



HAL
open science

Sur le calcul des coefficients de la série de Fourier

J. Macé de Lépinay

► **To cite this version:**

J. Macé de Lépinay. Sur le calcul des coefficients de la série de Fourier. J. Phys. Theor. Appl., 1899, 8 (1), pp.137-148. 10.1051/jphystap:018990080013700 . jpa-00240327

HAL Id: jpa-00240327

<https://hal.science/jpa-00240327>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA SÉRIE DE FOURIER;

Par M. J. MACÉ DE LÉPINAY.

Les calculs nécessaires pour déduire de données expérimentales les valeurs des coefficients A et B de la série de Fourier :

$$y = F(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \dots,$$

au moyen de laquelle on peut représenter une fonction périodique quelconque, sont presque toujours extrêmement pénibles. Sans doute, l'ingénieuse méthode de M. L. Hermann⁽¹⁾ permet de les supprimer à peu près complètement; mais elle me paraît présenter un triple inconvénient: elle nécessite un outillage spécial (papiers fenestrés); elle ne fournit les coefficients cherchés qu'avec une approximation limitée, qui peut être insuffisante dans le cas de recherches de précision; elle exige enfin que les valeurs connues de la fonction y correspondent à des valeurs déterminées, toujours les mêmes, de la phase x .

Je me suis proposé de donner, de ce même problème, une solution plus complète et plus générale. Elle est applicable, en effet, quel que soit le nombre des données, c'est-à-dire des valeurs particulières de la fonction que l'on suppose avoir été déterminées par l'expérience, et quelles que soient les valeurs de la phase auxquelles elles correspondent. Elle n'est, il est vrai, qu'approchée dans le cas général et peut conduire alors à des calculs assez pénibles; mais elle devient d'une application commode dans certains cas particuliers que nous étudierons particulièrement et peut en même temps être rendue rigoureuse. *Il suffit à cet effet que les valeurs de la phase auxquelles correspondent les données soient équidistantes.*

I. — Quelques remarques préliminaires sont nécessaires.

Nous supposons que l'on ne connaisse qu'un nombre limité, N, de valeurs particulières, $y_0, y_1, \dots, y_j, \dots, y_{N-1}$ de la fonction, correspondant aux valeurs $x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{N-1}$ de la phase.

1° Ce nombre étant supposé limité, nous ne pouvons songer à déterminer plus d'inconnues qu'il n'y a de données et, par suite, d'équations. On doit donc supposer la série de Fourier limitée à ses N premiers termes. Soient $A_0, A_1, \dots, A_{N_1}; B_1, B_2, \dots, B_{N_2}$ les coef-

⁽¹⁾ *J. de Phys.*, 3^e série, t. VII, p. 141; 1898; — et *Revue générale des Sciences*, t. IX, p. 669; 1898.

J. de Phys., 3^e série, t. VIII. (Mars 1899.)

ficients correspondants. On voit immédiatement que l'on a :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N}{2}, & N_2 &= \frac{N}{2} - 1, \text{ si } N \text{ est pair;} \\ N_1 &= N_2 = \frac{N-1}{2}, & & \text{ si } N \text{ est impair.} \end{aligned}$$

2° Le problème général se simplifie si l'on suppose que les valeurs de la phase auxquelles correspondent les données satisfassent, deux à deux, à la condition :

$$(1) \quad x_j = 2\pi - x_{N-j}.$$

Il est possible, en effet, dans ce cas, de calculer $N_1 + 1$ valeurs de la fonction z , et N_2 valeurs de la fonction t , définies par les relations :

$$\begin{aligned} z &= \frac{F(x) + F(-x)}{2} = \frac{F(x) + F(2\pi - x)}{2}, \\ t &= \frac{F(x) - F(-x)}{2} = \frac{F(x) - F(2\pi - x)}{2}, \end{aligned}$$

valeurs qui sont :

$$\begin{aligned} z_0 = y_0, z_1 &= \frac{y_1 + y_{N-1}}{2}, \dots, z_j = \frac{y_j + y_{N-j}}{2}, \dots, z_{N_1} = \frac{y_{N_1} + y_{N-N_1}}{2} \text{ (1)}; \\ t_1 &= \frac{y_1 - y_{N-1}}{2}, \dots, t_j = \frac{y_j - y_{N-j}}{2}, \dots, t_{N_1} = \frac{y_{N_1} - y_{N-N_1}}{2}. \end{aligned}$$

Or, ainsi que l'a montré Fourier, ces fonctions z et t jouissent des propriétés suivantes qu'il est utile de rappeler :

La fonction z , de même que $\cos ix$ (i étant un entier quelconque), est une fonction paire de x ; la fonction t , de même que $\sin ix$, une fonction impaire de x . On a, en outre, quel que soit x :

$$y = t + z.$$

Il résulte de ces remarques que l'on a :

$$\begin{aligned} z &= A_0 + A_1 \cos x + \dots + A_i \cos ix + \dots + A_{N_1} \cos N_1 x, \\ t &= B_1 \sin x + \dots + B_i \sin ix + \dots + B_{N_2} \sin N_2 x, \end{aligned}$$

les coefficients A et B , qui figurent dans ces formules, n'étant autres que ceux du développement de la fonction y étudiée. Le problème à résoudre se trouve, de la sorte, scindé en deux autres plus simples.

(1) Si N est pair, $z_{N_1} = y_{N_1}$.

3° La condition (1) se trouve satisfaite, en particulier, si les valeurs de la phase auxquelles correspondent les données sont équidistantes, c'est-à-dire satisfont à la condition :

$$(2) \quad x_j - x_{j-1} = \frac{2\pi}{N}.$$

D'autres simplifications notables résultent en même temps, dans ce cas, de ce que le nombre de lignes trigonométriques distinctes (autres que 1), qui figurent dans les expressions des y , et qui seules, nécessairement, figurent dans celles des coefficients A ou B, est seulement :

$$\begin{aligned} N - 1, & \text{ si } N \text{ est impair,} \\ \frac{N}{2} - 1, & \text{ si } N \text{ est pair,} \\ \frac{N}{4} - 1, & \text{ si } N \text{ est divisible par 4.} \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, surtout, la résolution directe des N équations fondamentales à N inconnues devient relativement pratique, si N n'est pas trop grand, par suite des caractères de symétrie que présentent, dans l'un et l'autre groupe, ces équations. Il est utile, pour la suite, de donner, à titre d'exemple, les expressions des coefficients ainsi calculés, dans le cas de $N = 16$. Nous poserons, pour simplifier,

$$\begin{aligned} h &= \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}; & c &= \cos \frac{\pi}{8}; \quad s = \sin \frac{\pi}{8}; \\ 8A_0 &= \frac{z_0 + z_8}{2} + (z_1 + z_7) + (z_2 + z_6) + (z_3 + z_5) + z_4, \\ 4A_1 &= \frac{z_0 - z_8}{2} + c(z_1 - z_7) + h(z_2 - z_6) + s(z_3 - z_5), \\ 4A_2 &= \frac{z_0 + z_8}{2} + h(z_1 + z_7) && - h(z_3 + z_5) - z_4, \\ 4A_3 &= \frac{z_0 - z_8}{2} + s(z_1 - z_7) - h(z_2 - z_6) - c(z_3 - z_5), \\ 4A_4 &= \frac{z_0 + z_8}{2} && - (z_2 + z_6) && + z_4, \\ 4A_5 &= \frac{z_0 - z_8}{2} - s(z_1 - z_7) - h(z_2 - z_6) + c(z_3 - z_5), \\ 4A_6 &= \frac{z_0 + z_8}{2} - h(z_1 + z_7) && - h(z_3 + z_5) - z_4, \\ 4A_7 &= \frac{z_0 - z_8}{2} - c(z_1 - z_7) + h(z_2 - z_6) - s(z_3 - z_5), \\ 8A_8 &= \frac{z_0 + z_8}{2} - (z_1 + z_7) + (z_2 + z_6) - (z_3 + z_5) + z_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4B_1 &= s(t_1 + t_7) + h(t_2 + t_6) + c(t_3 + t_5) + t_4, \\
4B_2 &= h(t_1 - t_7) + (t_2 - t_6) + h(t_2 - t_3), \\
4B_3 &= c(t_1 + t_7) + h(t_2 + t_6) - s(t_3 + t_5) + t_4, \\
4B_4 &= t_1 - t_7 - (t_3 - t_5), \\
4B_5 &= c(t_1 + t_7) - h(t_2 + t_6) - s(t_3 + t_5) - t_4, \\
4B_6 &= h(t_1 - t_7) - (t_2 - t_6) + h(t_3 - t_5), \\
4B_7 &= s(t_1 + t_7) - h(t_2 + t_6) + c(t_3 + t_5) - t_4.
\end{aligned}$$

II. — La résolution directe des équations fondamentales, toujours pénible, même dans les conditions les plus favorables, serait à peu près impraticable dans le cas général. Il nous est possible, au contraire, de déduire immédiatement des formules générales des expressions suivantes des coefficients A et B, établies par Fourier :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} z dx, \\
A_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos ix dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} z \cos ix dx, \\
B_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin ix dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} z \sin ix dx.
\end{aligned}$$

Nous nous proposerons de transformer ces relations de manière à pouvoir calculer avec toute l'exactitude possible les coefficients des N premiers termes de la série, et cela en utilisant toutes les données, au nombre de N, mais sans introduire aucune hypothèse arbitraire.

Considérons à cet effet les courbes dont les ordonnées sont respectivement y ou z , $y \cos ix$ ou $z \cos ix$, $y \sin ix$ ou $z \sin ix$, courbes dont les intégrales ci-dessus représentent les aires. Ne connaissant que N points de chacune de ces courbes, mais nullement les formes des arcs qui réunissent deux de ces points consécutifs, nous ne pouvons faire mieux, pour calculer ces aires, que de substituer à chacun de ces arcs inconnus la corde correspondante.

On est, de la sorte, immédiatement conduit aux expressions suivantes, qui sont générales :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{4\pi} [y_0(x_1 - x_0 + x_N - x_{N-1}) + \sum_1^{N-1} y_j(x_{j+1} - x_{j-1})], \\
A_i &= \frac{1}{2\pi} [y_0(x_1 - x_0 + x_N - x_{N-1}) + \sum_1^{N-1} y_j(x_{j+1} - x_{j-1}) \cos ix_j], \\
B_i &= \frac{1}{2\pi} \sum_1^{N-1} y_j(x_{j+1} - x_{j-1}) \sin ix_j.
\end{aligned} \right.$$

Ces expressions se simplifient, si l'on suppose que les conditions (4) se trouvent satisfaites. Elles deviennent :

$$(4) \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2\pi} [z_0(x_1 - x_0) + \sum_1^{N_1-1} z_j(x_{j+1} - x_{j-1}) + z_{N_1}(x_{N_1} - x_{N_1-1})], \\ A_i = \frac{1}{\pi} [z_0(x_1 - x_0) + \sum_1^{N_1-1} z_j(x_{j+1} - x_{j-1}) \cos ix_j + z_{N_1}(x_{N_1} - x_{N_1-1}) \cos ix_{N_1}]^{(1)}, \\ B_i = \frac{1}{\pi} \sum_1^{N_1-1} t_j (x_{j+1} - x_{j-1}) \sin ix_j. \end{cases}$$

Elles se simplifient encore davantage, si nous supposons que les conditions (2) soient satisfaites :

$$x_j - x_{j-1} = \frac{2\pi}{N}.$$

Elles deviennent :

$$(5) \begin{cases} A_0 = \frac{2}{N} \left[\frac{z_0}{2} + \sum_1^{N_1-1} z_j + \frac{z_{N_1}}{2} \right], \\ A_i = \frac{4}{N} \left[\frac{z_0}{2} + \sum_1^{N_1-1} z_j \cos 2ij \frac{\pi}{N} + \frac{z_{N_1}}{2} \cos 2iN_1 \frac{\pi}{N} \right], \\ B_i = \frac{4}{N} \sum_1^{N_1-1} t_j \sin 2ij \frac{\pi}{N}. \end{cases}$$

III. — Il est évident *a priori* que les formules (3), (4) et (5) ne sont qu'approchées, d'après la manière même dont nous les avons établies, et qu'en général les coefficients ainsi calculés ne doivent pas satisfaire rigoureusement aux N équations fondamentales de conditions. Remarquons, en effet, que, d'après la forme même de ces équations, les phases ne sauraient intervenir dans les expressions rigoureuses des coefficients. autrement que par leurs lignes trigonométriques et celles de leurs multiples, tandis que, dans les expressions (3), les phases figurent en même temps par elles-mêmes.

Toutefois, lorsque les valeurs de la phase auxquelles correspondent les données sont équidistantes [conditions (2)], il devient possible, en s'appuyant sur les deux théorèmes suivants, de corriger immédiatement les coefficients ainsi calculés [formules (5)].

1° *Lorsque le nombre N des données est pair, le dernier coefficient, calculé par les formules (5), doit seul être corrigé et réduit à la moitié de sa valeur ;*

(1) On a d'ailleurs $\cos ix_{N_1} = +1$ si i est pair, $\cos ix_{N_1} = -1$ si i est impair.

2° Lorsque le nombre N des données est impair, tous les coefficients calculés par les formules (5) sont corrects.

Nous pouvons vérifier tout d'abord le premier de ces théorèmes dans un cas particulier, $N = 16$. En appliquant les formules (5), nous retrouverons identiquement les seize expressions des coefficients calculés directement et donnés précédemment, à une seule exception près : la valeur de A_8 est trouvée deux fois trop forte.

Quant à la démonstration générale de ces théorèmes, elle est plus longue que délicate. Supposons tout d'abord N impair ; dans l'expression développée de y_i (i étant un entier quelconque), remplaçons tous les coefficients A et B par leurs valeurs déduites des équations (5). Le coefficient de y_j dans le second membre de l'expression de y_i est (1) :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \cos 2(i-j) \frac{\pi}{N} + \cos 4(i-j) \frac{\pi}{N} + \dots + \cos(N-1)(i-j) \frac{\pi}{N} \right],$$

qui se réduit, dans le cas particulier de $i = j$, à :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2} \right] = 1,$$

et si $j \neq i$, à :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos \frac{N+1}{2}(i-j) \frac{\pi}{N} \sin \frac{N-1}{2}(i-j) \frac{\pi}{N}}{\sin(i-j) \frac{\pi}{N}} \right]$$

ou :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin \pi - \sin(i-j) \frac{\pi}{N}}{2 \sin(i-j) \frac{\pi}{N}} \right] = 0.$$

Si l'on identifie dès lors les coefficients de y_j dans les deux membres de l'équation, on constate que, dans tous les cas, toutes les équations de conditions auxquelles on parvient sont simultanément satisfaites (deuxième théorème).

Dans le cas de N pair, nous admettrons, guidés par le résultat obtenu dans un cas particulier, qu'il suffit, pour corriger les coeffi-

(1) En remplaçant z_j et t_j par leurs valeurs.

cients donnés par les formules (5), de multiplier le dernier d'entre eux, A_N , par un certain coefficient, u . En conduisant le calcul comme plus haut, on obtient, pour coefficient de y_j dans l'expression de y_i :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \cos 2(i-j) \frac{\pi}{N} + \dots + \cos 2\left(\frac{N}{2} - 1\right) (i-j) \frac{\pi}{N} + u \cos i\pi \cos j\pi \right]$$

qui se réduit, pour $j = i$, à :

$$1 + \frac{2}{N} \left(u - \frac{1}{2} \right).$$

et pour $j \neq i$, à :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(i-j) \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{N}{2} - 1\right) (i-j) \frac{\pi}{N}}{\sin(i-j) \frac{\pi}{N}} + u \cos i\pi \cos j\pi \right],$$

ou :

$$\frac{2}{N} \left[\frac{\sin \frac{N-1}{N} (i-j) \pi}{2 \sin(i-j) \frac{\pi}{N}} + u \cos i\pi \cos j\pi \right] = \pm \frac{2}{N} \left(u - \frac{1}{2} \right).$$

Toutes les équations de conditions se réduisent à :

$$u - \frac{1}{2} = 0.$$

Ce qui justifie le premier théorème énoncé.

IV. — La connaissance de ces deux théorèmes est évidemment indispensable, lorsque l'on applique directement les formules indiquées au calcul de tous les coefficients que l'on peut déterminer. Elle l'est également lorsqu'il y a avantage à employer, pour ce calcul, la méthode des approximations successives.

Cette dernière méthode s'impose en effet dans deux cas : 1° Lorsque la fonction périodique que l'on étudie est représentée par une courbe continue et que, par suite, le nombre des données utilisables est aussi grand que l'on veut, sans que l'on puisse savoir, d'ailleurs, *a priori*, le nombre qu'il convient d'en choisir ; 2° Lorsque le nombre des données, tout en étant limité, est un peu considérable ; si l'on voulait, en effet, les utiliser toutes du premier coup, le calcul de

chacun de ces coefficients, et, *a fortiori*, de tous, deviendrait très pénible; j'ajouterai: en partie inutile. La série de Fourier étant en effet toujours convergente, les valeurs des coefficients successifs finissent par décroître. Or on est en droit de supprimer tous les termes du développement, qui sont tels que les coefficients correspondants soient inférieurs aux erreurs possibles que comportent les données. La méthode des approximations successives que je me propose d'exposer permet de juger des nombres de termes que l'on doit conserver et, ainsi qu'on pourra le voir par un exemple numérique, d'arrêter les calculs exactement au point utile.

Nous supposons donc qu'après avoir employé un certain nombre, N , de données, d'où l'on a déduit $N_1 + 1$ valeurs de z et N_2 valeurs de t , que je représenterai par $z_0, z_2, z_4, \dots, z_{2N_1}$ et par $t_2, t_4, \dots, t_{2N_2}$, et calculé les valeurs des N premiers coefficients de la série de Fourier (1) (en corrigeant, s'il y a lieu, le dernier), on ait lieu de penser que ce nombre de termes est insuffisant. On pourra le reconnaître tout d'abord à l'ordre de grandeur des derniers coefficients obtenus, mais mieux encore, si l'on connaît d'autres valeurs de z et de t , intermédiaires entre celles que l'on a utilisées $z_1, z_3, \dots, z_{2N_1-1}$; $t_1, t_3, \dots, t_{2N_2+1}$, en comparant les valeurs observées à celles que l'on calcule par la série de Fourier, limitée à N termes, dont on vient de calculer les coefficients.

Supposons donc que les écarts ainsi obtenus (observation — calcul), $\Delta z_1, \Delta z_3, \dots, \Delta z_{2N_1-1}$; $\Delta t_1, \Delta t_3, \dots, \Delta t_{2N_2+1}$; soient supérieurs aux erreurs d'observation. Nous sommes amenés à doubler le nombre des données, ainsi que celui des coefficients de la série de Fourier; mais *il est inutile*, à cet effet, *de refaire le calcul complet*.

Soient en effet $A_{N_1+1}, \dots, A_N, B_{N_2+1}, \dots, B_{N-1}$ les valeurs cherchées des nouveaux coefficients; et $\Delta A_0, \Delta A_1, \dots, \Delta A_{N_1}$; $\Delta B_1, \dots, \Delta B_{N_2}$, les valeurs des corrections à apporter aux coefficients déjà calculés pour correspondre à ceux que donnerait le nouveau calcul. On voit facilement que ces nouveaux coefficients, de même que les corrections aux premiers, s'obtiennent au moyen des mêmes formules générales (3), à la seule condition d'y remplacer tous les z et t par les Δz et Δt correspondants.

Ces nouveaux calculs sont, en réalité, simples et rapides (en sup-

(1) Au moyen des formules (3), dans lesquelles on suppose doublés tous les indices des z et des t , de manière à conserver à chaque lettre sa signification.

posant toujours que les valeurs de la phase auxquelles correspondent les données sont équidistantes). En effet :

1° Si l'on a eu soin, lors du premier calcul, de corriger, s'il y a lieu, le dernier coefficient, tous les Δz et Δt d'indices pairs sont identiquement nuls. La moitié des termes qui figurent dans les formules (5) se trouve ainsi disparaître ;

2° Les termes subsistants seront, en général, très petits, d'autant plus petits que le premier calcul a déjà fourni des résultats plus approchés ;

3° Considérons, quel que soit N , les termes d'ordre j dans ΔA_u et A_{N-u} d'une part, dans ΔB_u et B_{N-u} de l'autre. Les arcs correspondants (le nombre total des données étant ici $2N$) sont :

$$uj \frac{\pi}{N} \quad \text{et} \quad (N-u)j \frac{\pi}{N},$$

dont la somme $j\pi$ est nécessairement de la forme $(2k+1)\pi$, puisque les termes d'ordre j impair subsistent seuls, en vertu de la première remarque. Les cosinus de ces deux arcs sont donc égaux et de signes contraires, les sinus égaux et de même signe. Il en résulte les relations importantes :

$$\Delta A_u = -A_{N-u}; \quad \Delta B_u = B_{N-u}.$$

Le nombre des coefficients à déterminer par le nouveau calcul se trouve ainsi réduit de moitié ;

4° Supposons que N soit pair. Le dernier coefficient déterminé par le premier calcul est alors $A_{\frac{N}{2}}$. L'expression de la correction correspondante est de la forme :

$$\Delta A_{\frac{N}{2}} = \frac{2}{N} \sum_1^{N-1} \Delta z_j \cos j \frac{\pi}{2}.$$

Or j étant impair, tous ces cosinus sont nuls, et l'on a :

$$\Delta A_{\frac{N}{2}} = 0.$$

5° Il sera toujours avantageux, dans le calcul des nouveaux coefficients, $A_{N_1+1}, \dots, A_N; B_{N_2+1}, \dots, B_{N-1}$, de suivre, pour chacun de ces groupes, A ou B, l'ordre croissant des indices. Deux cas peuvent en effet se présenter :

Si l'on constate que les coefficients successifs de l'un de ces

groupes vont en décroissant et que l'un d'eux est inférieur aux erreurs possibles d'observation, il est permis, pour ce groupe, d'arrêter en ce point les calculs, car les coefficients restant à déterminer seraient complètement négligeables.

Si, par contre, on constate que, pour l'un de ces groupes ou pour les deux, le dernier coefficient calculé reste supérieur aux erreurs possibles, on est conduit, si le nombre total des données dont on dispose le permet, à appliquer une seconde fois la même méthode d'approximation successive, en doublant de nouveau le nombre des données utilisées.

V. — Je crois utile de joindre, à l'exposé théorique qui précède, un exemple numérique.

Considérons l'ellipse dont les demi-axes sont 1 et 2, dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$\frac{1}{\rho^2} = 0,625 - 0,375 \cos 2\varphi,$$

ou, en posant, pour simplifier, $x = 2\varphi$:

$$\frac{1}{\rho^2} = 0,625 - 0,375 \cos x.$$

Nous nous proposerons de développer ρ en fonction de x par la formule de Fourier. Dans cet exemple particulier, les t (et par suite les coefficients B) sont tous nuls, et les x égaux aux ρ correspondants.

Nous prendrons comme point de départ les dix-sept valeurs suivantes des rayons vecteurs ($N_1 = 16$), supposés représenter dix-sept valeurs observées (1) :

$z_0 = 2,000.000,$	$z_9 = 1,196.803,$
$z_1 = 1,971.786,$	$z_{10} = 1,140.713,$
$z_2 = 1,894.748,$	$z_{11} = 1,095.442,$
$z_3 = 1,786.857,$	$z_{12} = 1,059.900,$
$z_4 = 1,667.049,$	$z_{13} = 1,033.180,$
$z_5 = 1,549.204,$	$z_{14} = 1,014.586,$
$z_6 = 1,441.135,$	$z_{15} = 1,003.622,$
$z_7 = 1,346.149,$	$z_{16} = 1,000.000.$
$z_8 = 1,264.914,$	

(1) $N_1 = 16$ correspond à $N = 32$; mais il est à remarquer que, dans le cas actuel, trente de ces rayons vecteurs sont égaux deux à deux.

Nous supposons que chacune de ces données n'est connue qu'à quelques unités près du sixième ordre décimal. Nous pourrions donc nous contenter de calculer les divers coefficients de la série de Fourier à une unité près du sixième ordre décimal, et nous pourrions négliger tous ceux qui seront inférieurs à cette même limite.

Dans un premier essai, ayant pour but de voir si la formule de Fourier, réduite à cinq termes seulement, serait suffisante, on a utilisé les seules valeurs de $z_0, z_4, z_8, z_{12}, z_{16}$. Les formules (5) (en quadruplant les indices des z qui y figurent) ont donné :

$$\begin{array}{ll} A_0 = 1,372.965, & A_3 = 0,035.340, \\ A_1 = 0,464.660, & A_4 = 0,009.490 \text{ (1)}. \\ A_2 = 0,117.545, & \end{array}$$

Les valeurs de ces coefficients successifs décroissent régulièrement; mais, de l'examen du plus petit d'entre eux, résulte immédiatement que la formule à cinq termes est insuffisante. Effectivement, elle conduit pour z_2, z_6, z_{10} et z_{14} aux erreurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Delta z_2 = - 0,004.152, & \Delta z_{10} = - 0,003.968, \\ \Delta z_6 = + 0,006.120, & \Delta z_{14} = + 0,001.318. \end{array}$$

De ces dernières données on déduit, par le mode de calcul exposé plus haut :

$$\begin{array}{l} \Delta A_4 = 0, \\ A_3 = - \Delta A_3 = 0,002.853, \\ A_6 = - \Delta A_2 = 0,000.881, \\ A_7 = - \Delta A_1 = 0,000.299, \\ A_8 = - \Delta A_0 = 0,000.085 \text{ (1)}. \end{array}$$

Les coefficients de la série de Fourier, limitée à ses neuf premiers termes, deviennent :

$$\begin{array}{ll} A_0 = 1,372.880, & A_3 = 0,002.853, \\ A_1 = 0,464.361, & A_6 = 0,000.881, \\ A_2 = 0,116.664, & A_7 = 0,000.299, \\ A_3 = 0,032.487, & A_8 = 0,000.085. \\ A_4 = 0,009.490, & \end{array}$$

La formule à neuf termes est, on le voit, encore insuffisante. Elle

(1) Après correction.

conduit en effet aux erreurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Delta z_1 = - 0,000.017, & \Delta z_9 = - 0,000.045, \\ \Delta z_3 = + 0,000.056, & \Delta z_{11} = + 0,000.031, \\ \Delta z_5 = - 0,000.063, & \Delta z_{13} = - 0,000.024, \\ \Delta z_7 = + 0,000.057, & \Delta z_{15} = + 0,000.006. \end{array}$$

En partant de ces nouvelles données et appliquant une seconde fois le même mode de calcul, on trouve :

$$\begin{array}{l} \Delta A_8 = 0, \\ A_9 = - \Delta A_7 = 0,000.028, \\ A_{10} = - \Delta A_6 = 0,000.009, \\ A_{11} = - \Delta A_5 = 0,000.003. \end{array}$$

Il serait inutile, on le voit, de pousser plus loin les calculs, car les autres coefficients seraient inférieurs à 0,000001 et négligeables. La série de Fourier à douze termes est donc suffisante. Les cinq premiers coefficients conservent les mêmes valeurs que dans le tableau précédent, tandis que les autres deviennent :

$$\begin{array}{ll} A_3 = 0,002.850, & A_9 = 0,000.028, \\ A_6 = 0,000.872, & A_{10} = 0,000.009, \\ A_7 = 0,000.271, & A_{11} = 0,000.003, \\ A_8 = 0,000.085, & \end{array}$$

On voit, par cet exemple, que la série de Fourier peut être avantageusement employée pour établir l'équation empirique, en coordonnées polaires, d'une courbe fermée dont on connaît un certain nombre de points. C'est dans le but de résoudre un problème de cette nature que j'ai été amené à entreprendre ce travail.
