



HAL
open science

Construction géométrique des deux images d'un point lumineux produit par réfraction oblique sur une surface sphérique

A. Cornu

► **To cite this version:**

A. Cornu. Construction géométrique des deux images d'un point lumineux produit par réfraction oblique sur une surface sphérique. *J. Phys. Theor. Appl.*, 1901, 10 (1), pp.607-611. 10.1051/jphystap:0190100100060701 . jpa-00240560

HAL Id: jpa-00240560

<https://hal.science/jpa-00240560v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DEUX IMAGES D'UN POINT LUMINEUX
PRODUIT PAR RÉFRACTION OBLIQUE SUR UNE SURFACE SPHÉRIQUE;**

Par M. A. CORNU.

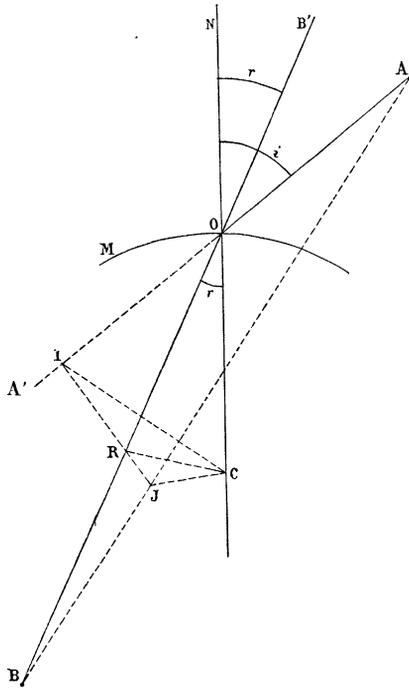
La construction des foyers conjugués d'un faisceau réfracté émanant d'un point est peu connue : les traités classiques la passent, en général, sous silence, et cependant elle est fort utile pour l'étude géométrique,

(¹) SEEBECK, E. BECQUEREL, *C. R.*, t. XIV, p. 901; 1842.

pour le tracé graphique ou même pour la vérification du calcul des systèmes réfringents.

J'ai eu autrefois l'occasion d'examiner ce problème et de rencontrer une construction géométrique simple (1).

Dans le cas de la recherche du foyer correspondant au pinceau lumineux situé dans le plan d'incidence, le théorème est le suivant :



Considérons, dans le plan d'une courbe dirimante OM un point lumineux, A , un rayon qui en émane, AO , et le rayon réfracté correspondant OB . Si le point lumineux A se meut sur le rayon incident, le point B de la caustique qui lui correspond sur le rayon réfracté se déplace de telle sorte que la droite qui les joint passe par un point fixe J .

Ce point, que nous nommerons centre de jonction, est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de courbure C au point d'incidence,

(1) A. CORNU, *Caustiques*. — Centre de jonction (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série. t. II; 1863).

sur la droite qui joint les pieds I et R des perpendiculaires abaissées du même point sur les rayons incident et réfracté (1) :

L'existence du point fixe J est une conséquence immédiate de la formule bien connue :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} (\cos i - n \cos r) = \frac{\cos^2 i}{a} - n \frac{\cos^2 r}{b},$$

facile à démontrer par des constructions infinitésimales :

Dans cette expression, ρ est le rayon de courbure de la courbe OM, i et r les angles d'incidence et de réfraction, a la distance DA, b la distance OB.

En effet la droite AB, rapportée aux axes obliques OA', OB faisant entre eux l'angle $\theta = (i - r)$ aura pour équation :

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

dont les paramètres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont liés par la formule (1).

Comme les paramètres entrent linéairement dans les deux équations, l'enveloppe de cette droite se réduit à un point; la droite AB passe donc par un point fixe.

Éliminons l'un des deux paramètres, par exemple $\frac{1}{b}$, il vient, après réduction (1),

$$\frac{y}{\rho} (\cos i - n \cos r) + n \cos^2 r = \frac{1}{a} (x n \cos^2 r + y \cos^2 i),$$

équation satisfaite indépendamment de (1), si l'on égale à zéro chacun des deux membres. Résolvant par rapport à x et y , après avoir substitué à n sa valeur $\frac{\sin i}{\sin r}$, on obtient les coordonnées de ce point fixe J, centre de jonction :

$$(3) \quad x = -\rho \frac{\sin r \cos^2 i}{\sin (i - r)}$$

$$(4) \quad y = +\rho \frac{\sin i \cos^2 r}{\sin (i - r)}.$$

(1) Je croyais cette construction nouvelle; mais, depuis, j'ai reconnu que Thomas Young l'avait donnée sous une forme équivalente (Voir *Philosophical Transactions*. 1801, vol. XCI, p. 28, et *Œuvres ophtalmologiques* de Thomas Young, traduites et annotées par M. Tscherning, p. 82, Copenhague, 1894). — C'est donc, en définitive, le théorème de Young dont je donne ici la démonstration.

Toute combinaison linéaire de ces deux valeurs donnera une droite passant par le centre de jonction.

1° Divisons l'équation (3) par $\rho \cos i$, (4) par $\rho \cos r$, et ajoutons membre à membre; il vient :

$$(5) \quad \frac{x}{\rho \cos r} + \frac{y}{\rho \cos i} = 1,$$

$\rho \cos r$ et $\rho \cos i$ sont les distances à l'origine des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les axes. Le centre de jonction se trouve donc sur la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les deux rayons.

2° Multiplions (3) par $\sin r$ et (4) par $\sin i$, et ajoutons membre à membre, on a :

$$y \sin i + x \sin r = \rho \sin (i + r),$$

équation d'une nouvelle droite passant encore par le point J.

Elle est perpendiculaire à la droite (5), car les coefficients angulaires :

$$m = -\frac{\cos r}{\cos i}, \quad m' = -\frac{\sin r}{\sin i},$$

satisfont à la relation de perpendicularité dans le cas des axes obliques :

$$1 + mm' + (m + m') \cos \theta = 0.$$

ici :

$$\theta = i - r.$$

Elle passe d'ailleurs par le centre de courbure C, car son équation est satisfaite par les coordonnées de ce point :

$$x' = -\rho \frac{\sin r}{\sin (i - r)},$$

$$y' = \rho \frac{\sin i}{\sin (i - r)}.$$

La construction est donc démontrée.

Donc le cas des caustiques par réflexion, la construction se simplifie, parce que $r = -i$, et $n = -1$:

Le centre de jonction se trouve à l'intersection de la perpendiculaire CJ abaissée du centre de courbure C, sur la droite qui joint les projections symétriques I et R du centre de courbure.

Remarque. — On sait que l'image du point A par réfraction est *astigmatique*, c'est-à-dire se compose de deux éléments linéaires, dont

l'un, B, est perpendiculaire au plan d'incidence ; c'est celui dont nous venons de déterminer la position.

L'autre foyer est un élément situé dans le plan d'incidence dont on obtient la position en considérant un second rayon issu du point A et rencontrant la surface sphérique en O', à une distance OO' infiniment petite sous la même incidence. Les deux normales ON, O'N' convergent au centre de courbure C ; les deux plans de réfraction se coupent donc suivant la droite AC. D'où il résulte que les points de concours des pinceaux correspondants forment un élément linéaire dirigé suivant la droite AC, au point de rencontre avec les rayons réfractés. C'est la seconde ligne focale. Le centre de jonction J est remplacé par le centre de courbure C. On voit que les deux foyers linéaires, bien que perpendiculaires entre eux, ne sont pas tous deux perpendiculaires au rayon réfracté : le premier en B remplit cette condition ; le second suivant AC est oblique sur ce rayon.

La position de cette seconde ligne focale est définie par la distance b' au point d'incidence O. On trouve aisément la relation :

$$\frac{1}{\rho} (\cos i - n \cos r) = \frac{1}{a} - \frac{n}{b'}$$

La construction s'étend naturellement, en se simplifiant, aux foyers astigmatiques par réflexion ; ces considérations s'appliquent avec une grande facilité à la discussion des aberrations dans les systèmes optiques.
