



**HAL**  
open science

## Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides

Lad. Natanson

► **To cite this version:**

Lad. Natanson. Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. J. Phys. Theor. Appl., 1905, 4 (1), pp.183-190. 10.1051/jphystap:019050040018301 . jpa-00240985

**HAL Id: jpa-00240985**

**<https://hal.science/jpa-00240985>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SUR UNE PARTICULARITE DE LA DOUBLE RÉFRACTION ACCIDENTELLE  
DANS LES LIQUIDES ;**

Par M. LAD. NATANSON.

Le principe de l'expérience imaginée, en 1873, par Maxwell pour étudier la double réfraction accidentelle dans les liquides est connu de tous les physiciens ; il a été adopté par Kundt, en 1881, ainsi que par la majorité des savants qui ont décrit des expériences précises

relatives à ce phénomène. Imaginons un cylindre qui peut être mis en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire constante. A une distance assez faible de sa surface, imaginons une paroi cylindrique immobile, centrée sur le même axe. L'espace annulaire limité par la surface du cylindre et la paroi immobile est rempli du liquide que l'on désire étudier. Supposons que le mouvement du liquide ait atteint le régime permanent. Un faisceau de lumière, ayant traversé un polariseur, passe par le liquide en se dirigeant parallèlement à l'axe de rotation et est reçu sur un analyseur. Convenons de prendre pour axe des  $z$  l'axe de rotation du cylindre; supposons que le plan  $(x, z)$  coïncide avec le plan de l'analyseur et le plan des  $(y, z)$  avec celui du polariseur. Soit  $\gamma$  l'angle que fait, avec l'axe des  $x$ , le rayon correspondant au maximum d'obscurité observable dans le quadrant  $(x, y)$ . Dans un Mémoire. *Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides*, présenté à l'Académie des Sciences de Cracovie dans la séance du 11 janvier 1904 <sup>(1)</sup>, j'ai donné, pour calculer la valeur de l'angle  $\gamma$ , une formule que M. Zaremba a attaquée dans une communication au *Journal de Physique* <sup>(2)</sup>. Je me propose, dans les lignes qui vont suivre, de discuter les considérations au moyen desquelles M. Zaremba a cherché à infirmer la formule en question.

1° Ainsi que dans le Mémoire cité dans l'introduction, je désignerai par  $r$  la distance du point considéré M à l'axe de rotation, distance comptée à partir de cet axe; par  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , les composantes de la déformation véritable <sup>(3)</sup> du liquide au point considéré, rapportées au système de coordonnées  $x, y$ . Par le point M, faisons passer un axe  $Mq$  dont la direction est celle de la vitesse de la particule qui, à l'époque donnée, occupe la position M; considérons le système  $Mr, Mq$ , comme un nouveau système d'axes de coordonnées; désignons par  $\varepsilon_r, \varepsilon_q, \gamma_{rq}$ , les composantes de la déformation véritable du liquide au point M, rapportées au système de coordonnées  $Mr, Mq$ .

Dans le Mémoire cité dans l'introduction, j'ai adopté l'hypothèse fondamentale que j'avais énoncée antérieurement en 1901, et qui est la suivante: les axes optiques en un point donné d'un liquide en mou-

<sup>(1)</sup> *Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie*, p. 1; janvier 1904.

<sup>(2)</sup> *J. de Phys.*, t. III, 4<sup>e</sup> série, p. 606: 1904.

<sup>(3)</sup> Pour la définition de ce terme, le lecteur voudra bien se reporter à mes Mémoires sur la Théorie de la Viscosité, insérés au *Bulletin Intern. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie* pour 1901, 1902, 1903 et 1904.

vement coïncident avec les axes principaux de la déformation *véri-  
table* relatifs au point considéré<sup>(1)</sup>. En me basant sur cette hypo-  
thèse, j'ai prouvé (Voir à la page 9 du Mémoire cité) que l'on a

$$(1) \quad \cotang 2\chi = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_q}{-\gamma_{rq}}$$

dans les notations précédentes, si l'on suppose que la rotation du  
liquide autour de son axe s'effectue dans le sens positif. Le problème  
est ainsi ramené à la détermination de la valeur du second membre  
de l'équation (1).

2° Prenons dans le liquide un point M de coordonnées  $x, y$ , et ima-  
ginons une région infiniment petite de liquide  $\Omega$  entourant ce point.  
Soit N un second point appartenant à la même région  $\Omega$ ; nous pou-  
vons supposer que les points M et N se trouvent tous les deux cons-  
tamment dans le plan des  $x, y$ . Désignons par  $j$  la direction MN et  
par  $k$  une direction faisant des angles droits avec les directions  
de  $j$  et de  $z$ ; supposons que la disposition mutuelle des axes  $j, k, z$ ,  
est la même que la disposition mutuelle des axes  $x, y, z$ . Dési-  
gnons par  $q$  la vitesse de la particule du liquide qui, à l'époque  $t$ ,  
occupe la position M; par  $u, v$ , les composantes parallèles aux axes  
des  $x$  et des  $y$  de la vitesse  $q$ ; par  $\alpha$ , l'angle que fait la direction  $j$   
avec la direction  $r$ ; par T, le temps de relaxation du liquide. Posons :

$$(2) \quad T \left( \frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) = \vartheta.$$

Dans le Mémoire *Sur une particularité, etc.*, cité déjà à plusieurs

(1) M. Zaremba est dans l'erreur lorsqu'il m'attribue une hypothèse essentielle-  
ment différente de celle que j'ai proposée, à savoir : « les axes optiques d'un  
« liquide en mouvement en un point donné coïncident avec les axes de la qua-  
« drique directrice des efforts relative au point considéré » (p. 608 de la Note  
de M. Zaremba). L'hypothèse que j'ai adoptée et celle que M. Zaremba présente  
comme la mienne se confondent entre elles dans le cas où l'on admet une  
hypothèse *complémentaire* qui consiste à étendre la loi de Hooke aux fluides,  
à la condition, bien entendu, de l'appliquer non point aux composantes de la  
déformation *apparente*, mais bien à celles de la déformation *véri-  
table*. J'ai pro-  
posé moi-même cette hypothèse complémentaire (Voir *Bull. Int. de l'Acad. d. Sc.  
de Cracovie*, février 1901), et, dans une Note parue au *Bull. Int. de l'Acad. d. Sc.  
de Cracovie* pour février 1904, j'ai donné [page 106, éq. (12)] précisément la  
formule  $\cotg 2\chi = \frac{(H-P)}{2Q}$ , que M. Zaremba, sans me citer, développe, pour  
la troisième fois, à la page 609 du *Journal de Physique*, août 1904. Mais l'équa-  
tion (1) citée plus haut est absolument indépendante de l'hypothèse complémen-  
taire dont il vient d'être question.

reprises, j'ai supposé que la loi de la *relaxation* à laquelle est soumise la déformation véritable d'un liquide peut, dans le cas qui nous occupe, s'exprimer par les équations suivantes :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} T \frac{d\varepsilon_j}{dt} = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \sin 2\alpha - (\varepsilon_j - \frac{1}{3} \varpi), \\ T \frac{d\varepsilon_k}{dt} = -\frac{1}{2} \mathfrak{S} \sin 2\alpha - (\varepsilon_k - \frac{1}{3} \varpi), \\ T \frac{d\gamma_{jk}}{dt} = \mathfrak{S} \cos 2\alpha - \gamma_{jk}. \end{array} \right.$$

Les symboles  $\varepsilon_j$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\gamma_{jk}$  dans ces équations représentent les composantes de la déformation véritable en un point M, rapportées au système de coordonnées  $M_j$ ,  $M_k$ ;  $\varpi$  désigne la somme :

$$\varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_z;$$

le symbole  $\frac{d}{dt}$  est défini par la convention suivante :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si l'on désigne par  $\theta$  l'angle que fait le rayon  $r$  avec l'axe des  $x$ , on vérifie facilement que l'on a, dans le cas actuel,

$$\frac{d}{dt} = \frac{q}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Les équations (I) sont celles que j'ai proposées dans le *Mémoire* cité. Pour l'application que nous avons en vue, il nous suffira d'écrire :

$$(I \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} T \frac{d(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}{dt} = \mathfrak{S} \sin 2\alpha - (\varepsilon_j - \varepsilon_k) \\ T \frac{d\gamma_{jk}}{dt} = \mathfrak{S} \cos 2\alpha - \gamma_{jk}. \end{array} \right.$$

Soit  $\beta$  l'angle que fait la direction  $j$  avec l'axe des  $x$ ; nous aurons :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_j - \varepsilon_k = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\beta + \gamma_{xy} \sin 2\beta \\ \gamma_{jk} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\beta + \gamma_{xy} \cos 2\beta; \end{array} \right.$$

par conséquent :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}{dt} = \frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt} \cos 2\beta + \frac{d\gamma_{xy}}{dt} \sin 2\beta + 2\gamma_{jk} \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\gamma_{jk}}{dt} = -\frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt} \sin 2\beta + \frac{d\gamma_{xy}}{dt} \cos 2\beta - 2(\varepsilon_j - \varepsilon_k) \frac{d\beta}{dt}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs :

$$(5) \quad \theta = \beta - \alpha.$$

En vertu des équations (3), (4) et (5), les équations (I *bis*) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt} + 2\gamma_{xy} T \frac{d\beta}{dt} = -\vartheta \sin 2\theta - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ T \frac{d\gamma_{xy}}{dt} - 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) T \frac{d\beta}{dt} = \vartheta \cos 2\theta - \gamma_{xy}. \end{array} \right.$$

3° M. Zaremba dit à la page 610 de sa Note que les équations qui (dans le Mémoire cité) ont servi de base à mes calculs ne peuvent être regardées comme valables, et ne sont certainement telles dans mon propre esprit que dans le cas où les quantités qu'il désigne par :

$$P - p_0, \quad H - p_0, \quad Q,$$

sont de celles dont les produits et les carrés sont négligeables. Or les équations qui, dans le Mémoire en question, ont servi de base à mes calculs sont les équations (I) du paragraphe précédent, qui ne contiennent nullement les quantités  $P - p_0$ ,  $H - p_0$  et  $Q$  de M. Zaremba ; c'est ce qu'on constate immédiatement en se reportant à la page 13 du *Bull. Int. de l'Ac. des Sc. de Cracovie* pour 1904. Afin de pouvoir attacher un sens précis à l'objection formulée par M. Zaremba, je serai donc forcé à recourir à une hypothèse : je supposerai que, dans l'opinion de M. Zaremba, les équations (II) du paragraphe précédent, pour être rigoureuses, devraient être complétées par des termes très petits, lesquels y auraient été négligés. Par conséquent, dans ce qui va suivre, j'admettrai que les équations suivantes :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt} + 2\gamma_{xy} T \frac{d\beta}{dt} = \Phi_{xy} + \varphi_{xy} \\ T \frac{d\gamma_{xy}}{dt} - 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) T \frac{d\beta}{dt} = \Psi_{xy} + \psi_{xy}, \end{array} \right.$$

sont rigoureuses. Dans ces équations,  $\Phi_{xy}$  et  $\Psi_{xy}$  désignent ce que j'appellerai les termes *connus* :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{xy} = -\vartheta \sin 2\theta - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ \Psi_{xy} = \vartheta \cos 2\theta - \gamma_{xy}; \end{array} \right.$$

quant aux termes *inconnus*  $\varphi_{xy}$ ,  $\psi_{xy}$ , la seule hypothèse que je

ferai à leur égard est la suivante : la quantité  $\varphi_{xy}$  est *toujours* très petite par rapport à  $\Phi_{xy}$  ; la quantité  $\psi_{xy}$  est *toujours* très petite par rapport à  $\Psi_{xy}$ . M. Zarembo ne saurait se refuser à admettre la légitimité de l'hypothèse (1) que je viens d'énoncer. En effet, dans son Mémoire *Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation* (2), il a donné (p. 607) un système d'équations d'où l'on tirerait aisément les équations (II) du paragraphe précédent, et il les a appliquées lui-même à l'analyse du cas qui nous occupe (*ibidem*, p. 611).

4° Pour passer du système de coordonnées  $rq$  au système  $xy$  ou, inversement, pour passer du système  $xy$  au système  $rq$ , nous avons les formules :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x - \varepsilon_y = (\varepsilon_r - \varepsilon_q) \cos 2\theta - \gamma_{rq} \sin 2\theta \\ \gamma_{xy} = (\varepsilon_r - \varepsilon_q) \sin 2\theta + \gamma_{rq} \cos 2\theta \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r - \varepsilon_q = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta + \gamma_{xy} \sin 2\theta \\ \gamma_{rq} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta. \end{array} \right.$$

Les dérivées  $\frac{d(\varepsilon_r - \varepsilon_q)}{dt}$  et  $\frac{d\gamma_{rq}}{dt}$  étant égales à zéro, les équations (7) et (8) permettent d'écrire :

$$(9) \quad \frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt} = -2\gamma_{xy} \frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \frac{d\theta}{dt}.$$

On a d'ailleurs :

$$(10) \quad \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right).$$

Dans les équations (III), portons les valeurs (9) des dérivées  $\frac{d(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{dt}$  et  $\frac{d\gamma_{xy}}{dt}$  ; en tenant compte de (10) et de (2), nous trouvons :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} \mathfrak{S} = \Phi_{xy} + \varphi_{xy} \\ -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \mathfrak{S} = \Psi_{xy} + \psi_{xy}. \end{array} \right.$$

Observons maintenant que des équations (6) et (8) il résulte :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(\varepsilon_r - \varepsilon_q) = \Phi_{xy} \cos 2\theta + \Psi_{xy} \sin 2\theta \\ -(\mathfrak{S} - \gamma_{rq}) = \Phi_{xy} \sin 2\theta - \Psi_{xy} \cos 2\theta. \end{array} \right.$$

(1) On peut faire une hypothèse analogue au sujet des équations (I bis) ; on arriverait alors, il est à peine utile de le dire, aux mêmes conclusions. Les équations (I bis) et (II) du paragraphe précédent n'expriment, en effet, qu'une seule et même loi ou, pour mieux dire, elles expriment une seule et même hypothèse.

(2) *Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie* pour 1903, p. 594.

Posons pareillement :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -B = \varphi_{xy} \cos 2\theta + \psi_{xy} \sin 2\theta \\ -A = \varphi_{xy} \sin 2\theta - \psi_{xy} \cos 2\theta. \end{array} \right.$$

En vertu des égalités (8), (12) et (13), les équations (11) donnent :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{rq} \mathfrak{S} = -(\varepsilon_r - \varepsilon_q) - B \\ (\varepsilon_r - \varepsilon_q) \mathfrak{S} = -(\mathfrak{S} - \gamma_{rq}) - A. \end{array} \right.$$

Cependant les quantités A et B sont des fonctions de la seule variable  $r$ , qui ne dépendent nullement de la variable  $\theta$ . Par conséquent, dans les équations (12) et (13), posons  $\theta = 0$ ; nous aurons dans ce cas particulier :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{xy} = -(\varepsilon_r - \varepsilon_q); & \varphi_{xy} = -B \\ \Psi_{xy} = +\mathfrak{S} - \gamma_{rq}; & \psi_{xy} = A. \end{array} \right.$$

La condition à laquelle nous avons assujéti les termes  $\varphi_{xy}$  et  $\psi_{xy}$  exige, ainsi qu'il a été dit au paragraphe précédent, que le terme  $\varphi_{xy}$  soit toujours très petit par rapport à  $\Phi_{xy}$  et que le terme  $\psi_{xy}$  soit toujours très petit par rapport à  $\Psi_{xy}$ ; des égalités (15) il résulte par conséquent que la quantité B est toujours très petite par rapport à  $(\varepsilon_r - \varepsilon_q)$  et que la quantité A est toujours très petite par rapport à  $(\mathfrak{S} - \gamma_{rq})$ ; cette conclusion d'ailleurs est générale, c'est-à-dire qu'elle est valable quelle que soit la valeur de l'angle  $\theta$ . Il apparaît donc clairement, en se reportant à la première équation du système (14), que l'équation :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_q}{-\gamma_{rq}} = \mathfrak{S}, \end{array} \right.$$

donnée à la page 13 du Mémoire cité, doit être considérée comme légitime dans les conditions dans lesquelles elle avait été établie.

Les équations (14) permettent de se rendre compte de l'approximation de la formule (16); elles donnent :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_r - \varepsilon_q) (1 + \mathfrak{S}^2) = -\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{S}A - B \\ \gamma_{rq} (1 + \mathfrak{S}^2) = \mathfrak{S} + A - \mathfrak{S}B. \end{array} \right.$$

On a donc :

$$(18) \quad \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_q}{-\gamma_{rq}} = \mathfrak{S} \frac{1 + \frac{A}{\mathfrak{S}} + \frac{B}{\mathfrak{S}^2}}{1 + \frac{A}{\mathfrak{S}} - B}.$$

La différence  $(\epsilon_r - \epsilon_q)$  est tout au moins de l'ordre de  $\vartheta^2$ ; la quantité  $\gamma_{r,q}$  est tout au moins de l'ordre de  $\vartheta$ ; la quantité B est tout au moins de l'ordre de  $\vartheta^3$ ; la quantité A est tout au moins de l'ordre de  $\vartheta^2$ . On voit par conséquent que l'on est ramené à la conclusion précédente et que l'objection soulevée par M. Zaremba ne résiste pas à l'examen.

5° M. Zaremba, qui, dans sa note, cite le travail expérimental de M. C. Zakrzewski <sup>(1)</sup>, passe sous silence les résultats auxquels est arrivé ce physicien. Je rappellerai donc que les expériences exécutées, au Laboratoire de Physique de l'Université de Cracovie, par M. Zakrzewski, concordent parfaitement avec les prévisions théoriques que j'avais exposées dans mon mémoire. Conformément à ce que j'avais pu déduire des observations de Kundt (Voir p. 20 du Mémoire cité), ces expériences ont montré que le sens dans lequel l'angle  $\chi$  s'écarte de la valeur  $45^\circ$  est bien celui que j'avais indiqué; elles ont prouvé que  $\cotg 2\chi$  varie en proportion directe de l'expression

$$\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r},$$

ainsi que l'exige la formule que j'avais proposée; elles ont donné enfin, pour le temps de relaxation du collodion à  $20^\circ,6$  C., la valeur 0,002 sec., valeur qui paraît tout à fait admissible.

---