



HAL
open science

Sur les déformations élastiques des vases minces

P. Sacerdote

► **To cite this version:**

P. Sacerdote. Sur les déformations élastiques des vases minces. *J. Phys. Theor. Appl.*, 1898, 7 (1), pp.516-520. 10.1051/jphystap:018980070051600 . jpa-00240247

HAL Id: jpa-00240247

<https://hal.science/jpa-00240247>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES VASES MINCES ;

Par M. P. SACERDOTE.

Je me propose de montrer qu'on peut trouver, par des *calculs très simples*, la déformation qu'éprouve un vase sphérique ou cylindrique, mince, lorsqu'il est soumis à des pressions différentes sur ses deux faces.

Rappelons rapidement que, si un cube solide isotrope d'arêtes xyz est soumis à une traction dans une seule direction x , les lignes parallèles à cette direction s'allongent et celles perpendiculaires se contractent. Je désignerai par :

a , le coefficient d'allongement ;

b , le coefficient de contraction ;

$\frac{b}{a} = \sigma$ (coefficient de Poisson).

Si le solide est soumis à des tractions égales dans deux directions xy : toute ligne parallèle au plan xy s'allonge [coefficient $(a - b)$] ; toute ligne perpendiculaire à ce plan se contracte (coefficient $2b$).

Enfin, s'il y a une traction égale dans toutes les directions, il y a un allongement linéaire avec coefficient $(a - 2b)$ et une augmentation de volume avec coefficient $3(a - 2b)$.

I. — VASE SPHÉRIQUE.

Soient R son rayon, e son épaisseur (faible par rapport à R) ; p, p' , les pressions qui s'exercent sur les faces interne et externe.

On peut imaginer que le vase est soumis sur ses deux faces à la pression p' et, en outre, à une pression interne $(p - p')$.

1° *Effet des pressions p' qui s'exercent sur les deux faces.* — Le vase se comprime comme un solide plein : la contraction linéaire unitaire est $(a - 2b) p'$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -(a - 2b) p' = -a(1 - 2\sigma) p'.$$

2° *Effet de la pression interne $(p - p')$.* — Soit un élément de volume : xy les directions sur la sphère (*fig. 1*), z celle dirigée sui-

vant le rayon; l'équilibre de l'élément exige une sorte de tension superficielle dans les directions xy (F par unité de longueur) donnée par la formule de Laplace

$$(p - p') = \frac{2F}{R};$$

d'où :

$$F = \frac{R}{2}(p - p'),$$

et par *unité de surface* $\left(\frac{F}{e}\right) = \frac{R}{2e}(p - p')$.

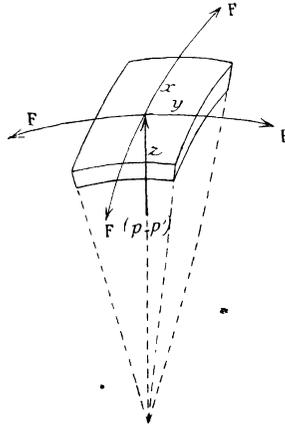


FIG. 1.

Sous l'action de cette traction il y aura allongement dans les directions xy (c'est-à-dire augmentation du rayon) et contraction suivant z (diminution d'épaisseur) suivant les formules

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = (a - b) \frac{R}{2e}(p - p') = a(1 - \sigma) \frac{R}{2e}(p - p'), \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -2b \frac{R}{2e}(p - p') = -a\sigma \frac{R}{e}(p - p'). \end{array} \right.$$

Résumé. — En superposant les effets (1), (2), on aura la *déformation du vase* :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -a \left[(1 - 2\sigma) p' - (1 - \sigma) \frac{R}{2e}(p - p') \right], \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -a \left[(1 - 2\sigma) p' + \sigma \frac{R}{e}(p - p') \right]. \end{array} \right.$$

On déduirait facilement de là : la variation de la capacité interne (ΔV_1), car $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$, d'où

$$\left(\frac{\Delta V_1}{V_1}\right) = 3 \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -3a \left[(1 - 2\sigma) p' - (1 - \sigma) \frac{R}{2e} (p - p') \right];$$

et la variation de volume du solide (ΔV), car $V = 4\pi R^2 e$, d'où

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = 2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -a(1 - 2\sigma) \left[3p' - \frac{R}{e} (p - p') \right].$$

Remarque. — Si $(p - p') \neq 0$, comme $\frac{R}{e}$ est très grand, les termes en p' disparaissent devant ceux en $(p - p')$.

Au contraire, si $(p - p') = 0$, les formules (I) se réduisent à leurs termes en p' .

II. — VASE CYLINDRIQUE.

Soit un cylindre de rayon R , épaisseur e (négligeable devant R), longueur l , terminé par deux bases planes infiniment minces et parfaitement rigides, et soumis à des pressions p' sur la face externe, p sur la face interne [pression que nous décomposerons comme précédemment en p' et $(p - p')$], et enfin p'' sur les bases.

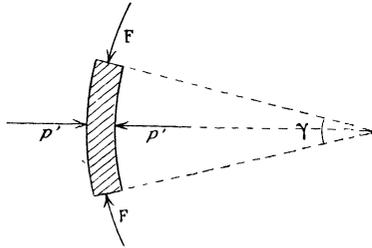


FIG. 2.

1° *Effet des pressions latérales p' .* — Découpons un élément de volume compris entre deux plans passant par l'axe et faisant entre eux un angle α et par deux plans perpendiculaires à l'axe et distants de l'unité de longueur.

Ces pressions p' s'exerçant sur deux surfaces différentes, l'équilibre de l'élément exige une pression superficielle (F par unité de longueur) telle que :

$$p'(R + e) \alpha - p'R\alpha = 2F \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou} \quad F = p'e,$$

et par unité de surface $\left(\frac{F}{e}\right) = p'$.

L'élément de volume est donc soumis à des pressions p' dans deux directions, et on a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2bp' = 2a\sigma p', \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -(a - b) p' = -a(1 - \sigma) p', \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -(a - b) p' = -a(1 - \sigma) p'. \end{array} \right.$$

2° *Effet de la pression interne* ($p - p'$). — L'équilibre de l'élément de volume exige une tension superficielle telle que $(p - p') = \frac{F}{R}$; la

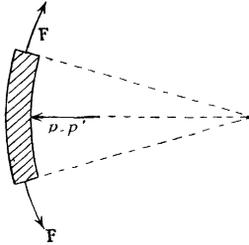


FIG. 3

traction $\left(\frac{F}{e}\right) = \frac{R}{e} (p - p')$ par unité de surface, qui s'exerce dans une seule direction produit les déformations :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = -b \frac{R}{e} (p - p') = -a\sigma \frac{R}{e} (p - p'), \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = a \frac{R}{e} (p - p') = a \frac{R}{e} (p - p'), \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -b \frac{R}{e} (p - p') = -a\sigma \frac{R}{e} (p - p'). \end{array} \right.$$

3° *Effet de la pression p'' sur les bases.* — Elle donne évidemment :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = -ap'' = -ap'', \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = +bp'' = a\sigma p'', \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = +bp'' = a\sigma p''. \end{array} \right.$$

Résumé. — En superposant les résultats (3), (4), (5), on a finalement pour la *déformation du vase cylindrique mince* :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = a \left[2\sigma p' - \sigma \frac{R}{e} (p - p') - p'' \right], \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -a \left[(1 - \sigma) p' - \frac{R}{e} (p - p') - \sigma p'' \right], \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -a \left[(1 - \sigma) p' + \sigma \frac{R}{e} (p - p') - \sigma p'' \right]; \end{array} \right.$$

et, si l'on veut la *variation de la capacité interne* (ΔV_1), on a :

$$V_1 = \pi R^2 l, \quad \left(\frac{\Delta V_1}{V_1}\right) = 2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta l}{l}\right);$$

d'où :

$$\left(\frac{\Delta V_1}{V_1}\right) = -a \left[2(1 - 2\sigma) p' - (2 - \sigma) \frac{R}{e} (p - p') + (1 - 2\sigma) p'' \right];$$

et pour la *variation du volume de la matière solide* :

$$V = 2\pi R e l, \quad \left(\frac{\Delta V}{V}\right) = \left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right) + \left(\frac{\Delta l}{l}\right),$$

d'où :

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = -a(1 - 2\sigma) \left[2p' - \frac{R}{e} (p - p') + p'' \right].$$

Toutes les formules que nous venons d'obtenir, (I), (II), sont en parfait accord avec celles que l'on obtient en appliquant les résultats de la théorie générale de l'élasticité et en regardant e comme négligeable par rapport à R , ce qui est le cas usuel.
