pi j\nu$. Le spectre de u_{1s} tombe donc dans la région où l'amplificateur alternatif présente un gain faible croissant et complexe, et la composante lente u_{1s} sera distordue et peu amplifiée.

Par contre, le spectre de u_{1r} s'étend de $f_c - \nu$ à $\eta f_c + \nu$, le rang n de l'harmonique ηf_c étant élevé car les capacités shunt parasites (non figurées sur le schéma) forment avec R_1 et ρ des constantes de temps faibles devant T_c .

On donnera donc à l'amplificateur une fréquence de coupure supérieure assez grande pour éviter d'arrondir sensiblement les angles de u_1 après amplification et nous raisonnerons comme si u_{1r} était amplifiée sans aucune distorsion, ce que l'on sait faire pratiquement.

Pour préciser, l'expression du gain de l'amplificateur étant de la forme :

$$K_A G_A(s) = K_A \frac{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

on raisonne comme si on avait : $m = n$, $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$ et les autres coefficients tels que $G_A(s)$ soit pratiquement égal à 1 dans toute la gamme utile pour respecter la forme de u_{1r} .

Notons que la contre-réaction utilisée pour stabiliser thermiquement les étages à transistors fait décroître le gain aux fréquences basses. Quand elle est appliquée à l'étage d'entrée, elle rend en outre complexe l'impédance d'entrée aux basses fréquences. Cet effet n'est pas pris en considération dans les présents calculs.

SIGNAL SORTANT DE L'AMPLIFICATEUR. — La tension

$$u_2(t) = K_A G_A \left(\frac{d}{dt} \right) u_{1s}(t) + K_A u_{1r}(t)$$

a pour enveloppes :

$$u'_2(t) = K_A G_A \left(\frac{d}{dt} \right) u_{1s}(t) + K_A u'_{1f}(t)$$

et :

$$u''_2(t) = K_A G_A \left(\frac{d}{dt} \right) u_{1s}(t) + K_A u''_{1f}(t)$$

(dans ces trois équations, $G_A \left(\frac{d}{dt} \right)$ est un opérateur portant sur u).

Prenons les transformées de ces équations et portons-y les valeurs obtenues plus haut pour U_{1s} , U'_{1f} et U''_{1f} , il vient, tous calculs faits :

$$U'_2(s) = K_A \left\{ \frac{(1 - x)\rho}{R_1 + \rho} s\tau_{M2} G_A(s) + \frac{x\rho}{\rho + xR_1} (1 + s\tau_{M1}) \right\} \frac{1}{1 + s\tau_{M2}} U_G(s)$$

et :

$$U_2''(s) = K_A \left\{ \frac{(1-x)\rho}{R_1 + \rho} s\tau_{M2} G_A(s) - \frac{(1-x)\rho}{\rho + xR_1} (1 + s\tau_{M1}) \right\} \frac{1}{1 + s\tau_{M2}} U_G(s).$$

DÉMODULATION. — En appliquant la même méthode que pour le circuit d'entrée, il vient :

$$sU_{C2} = \frac{U_2' - U_{C2} - U_L}{C_2(R_2 + R_3)} (1-x) + \frac{U_2'' - U_{C2}}{C_2 R_2} x$$

$$sU_L = \frac{U_2' - U_{C2} - U_L}{C_3(R_2 + R_3)} (1-x) - U_L \frac{R_3 + xR_L}{C_3 R_3 R_L}.$$

Éliminons U_{C2} entre ces deux équations. Il vient, tous calculs faits :

$$U_L = \frac{x(1-x) R_3 R_L [(1 + s\tau_{D1}) U_2' - U_2'']}{R_3(R_2 + xR_3) + xR_L(R_2 + R_3)} \frac{1}{1 + s\tau_{D2}} \frac{1}{1 + s\tau_F}$$

où τ_{D1} , τ_{D2} et τ_F sont des constantes de temps dont les expressions sont données plus loin. Portons dans U_L les valeurs obtenues plus haut pour U_2' et U_2'' . Il vient, tous calculs faits :

$$U_L = \frac{(1-x)\rho}{\rho + xR_1} \frac{K_A}{1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2 + xR_3}{xR_L}} \frac{(1-x)\tau_{M1}\tau_{D1}s^2 G_A(s) + x\tau_{M1}\tau_{D1}s^2 + (\tau_{M1} + x\tau_{D1})s + 1}{(1 + s\tau_{M2})(1 + s\tau_{D2})(1 + 2\tau_F)} U_G$$

avec :

$$\tau_{M1} = C_1 \rho; \quad \tau_{M2} = C_1 \rho \frac{\rho + R_1}{\rho + xR_1}; \quad \tau_{D1} = \frac{C_2 R_2}{x}$$

$$\tau_{D2} = \frac{C_F R_F}{2} (1 - \sqrt{1 - \epsilon})$$

$$\tau_F = \frac{C_F R_F}{2} (1 + \sqrt{1 - \epsilon})$$

où l'on a posé :

$$C_F = C_3 \left[1 + \frac{C_2 R_2 R_3 (R_2 + R_3) + R_L (R_3 + xR_L)}{C_3 xR_L R_3 (R_2 + xR_3) + R_L (R_2 + R_3)} \right]$$

$$R_F = R_3 \frac{R_L (R_2 + xR_3)}{R_3 (R_2 + xR_3) + xR_L (R_2 + R_3)}$$

et :

$$\epsilon = 4 \frac{C_2 C_3 R_2 R_2 + R_3}{C_F C_F R_3 R_2 + xR_3} \left[\frac{R_3}{R_L} + \frac{x(R_2 + R_3)}{R_2 + xR_3} \right].$$

Le taux d'ondulation résiduelle, valeur de crête à crête, rapporté à la tension utile de sortie, est donné par :

$$\eta = \frac{x}{C_3 f_c} \frac{R_3 + R_L}{R_3 R_L}.$$

On voit que la fonction de transfert de l'ensemble apparaît comme le produit de trois facteurs assez bien séparés :

$$\frac{U_L(s)}{U_G(s)} = K_T \cdot G_p(s) \cdot G_F(s)$$

où : $K_T = \frac{(1-x)\rho}{\rho + xR_1} \frac{K_A}{1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2 + xR_3}{xR_L}}$ représente le gain en continu

$$G_p(s) = \frac{(1-x)\tau_{M1}\tau_{D1}s^2 G_A(s) + x\tau_{M1}\tau_{D1}s^2 + (\tau_{M1} + x\tau_{D1})s + 1}{(1 + s\tau_{M2})(1 + s\tau_{D2})}$$

le gain relatif complexe en régime variable, effet du filtre non compris (où τ_{M2} dépend de C_3 et R_3 contenus dans le filtre), et : $G_F(s) = \frac{1}{1 + s\tau_F}$ le gain relatif complexe du filtre en régime variable (où τ_F dépend de R_2 et C_2 qui ne sont pas dans le filtre).

Présentation des résultats. — APPROXIMATIONS SIMPLIFICATRICES. — 1) Si on ne prend pas en compte la baisse de gain aux basses de l'amplificateur (action sur la composante lente), on peut écrire : $G_A(j\omega) = 1$ quel que soit ω . En posant alors :

$$\tau_1 = \sqrt{\tau_{M1}\tau_{D1}} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 1/2 \left(\sqrt{\frac{\tau_{M1}}{\tau_{D1}}} + x \sqrt{\frac{\tau_{D1}}{\tau_{M1}}} \right)$$

il vient :

$$|G_p| = \sqrt{\frac{(1 - \tau_1^2 \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda_1^2 \tau_1^2}{(1 + \tau_{M2}^2 \omega^2)(1 + \tau_{D2}^2 \omega^2)}}$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{2\lambda_1 \omega \tau_1}{1 - \omega^2 \tau_1^2} - \text{Arctg} \frac{(\tau_{M2} + \tau_{D2}) \omega}{1 - \omega^2 \tau_{M2} \tau_{D2}}$$

expressions sur lesquelles nous reviendrons.

2) Dans de nombreuses applications, les valeurs des composants sont telles que les expressions obtenues peuvent se simplifier considérablement. Généralement, ϵ est $< 1/2$, ce qui permet de calculer τ_F et τ_{D2} avec une approximation de 10 à 15 % au moyen des expressions suivantes :

$$\tau_F \cong C_F R_F \quad \text{et} \quad \tau_{D2} \cong \frac{C_F R_F}{4} \epsilon \cong C_2 R_2 \frac{R_2 + R_3}{R_2 + xR_3} \frac{C_3}{C_F}$$

Si, en outre, $C_3 \cong C_F$, on a :

$$\tau_F = C_3 R_3 \frac{R_L(R_2 + xR_3)}{R_3(R_2 + xR_3) + xR_L(R_2 + R_3)}$$

et
$$\tau_{D2} = C_2 R_2 \frac{R_2 + R_3}{R_2 + xR_3}$$

Si R_2 impédance de sortie de l'amplificateur est faible devant la charge, ce qui sera souvent le cas, ces formules peuvent encore se simplifier : pour $R_2/R_3 \ll 1$ le gain continu devient :

$$K_T = \frac{\rho(1-x)}{\rho + xR_1} \frac{K_A}{1 + \frac{R_3}{R_L}}$$

ce qui montre que si x décroît le gain K_T croît. De plus :

$$\tau_{D2} \cong \tau_{D1} = \frac{C_2 R_2}{x} \quad \text{et} \quad \tau_F \cong C_3 \frac{R_3 R_L}{R_3 + R_L}$$

Si les conditions $\epsilon \ll 1/2$ et $C_F \cong C_3$ sont satisfaites, il est possible de calculer directement la constante de temps τ_F du filtre à partir du taux d'ondulation résiduelle toléré η :

$$\tau_F = \frac{x}{\eta f_c} \frac{R_3(R_2 + xR_3) + xR_L(R_2 + R_3)}{(R_2 + xR_3)(R_3 + R_L)}$$

La figure 3 évoque la forme de l'ondulation résiduelle et rappelle la définition de $\eta = \frac{\Delta u_L}{u_L}$.

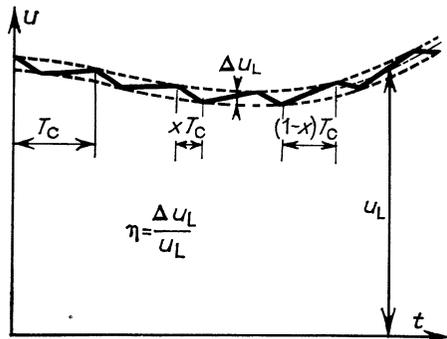


FIG. 3.

Forme de l'ondulation résiduelle à la sortie.

DISTORSION DE FRÉQUENCE ET DE PHASE. — Il est important de l'examiner, car la réponse transitoire intervient dans beaucoup d'applications telles que

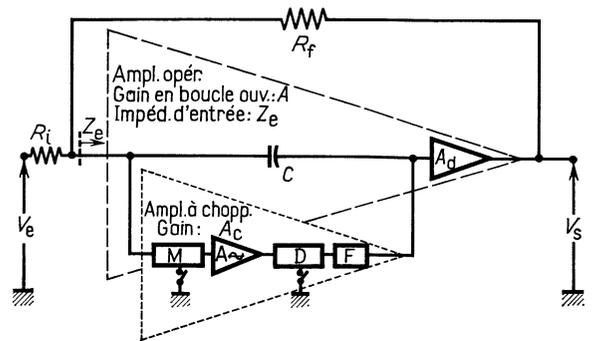


FIG. 4. — Stabilisation par choppers d'un amplificateur opérationnel.

$$G = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 - \frac{1}{A} \left[1 + \frac{R_f}{Z_0} + \frac{R_f}{R_i} \right]}$$

A_d , amplificateur continu de gain A_d ; A_c , amplificateur alternatif; M, modulateur; D, démodulateur F, filtre.

servo-mécanismes ou stabilisation d'amplificateurs opérationnels. La figure 4 schématise cette dernière application à titre d'exemple : aux fréquences élevées, la capacité C court-circuite l'amplificateur à choppers. Aux basses, ce dernier et l'amplificateur continu sont en cascade. Pour des gains de $A_c = 10^3$ et $A_d = 10^4$ par exemple, A passe de 10^7 aux basses à 10^4 aux aigües, ce qui, pour des relations de phase assez faciles à tenir avec ce système, assure la stabilisation (il faut, en particulier, que le module du gain en tension réinjectée à l'entrée tombe en dessous de 1 avant que le déphasage n'atteigne π).

Examinons d'abord le cas où l'amplificateur intermédiaire serait parfait : $G_A(j\omega) = 1$ quel que soit ω . En posant encore :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tau_{M2}}{\tau_{D2}}} + \sqrt{\frac{\tau_{D2}}{\tau_{M2}}} \right)$$

il vient :

$$G_p(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 \tau_1^2 + 2(j\omega) \lambda_1 \tau_1 + 1}{(1 + j\omega \tau_{M2})(1 + j\omega \tau_{D2})} = \frac{(j\omega)^2 \tau_1^2 + 2(j\omega) \lambda_1 \tau_1 + 1}{(j\omega)^2 \tau_2^2 + 2(j\omega) \lambda_2 \tau_2 + 1} = \frac{N}{D}$$

On remarque que le numérateur N et le dénominateur D ne sont autres que les inverses de fonctions de transfert de systèmes du second ordre, self L et résistance R à l'entrée en série et capacité C en shunt à la sortie, où l'on a posé :

$$\tau = \sqrt{LC} = 1/\omega_r \quad (\omega_r = \text{pulsation de résonance})$$

et

$$\lambda = 1/2 R/\sqrt{L/C} \quad (\lambda = \text{facteur d'amortissement}).$$

Ces fonctions sont données sous forme réduite dans les manuels avec $\omega\tau$ comme variable et λ comme

paramètre. La figure 5 rappelle l'aspect du module en ordonnées logarithmiques et celui de la phase en coordonnées linéaires.

On remarque aussi que λ_2 est le rapport de la moyenne arithmétique à la moyenne géométrique

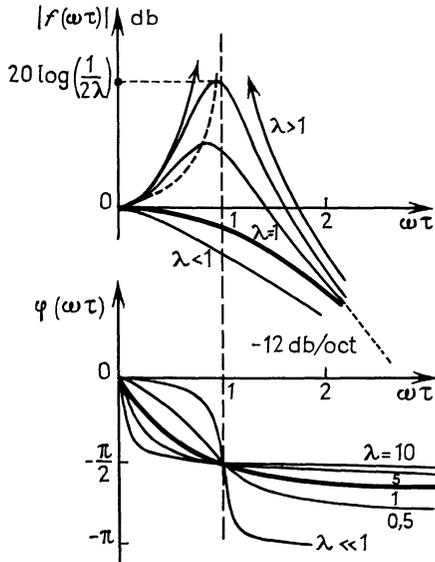


FIG. 5. — Fonction de transfert du système du second ordre.

Erratum : Sur le graphique du haut, lire : $\lambda < 1$ en haut à droite, et $\lambda > 1$ en bas à gauche.

de τ_{M2} et τ_{D2} . Il est donc toujours supérieur ou égal à 1 et il en résulte que D est toujours apériodique, avec une courbe sans maximum. Par contre :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tau_{M1}}{\tau_{D1}}} + x \sqrt{\frac{\tau_{D1}}{\tau_{M1}}} \right) = \sqrt{x} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C_1 \rho}{C_2 R_2}} + \sqrt{\frac{C_2 R_2}{C_1 \rho}} \right)$$

est inférieur à 1 sauf si $x\tau_{D1}$ diffère beaucoup de τ_{M1} car $x < 1$.

La construction donnant $|G_p|$ est alors la suivante (fig. 6).

Au voisinage de $\omega_1 = 1/\tau_1$, abscisse du maximum de $1/|N|$, la pente de $1/|D|$ est encore faible, de telle sorte que l'abscisse du minimum de $|G_p|$ diffère peu de ω_1 . En admettant ω_1 comme valeur approchée de l'abscisse du minimum de $|G_p|$, on ne commet sur ce minimum lui-même qu'une erreur très faible. On trouve ainsi :

$$\Delta A_{1db} = 20 \log (2\lambda_1) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\tau_{M2}}{\tau_1} \right)^2 \right] - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\tau_{D2}}{\tau_1} \right)^2 \right].$$

On a vu que quand x décroît le gain en continu croît, mais l'expression de λ_1 montre qu'en même

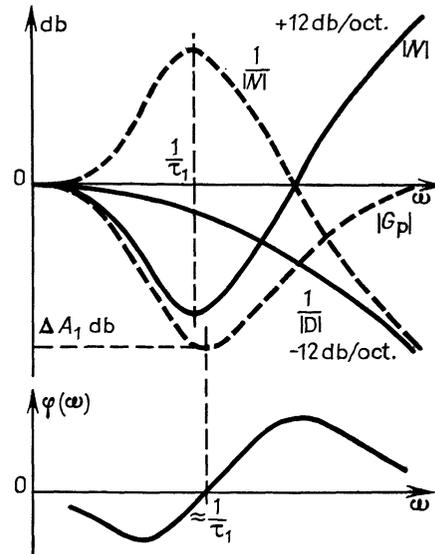


FIG. 6. — Calcul graphique du gain relatif.

temps λ_1 décroît, au détriment de la réponse en fréquence. Pour $x \geq 1/4$, A_1 peut couramment n'être que de 1 ou 2 db, mais pour $x \leq 1/10$ il peut dépasser 20 db. On recherchera le compromis nécessaire en calculant λ_1 .

Après le passage au minimum, $|G_p|$ se rapproche de l'axe des ω , restant dessous ou le coupant suivant

que la quantité $\frac{\tau_1}{\sqrt{\tau_{M2}\tau_{D2}}}$ est inférieure ou supérieure à 1.

CAS DE L'AMPLIFICATEUR IMPARFAIT. — Considérons maintenant le cas plus proche de la réalité où $G_A(j\omega)$ serait un produit de facteurs de la forme $j\omega\tau_i/(1 + j\omega\tau_i)$

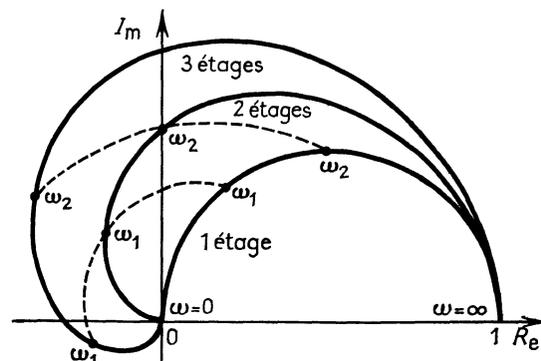


FIG. 7. — Gain relatif complexe d'une chaîne à plusieurs étages R-C.

représentant le gain relatif complexe d'une chaîne d'étages couplés par résistance-capacité, gain dont la figure 7 donne l'allure dans le plan complexe pour 1, 2

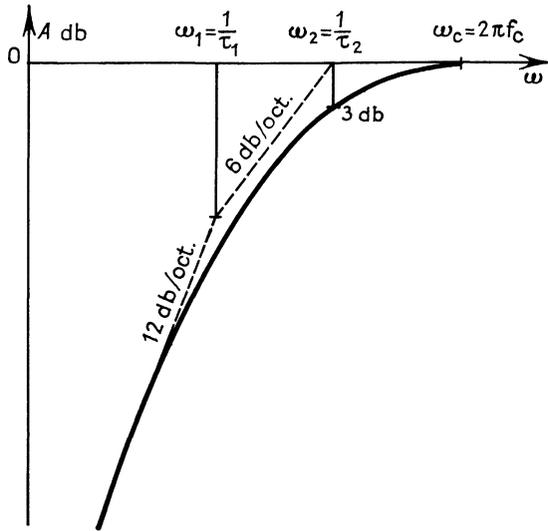


FIG. 8. — Module du gain relatif dans le cas de deux étages.

et 3 facteurs, et dont la figure 8 donne l'allure du module dans le cas de deux facteurs. Le numérateur complet de G_p peut s'écrire :

$$N = \underbrace{(j\omega)^2 \tau_1^2 G_A(j\omega)}_{V_B V_A} - \underbrace{x(j\omega)^2 \tau_1 G_A(j\omega)}_{-xV_B V_A} + \underbrace{x(j\omega)^2 \tau_1^2}_{xV_B} + \underbrace{2j\omega \lambda_1 \tau_1}_{V_C} + 1.$$

V_A , V_B et V_C sont des vecteurs du plan complexe, les accolades indiquant la correspondance des notations. V_B est réel négatif et proportionnel à ω^2 , V_C est imaginaire pur vers le haut, proportionnel à ω , et V_A complexe suit une loi du type donné figure 7. Une courbe de ce type étant choisie, il est facile de construire N . On a d'abord, figure 9, tracé N dans le cas simplifié où G_A est identiquement égal à 1. Le lieu de N est la parabole $x = y^2/2\lambda_1^2$. Les traits pleins correspondent à $\omega = 1/\tau_1$, valeur pour laquelle N se réduit à $N_1 = 2j\lambda_1$. Les flèches pointillées montrent le sens de variation pour ω croissant.

On a ensuite, figure 10, construit N en prenant pour G_A une loi du type de la figure 7. Les vecteurs y figurent dans la position $\omega = 1/\tau_1$, comme sur la figure 9. On voit en pointillé le chemin de sommation : $0 + V_B V_A, -xV_B V_A, +xV_B, +V_C, +1$, qui aboutit à N_1 .

tit à N_1 . Or, si les vecteurs $+1, xV_B$ et V_C sont inchangés, le vecteur V_B est remplacé par $V_B V_A$ et le vecteur $-xV_B$ par $-xV_B V_A$. Appelons P le vecteur $V_B V_A - V_B$ et Q le vecteur $(-xV_B V_A) - (-xV_B)$. Il est bien évident que N_1 , au lieu de coïncider avec V_C comme sur la figure 9, s'en déduit par addition de $P + Q$. Or $Q = -xP$, donc le vecteur à ajouter à V_C pour obtenir N_1 n'est autre que $P(1-x)$ que l'on voit à gauche de la figure.

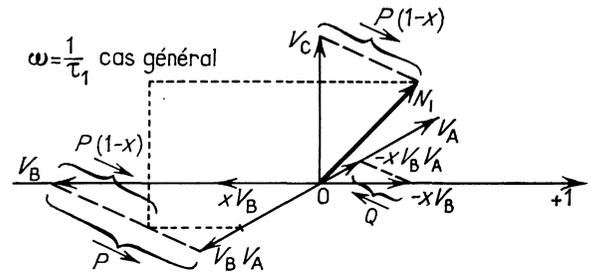
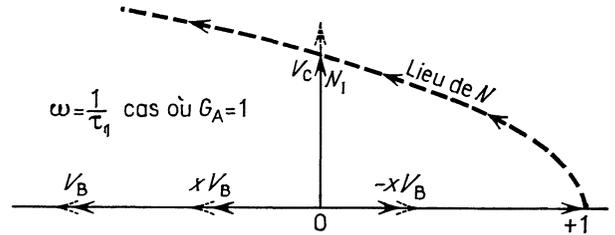


FIG. 9 et 10. — Variation du déphasage due à l'imperfection de l'amplificateur.

Ceci montre que, pour $\omega = \omega_1$, N est en retard sur V_C , avec une amplitude du même ordre, alors que ces deux vecteurs coïncidaient quand on admettait $G_A = 1$. Les conclusions résumées par la figure 6 sont alors modifiées en ce sens que, dans le cas où $G_A \neq 1$, le déphasage de G_p s'annule non plus à l'abscisse du minimum mais à une abscisse supérieure (1).

(1) Les figures 1 et 4 et les formules exprimant le gain sont extraites de *Electrical Design News Magazine*, mars 1956, p. 98-101.

Manuscrit reçu le 22 mai 1967.