



HAL
open science

Sur la théorie de l'écoulement des liquides par les orifices en mince paroi, circulaires ou rectangulaires allongés; calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels de l'orifice

J. Boussinesq

► **To cite this version:**

J. Boussinesq. Sur la théorie de l'écoulement des liquides par les orifices en mince paroi, circulaires ou rectangulaires allongés; calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels de l'orifice. *J. Phys. Theor. Appl.*, 1892, 1 (1), pp.265-285. 10.1051/jphystap:018920010026500 . jpa-00239623

HAL Id: jpa-00239623

<https://hal.science/jpa-00239623>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES PAR LES ORIFICES EN MINCE PAROI, CIRCULAIRES OU RECTANGULAIRES ALLONGÉS; CALCUL APPROCHÉ DU DÉBIT ET DE SA RÉPARTITION ENTRE LES DIVERS ÉLÉMENTS SUPERFICIELS DE L'ORIFICE;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. Lorsqu'un vase plein de liquide est percé, à travers une partie plane et mince de sa paroi, d'un orifice σ , de dimensions très petites par rapport à ses distances tant aux bords de cette partie plane qu'au reste de la surface limitant dans le vase la masse liquide, la vitesse V de celle-ci, à chaque instant et en chaque point intérieur, dépend assez simplement des volumes dq que débitent par unité de temps, à l'époque considérée, les divers éléments superficiels $d\sigma$ de l'orifice, et des distances r de ceux-ci $d\sigma$ au point intérieur dont il s'agit; car elle est la résultante de vitesses ou d'*appels* élémentaires, dirigés vers les éléments respectifs $d\sigma$ et égaux à $\frac{dq}{2\pi r^2}$. En d'autres termes, le potentiel des vitesses y est celui d'attraction newtonienne $\frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{r}$, comme je l'ai démontré aux pages 542 à 545 de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mais, entre l'orifice σ et la section contractée $m\sigma$ de la veine où les filets fluides deviennent sensiblement rectilignes et parallèles, des difficultés d'intégration jusqu'ici insurmontables se présentent, par suite de la forme non linéaire des conditions spéciales à la surface libre; et il en résulte, même en se bornant au cas ordinaire d'un écoulement permanent, l'impossibilité de déterminer, par le calcul *seul*, le débit total q , ainsi que son mode de répartition sur l'aire σ .

Toutefois, en attribuant au mode de répartition dont il s'agit, c'est-à-dire à la fonction qui exprime le débit, par unité d'aire, des diverses régions de σ , une forme algébrique aussi simple que possible, la forme entière par rapport à leurs coordonnées, on conçoit qu'un choix convenable de ses paramètres (pris en nombre suffisant) au moyen de tout autant d'équations demandées à la théorie ou à l'expérience, puisse fournir une expression approchée de cette fonction et une valeur sensiblement exacte du coef-

ficient m de débit. Or il est facile d'obtenir quatre pareilles conditions ou équations.

La première, expérimentale, consiste à mesurer, par un tube double de Pitot, comme celui dont M. Bazin s'est servi pour avoir la pression et la vitesse dans les nappes des déversoirs, le débit au centre de σ , c'est-à-dire la vitesse du filet central, dont on connaît déjà la direction, évidemment normale au plan de l'orifice, du moins pour toutes les formes usuelles et symétriques de celui-ci. M. Bazin a ainsi trouvé, au centre d'un orifice circulaire de $0^m, 20$ de diamètre,

$$V = 0,632 V_0,$$

et, au centre d'un orifice rectangulaire allongé (sans contraction latérale) de $0^m, 80$ de longueur sur $0^m, 20$ de largeur,

$$V = 0,690 V_0,$$

V_0 désignant, dans les deux cas, la vitesse sur le contour, telle qu'on la déduit de la formule théorique de D. Bernoulli, ou même, simplement, de Torricelli, $\sqrt{2gh}$, quand l'écoulement a lieu sous une certaine hauteur de charge h [de 1^m environ dans les observations de M. Bazin] (¹).

J'avais déjà donné, dans mes *Eaux courantes* (p. 552 et 554), les seconde et troisième équations, fournies par la théorie : elles expriment, l'une, l'annulation du débit par unité d'aire au bord de l'orifice σ , où la vitesse, V , est tangente au plan de σ , l'autre, l'égalité à V_0 de cette vitesse, V , résultant des appels $\frac{dq}{2\pi r^2}$ qui s'y trouvent exercés de tous les points de l'orifice.

Enfin, la quatrième, mixte, en ce qu'elle emprunte à l'expérience la notion de la section contractée $m\sigma$, sera celle dont se servent les auteurs d'Hydraulique pour démontrer que le coefficient de contraction m excède $\frac{1}{2}$. On la forme en appliquant le

(¹) Il faut donc rejeter l'hypothèse de l'annulation de la vitesse au centre des orifices, admise par Jamin, dans le Tome I de son *Cours de Physique* (p. 326), et que j'avais cru, aux pages 552 et suivantes de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, pouvoir accepter, sur la foi d'une expérience de Lajerhjelm trop peu précise ou, peut-être, rapportée trop sommairement dans les *Expériences hydrauliques* de Poncelet et Lesbros (*Savants étrangers*, t. III, p. 401; 1832), par lesquelles seules j'en ai eu connaissance.

principe des quantités de mouvement, suivant la normale au plan de l'orifice menée vers le dehors, à tout le liquide qui se trouve, à l'époque t , en amont de cette section contractée $m\sigma$, jusqu'à une demi-sphère décrite, dans le vase, autour du centre de l'orifice, avec un rayon assez grand pour que le liquide y afflue avec des vitesses insensibles. La quantité de mouvement de ce liquide croît, pendant l'instant dt , de celle, $\rho m\sigma V_0^2 dt$, que possède la masse fluide $\rho m\sigma V_0 dt$ sortie durant le même instant par la section contractée, avec la vitesse V_0 ; et il faut évaluer sa valeur par unité de temps, $\rho m\sigma V_0^2$, à la somme algébrique des pressions que supporte, suivant la normale au plan de l'orifice, la surface de tout le fluide considéré. Or les parties de cette surface constituées soit par la paroi σ' où est percé l'orifice, et dont nous appellerons $d\sigma'$ les divers éléments, soit par la surface libre et la section contractée de la veine, qui ont en tout la projection σ sur le plan de σ' , supportent, d'après la formule de D. Bernoulli, des pressions, par unité d'aire, inférieures de $\frac{1}{2}\rho V^2$ ou de $\frac{1}{2}\rho V_0^2$ à celles qu'éprouvent les éléments de la demi-sphère situés aux mêmes niveaux, V désignant la vitesse du fluide qui glisse sur l'élément $d\sigma'$ de la paroi, et V_0 la vitesse, à fort peu près commune, de celui qui sillonne la surface libre ou qui traverse la section contractée. Il vient donc

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_0^2\sigma + \int V^2 d\sigma'\right)$$

pour la somme algébrique cherchée de pressions; et la quatrième de nos équations, obtenue en l'égalant à $\rho m\sigma V_0^2$, sera, après division par $\rho\sigma V_0^2$,

$$(1) \quad m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{V^2}{V_0^2} \frac{d\sigma'}{\sigma}.$$

Je me propose de démontrer que, dans les deux cas simples d'un orifice circulaire de rayon R et d'un orifice rectangulaire allongé de largeur $2b$, où le débit par unité d'aire de σ et les vitesses V sur la paroi dépendent d'une seule variable, savoir, la distance x au centre ou la distance y au grand axe, l'on se trouve ainsi conduit, avec une assez grande approximation, aux véritables coefficients m de débit, qui, d'après les observations très soignées

de M. Bazin, sont

$$m = 0,598$$

pour l'orifice circulaire et

$$m = 0,626$$

pour l'orifice rectangulaire allongé.

II. Étudions d'abord le cas de l'orifice circulaire, où, à la distance quelconque r du centre, le débit par unité d'aire, supposé de forme entière par rapport aux coordonnées, sera évidemment $V_0 f\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$ si f désigne un certain polynôme. Alors, pour satisfaire à la seconde condition, exigeant que f s'annule sur le contour de l'orifice, c'est-à-dire à la limite $r = R$, il faudra prendre cette fonction divisible par $1 - \frac{r^2}{R^2}$, ou lui attribuer, en posant $\frac{r^2}{R^2} = s$ et appelant c_0, c_1, c_2, \dots des coefficients constants, la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = \left(c_0 + c_1 \frac{r^2}{R^2} + c_2 \frac{r^4}{R^4} + \dots\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ \text{ou} \\ f(s) = \Sigma c_n s^n (1 - s) = \Sigma c_n (s^n - s^{n+1}). \end{array} \right.$$

Par suite, le débit sera, pour une couronne élémentaire $d\sigma = 2\pi r dr$ de l'aire de l'orifice,

$$dq = 2\pi r dr V_0 f(s) = \pi R^2 V_0 f(s) ds,$$

et, pour tout l'orifice,

$$q = \sigma V_0 \int_0^1 f(s) ds,$$

quantité dont le quotient par σV_0 est très sensiblement le *coefficient de contraction* (ou même de débit) m . Il vient donc, comme expression de celui-ci, en effectuant finalement l'intégration de $f(s) ds$ ou de $\Sigma c_n (s^n - s^{n+1}) ds$,

$$(3) \quad m = \int_0^1 f(s) ds = \sum \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{c_0}{1 \cdot 2} + \frac{c_1}{2 \cdot 3} + \frac{c_2}{3 \cdot 4} + \dots$$

Au centre, où $s = 0$, l'expression (2) de $f(s)$ se réduit à c_0 , ce qui y donne, pour le débit de l'unité d'aire, $c_0 V_0$; et la première

condition, fournie par l'expérience, revient à prendre

$$(4) \quad c_0 = 0,632.$$

Il reste à exprimer, en fonction de c_0, c_1, c_2, \dots , les vitesses, V_0 , au bord de l'orifice, et V , près des éléments $d\sigma'$ de paroi situés, dans le plan de l'orifice, à une distance donnée R' du centre, afin d'utiliser, pour la détermination de f , les deux dernières conditions indiquées. A cet effet, évaluons d'abord le potentiel $\frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{r}$ aux distances R' du centre supérieures à R . On le calcule assez facilement pour une couronne élémentaire potentiante de rayon ι et de largeur $d\iota$, ou de masse (fictive) totale

$$2\pi\iota d\iota V_0 f(s) = \pi R^2 V_0 f(s) ds,$$

au moyen d'une décomposition de la couronne en éléments parallélogrammes par des droites émanées du point potentié ⁽¹⁾. Il vient ainsi, par unité de masse potentiante,

$$\frac{1}{\pi^2 R'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\iota^2}{R'^2} \sin^2 \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha;$$

résultat d'où l'on déduit, en multipliant par $\pi R^2 V_0 f(s) ds$ et intégrant de $s = 0$ à $s = 1$, le potentiel total

$$(5) \quad \varphi = \frac{V_0}{\pi} \frac{R^2}{R'} \int_0^1 f(s) ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{R'^2} s\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Sa dérivée en R' , changée de signe, est l'expression de la vitesse cherchée V . Enfin, celle-ci, divisée par V_0 , devient, après une réduction évidente et en posant, pour abrégier, $\frac{R^2}{R'^2} = \beta$,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{\beta}{\pi} \int_0^1 f(s) ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \beta s \sin^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\beta}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^1 f(s) (1 - \beta s \sin^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}} ds. \end{aligned} \right.$$

(1) Voir, par exemple, les pages 113 à 116 de mon Volume intitulé : *Applications des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques*, etc.

Développons le second membre en série par l'application de la formule du binôme à $(1 - \beta s \sin^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}}$. Nous aurons

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2} & \left[\int_0^1 f(s) ds + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \beta \int_0^1 s f(s) ds \right. \\ & + 5 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right)^2 \beta^2 \int_0^1 s^2 f(s) ds + \dots \\ & \left. + (2q+1) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q} \right)^2 \beta^q \int_0^1 s^q f(s) ds + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

ou bien, après substitution de $\Sigma c_n (s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, suivie de l'effectuation des calculs, et en observant que $\int_0^1 f(s) ds$ ne diffère pas sensiblement du coefficient m_c de contraction,

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2} & \left[m_c + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \beta \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \right. \\ & + 5 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right)^2 \beta^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \dots \\ & \left. + (2q+1) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q} \right)^2 \beta^q \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

III. Le troisième membre de (6) permettra de calculer sous forme finie la vitesse au bord $R' = R$ de l'orifice, où $\beta = 1$. Dans ce but, on prendra comme nouvelle variable, destinée à tenir lieu de α , la tangente, τ , de la moitié de cet angle α , ce qui donnera

$$d\alpha = \frac{2d\tau}{1+\tau^2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{2\tau}{1+\tau^2}.$$

En posant d'ailleurs, pour abrégé, $\theta = 4\tau^2 s$ et substituant $\Sigma c_n (s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, il vient

$$(9) \quad (\text{Pour } R' = R) \quad \frac{V}{V_0} = \frac{2}{\pi} \sum c_n \int_0^1 (1+\tau^2)^2 d\tau \int_0^{4\tau^2} \frac{\theta^n (4\tau^2 - \theta) d\theta}{(4\tau^2)^{n+2} [\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}]^3}.$$

Or

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(4\tau^2)^{n+2}} \int_0^{4\tau^2} \frac{\theta^n (4\tau^2 - \theta) d\theta}{[\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}]^3} \\ & = \frac{2}{(4\tau^2)^{n+2}} \int_{\theta=0}^{\theta=4\tau^2} \theta^n (4\tau^2 - \theta) d \frac{1}{\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}}; \end{aligned}$$

et, en intégrant par parties, l'on a :

1° Pour $n = 0$,

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(4\tau^2)^2} \int_0^{\sqrt{4\tau^2 - \theta}} \frac{(4\tau^2 - \theta) d\theta}{[\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}]^3} &= \frac{-2 \cdot 4\tau^2}{(4\tau^2)^2(1+\tau^2)} - \frac{4}{(4\tau^2)^2} \int_0^{\sqrt{4\tau^2 - \theta}} \frac{-d\theta}{2\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}} \\ &= \frac{-1}{2\tau^2(1+\tau^2)} - \frac{4}{(4\tau^2)^2} [\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}]^{\frac{1}{2}}_{\theta=0} = \frac{1}{2\tau^2} \left(1 - \frac{1}{1+\tau^2}\right) = \frac{1}{2(1+\tau^2)}; \end{aligned} \right.$$

2° Pour $n > 0$,

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(4\tau^2)^{n+2}} \int_0^{\sqrt{4\tau^2 - \theta}} \frac{\theta^n (4\tau^2 - \theta) d\theta}{[\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}]^3} &= \frac{I_{n+1} - I_n}{2\tau^2}, \\ \text{où } I_n &= \frac{n}{(4\tau^2)^n} \int_0^{\sqrt{4\tau^2 - \theta}} \frac{\theta^{n-1} d\theta}{\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}}. \end{aligned} \right.$$

Mais, pour $n > 0$,

$$I_n = \frac{-2n}{(4\tau^2)^n} \int_{\theta=0}^{\theta=\sqrt{4\tau^2 - \theta}} \theta^{n-1} d\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta};$$

ce qui donne, quand $n = 1$, $I_1 = 1$, et, quand n est > 1 , en intégrant par parties, puis dédoublant $\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}$ en $\frac{(1+\tau^2)^2}{\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}} - \frac{\theta}{\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}}$,

$$I_n = -\frac{n(1-\tau^2)}{2\tau^2} + n \frac{(1+\tau^2)^2}{2\tau^2} I_{n-1} - 2(n-1)I_n,$$

ou bien, après avoir isolé I_n ,

$$(12) \quad I_n = \frac{n}{2n+1} \frac{(1+\tau^2)^2 I_{n-1} - (1-\tau^2)}{2\tau^2}.$$

Joignons cette formule (12), spécifiée successivement pour $n = 2, 3, 4, \dots$, à la précédente $I_1 = 1$, et nous aurons

$$(13) \left\{ \begin{aligned} I_1 &= 1, & I_2 &= 1 + \frac{\tau^2}{3}, & I_3 &= 1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{10}, \\ I_4 &= 1 + \frac{3\tau^2}{5} + \frac{\tau^4}{5} + \frac{\tau^6}{35}, & I_5 &= 1 + \frac{2\tau^2}{3} + \frac{2\tau^4}{7} + \frac{\tau^6}{14} + \frac{\tau^8}{126}, \\ I_6 &= 1 + \frac{5\tau^2}{7} + \frac{5\tau^4}{14} + \frac{5\tau^6}{42} + \frac{\tau^8}{42} + \frac{\tau^{10}}{462}, \\ I_7 &= 1 + \frac{3\tau^2}{4} + \frac{5\tau^4}{12} + \frac{\tau^6}{6} + \frac{\tau^8}{22} + \frac{\tau^{10}}{11 \cdot 12} + \frac{\tau^{12}}{11 \cdot 12 \cdot 13}, & \dots \end{aligned} \right.$$

d'où il résulte

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{I_2 - I_1}{2\tau^2} = \frac{1}{6}, & \frac{I_3 - I_2}{2\tau^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{5} \right), \\ \frac{I_4 - I_3}{2\tau^2} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{7} \right), \\ \frac{I_5 - I_4}{2\tau^2} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} + \frac{3\tau^2}{7} + \frac{3\tau^4}{14} + \frac{5\tau^6}{126} \right), \\ \frac{I_6 - I_5}{2\tau^2} = \frac{1}{14} \left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{3} + \frac{\tau^6}{9} + \frac{\tau^8}{66} \right), \\ \frac{I_7 - I_6}{2\tau^2} = \frac{1}{42} \left(\frac{3}{4} + \frac{5\tau^2}{4} + \tau^4 + \frac{5\tau^6}{11} + \frac{5\tau^8}{44} + \frac{7\tau^{10}}{41 \cdot 13} \right), \dots \end{cases}$$

Telles sont les valeurs respectives du premier membre de (11) pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, à substituer dans le second membre de (9), avec celle que donne (10) pour $n = 0$ et qui est $\frac{1}{2(1+\tau^2)}$.

Les multiplications par $(1+\tau^2)^2$ et les intégrations relatives à τ entre les deux limites $\tau = 0, \tau = 1$ n'offrent ensuite aucune difficulté, et l'équation (9) donne finalement, après additions numériques et réductions,

$$(15) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(au bord de l'orifice)} \\ \frac{V}{V_0} = \frac{4}{3\pi} \left(c_0 + \frac{7}{15} c_1 + \frac{157}{15 \cdot 35} c_2 + \frac{803}{15 \cdot 35 \cdot 7} c_3 + \frac{62417}{15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot 11} c_4 \right. \\ \left. + \frac{293327}{27 \cdot 49 \cdot 11^2 \cdot 13} c_5 + \frac{1077385}{9 \cdot 49 \cdot 11^2 \cdot 13^2} c_6 + \dots \right), \end{array} \right\}$$

résultat bien d'accord avec celui que fournit un peu plus directement l'emploi, comme variables d'intégration, de coordonnées polaires autour du point du bord où l'on évalue la vitesse V (*Eaux courantes*, p. 560 et 561).

IV. Nous pouvons maintenant, d'une part, en vertu de la troisième des quatre conditions auxquelles nous savons astreint le mode de distribution $V_0 f(s)$ du débit, poser, dans (15), $V = V_0$, et, d'autre part, substituer l'expression (8) de $\frac{V}{V_0}$ dans la dernière, (1), des mêmes conditions, où l'on aura

$$\frac{d\sigma'}{\sigma} = \frac{2\pi R' dR'}{\pi R^2} = d \frac{1}{\beta} = - \frac{d\beta}{\beta^2},$$

avec β décroissant de 1 à zéro. Il viendra, entre les constantes c_1 ,

c_2, c_3, \dots , les deux équations cherchées

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{7}{15} c_1 + \frac{157}{15 \cdot 35} c_2 + \frac{803}{15 \cdot 35 \cdot 7} c_3 + \frac{62417}{15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot 11} c_4 \\ + \frac{293327}{27 \cdot 49 \cdot 11^2 \cdot 13} c_5 + \frac{1077385}{9 \cdot 49 \cdot 11^2 \cdot 13^2} c_6 + \dots = \frac{3\pi}{4} - c_0, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \int_0^1 \left[m + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \beta \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \right. \\ &\quad + 5 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right)^2 \beta^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \dots \\ &\quad + (2q+1) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q} \right)^2 \\ &\quad \left. \times \beta^q \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \dots \right]^2 d\beta, \end{aligned} \right.$$

où l'on sait déjà, par (4), que $c_0 = 0,632$, et, par (3), que le coefficient de contraction m égale $\sum \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ (1).

La somme des coefficients de la série qui figure par son carré sous le signe f , dans (17), est évidemment la valeur de cette même série pour $\beta = 1$, valeur qui, d'après (8), où il faut faire alors $V = V_0$, est 2. On a donc la relation, très importante pour les calculs suivants,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} m + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} + 5 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \dots \\ + (2q+1) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q} \right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \dots = 2. \end{aligned} \right.$$

V. Cela posé, convenons de garder, dans l'expression (2) de $f(s)$, avec le coefficient c_0 donné, un seul des autres, c_1, c_2, c_3, \dots , savoir, celui qui permettra le mieux de satisfaire aux équations (16) et (17). Essayons donc successivement c_1, c_2, c_3, \dots

(1) En réduisant, sous le signe f , la quantité entre crochets à son premier terme, et négligeant par conséquent tous les autres, essentiellement positifs d'après leur signification telle qu'elle paraît au second membre de (7), il vient, à la place de l'équation (17), l'inégalité du second degré $m > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} m^2$; d'où l'on déduit évidemment $m > 2(2 - \sqrt{3})$ ou $m > 0,536$. Le coefficient de contraction m admet donc, dans toutes les hypothèses possibles, la limite inférieure 0,536, un peu plus avantageuse que celle, 0,5, à laquelle on s'arrête d'ordinaire dans les Traités d'Hydraulique en négligeant le dernier terme de l'équation (1).

L'équation (16), où

$$\frac{3}{4} \pi - c_0 = 2,3562 - 0,632 = 1,7242,$$

donnera, dans ces divers cas,

$$(19) \quad \begin{cases} c_1 = 3,6947, & c_2 = 5,7656, & c_3 = 7,8909, \\ c_4 = 10,0502, & c_5 = 12,2329, & c_6 = 14,4320, \dots, \end{cases}$$

et les valeurs correspondantes (3) de m seront

$$(20) \quad \begin{cases} m_1 = 0,9318, & m_2 = 0,7965, & m_3 = 0,7105, \\ m_4 = 0,6510, & m_5 = 0,6073, & m_6 = 0,5737, \dots \end{cases}$$

Il reste à calculer le second membre de (17). On trouve, pour la série qui y figure sous le signe f , les expressions respectives

$$\begin{aligned} & (0,9318 + 0,3099\beta + 0,1669\beta^2 + \dots)^2 = 0,8682 + 0,5775\beta + 0,4071\beta^2 + \dots, \\ & \quad \left\{ \begin{aligned} & (0,7965 + 0,2952\beta + 0,1722\beta^2 + 0,1154\beta^3 + \dots)^2 \\ & = 0,6344 + 0,4703\beta + 0,3614\beta^2 + 0,2855\beta^3 + \dots, \end{aligned} \right. \\ & \quad \left\{ \begin{aligned} & (0,7105 + 0,2763\beta + 0,1691\beta^2 + 0,1179\beta^3 + \dots)^2 \\ & = 0,5049 + 0,3926\beta + 0,3167\beta^2 + 0,2610\beta^3 + \dots, \end{aligned} \right. \\ \left. \right\} & (0,6510 + 0,2585\beta + 0,1632\beta^2 + 0,1170\beta^3 + 0,0893\beta^4 + 0,0709\beta^5 + 0,0578\beta^6 + \dots)^2 \\ & = 0,4238 + 0,3365\beta + 0,2793\beta^2 + 0,2367\beta^3 + 0,2034\beta^4 + 0,1767\beta^5 + 0,1548\beta^6 + \dots, \\ & \quad \left\{ \begin{aligned} & (0,6073 + 0,2428\beta + 0,1565\beta^2 + 0,1145\beta^3 + 0,0890\beta^4 + 0,0718\beta^5 \\ & \quad + 0,0593\beta^6 + 0,0500\beta^7 + 0,0428\beta^8 + 0,0371\beta^9 + 0,0324\beta^{10} + \dots)^2 \\ & = 0,3688 + 0,2949\beta + 0,2490\beta^2 + 0,2151\beta^3 + 0,1882\beta^4 + 0,1662\beta^5 \\ & \quad + 0,1479\beta^6 + 0,1324\beta^7 + 0,1192\beta^8 + 0,1078\beta^9 + 0,0980\beta^{10} + \dots, \end{aligned} \right. \\ & \quad \left\{ \begin{aligned} & (0,5737 + 0,2293\beta + 0,1498\beta^2 + 0,1113\beta^3 + 0,0877\beta^4 + \dots)^2 \\ & = 0,3291 + 0,2631\beta + 0,2245\beta^2 + 0,1964\beta^3 + 0,1742\beta^4 + \dots, \end{aligned} \right. \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or la somme des coefficients (tous positifs) des seconds membres, évidemment exprimée, dans chaque cas, par le carré de la série (18), devient, à la limite, le carré, 4, de la valeur de cette série; d'où il suit que la somme totale des coefficients non écrits explicitement aux seconds membres est l'excédent de 4 sur celle des coefficients écrits, au nombre, respectivement, de 3, 4, 4, 7, 11, 5, . . . , et qu'elle vaut, dans ces divers cas,

$$2,1471, \quad 2,2484, \quad 2,5248, \quad 2,1887, \quad 1,9125, \quad 2,8127, \quad \dots$$

D'ailleurs, dans le produit, intégré entre les deux limites 0 et 1, des mêmes seconds membres par $d\beta$, les coefficients non écrits, et qui viennent respectivement après celui de β^2 , ou de β^3 , ou de β^4 , ou de β^6 , ou de β^{10} , ou de β^4 , ... , seraient affectés des diviseurs entiers supérieurs à 3, ou à 4, ou à 4, ou à 7, ou à 11, ou à 5, ... ; et il en résulterait, en tout, des intégrales positives, évidemment inférieures, respectivement, à

$$\frac{2,1471}{4}, \quad \frac{2,2484}{5}, \quad \frac{2,5248}{5}, \quad \frac{2,1887}{8}, \quad \frac{1,9125}{12}, \quad \frac{2,8127}{6}, \quad \dots,$$

ou, après effectuation, à

$$(21) \quad 0,3368, \quad 0,4497, \quad 0,5050, \quad 0,2736, \quad 0,1594, \quad 0,4688, \quad \dots$$

L'intégrale définie qui figure dans (17) aura donc pour valeur ce que donnent, multipliés par $d\beta$ et intégrés de zéro à 1, les termes explicitement écrits aux seconds membres ci-dessus, c'est-à-dire

$$0,8682 + \frac{0,5775}{2} + \frac{0,4071}{3}, \quad \text{etc.,}$$

ou bien, tous calculs faits,

$$(22) \quad 1,2927, \quad 1,0614, \quad 0,8720, \quad 0,8366, \quad 0,7890, \quad 0,6195, \quad \dots,$$

augmenté d'une fraction inconnue (mais notable) de l'expression (21) correspondante. Il vient ainsi, dans les quatre premiers cas, des totaux moindres que

$$\begin{aligned} 1,2927 + 0,5368 &= 1,8295, & 1,0614 + 0,4497 &= 1,5110, \\ 0,8720 + 0,5050 &= 1,3770, & 0,8366 + 0,2736 &= 1,1102, \end{aligned}$$

et donnant, par suite, au second membre de (17), des valeurs sensiblement inférieures à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1,8295}{8} &= 0,7287, & \frac{1}{2} + \frac{1,5110}{8} &= 0,6889, \\ \frac{1}{2} + \frac{1,3770}{8} &= 0,6721, & \frac{1}{2} + \frac{1,1102}{8} &= 0,6388, \end{aligned}$$

alors que le premier membre de (17) est respectivement, d'après (20),

$$0,9318, \quad 0,7965, \quad 0,7105, \quad 0,6510,$$

et, par conséquent, plus fort. Au contraire, dans les cas qui suivent le cinquième, l'intégrale définie dépasserait de même sensiblement sa partie principale ou explicitement calculée $0,6195, \dots$, prise seule; et le second membre de (17) excéderait, par suite, d'une manière notable, $\frac{1}{2} + \frac{0,6195}{8} = 0,5774, \dots$, alors que, d'après (20), le premier membre, $0,5737, \dots$, est inférieur à cette limite.

VI. Il ne peut donc y avoir égalité approchée des deux membres de (17) que dans le cinquième cas, où l'intégrale définie qui figure au second membre de (17) est la somme de $0,7890$ et d'une partie notable, mais inconnue, de $0,1594 = 2(0,0797)$. Appelant θ un nombre compris entre zéro et 1, écrivons cette partie inconnue $0,0797 \pm 0,0797\theta$; ce qui donne, pour l'intégrale,

$$0,8687 \pm 0,0797\theta.$$

Et le second membre de (17) devient lui-même

$$(23) \quad 0,6086 \pm 0,0100\theta,$$

quantité qui se confond bien, sensiblement, avec le premier membre $m_3 = 0,6073$.

En voyant comment décroissent, sous le signe f du second membre de (17), les différences des coefficients successifs écrits, $0,3688, 0,2949, \dots, 0,0980$, de la série en β , on peut augurer que le premier coefficient non écrit serait $0,0980 - 0,0084 = 0,0896$; ce qui donnerait à fort peu près $0,0896\beta^{11}$ pour le terme correspondant et réduirait dès lors à

$$1,9125 - 0,0896 = 1,8229$$

la somme des coefficients non écrits. Il en résulterait, pour l'intégrale à calculer, une valeur de la forme

$$0,7890 + \frac{0,0896}{12} + \frac{1,8229}{13} \frac{1 \pm \theta}{2} = 0,8666 \pm 0,0701\theta.$$

Et le second membre de (17) serait, au lieu de (23),

$$(23 \text{ bis}) \quad 0,6083 \pm 0,0088\theta,$$

expression où il est certain que θ , quoique inconnu, se trouve notablement au-dessous de sa limite 1, et dont, par conséquent,

l'excédent $0,0010 \pm 0,0088\theta$, sur le premier membre $m_3 = 0,6073$, est loin d'atteindre la valeur absolue $0,01$. On peut donc regarder l'équation (17) comme très sensiblement vérifiée par l'emploi, dans la formule (2), des deux coefficients $c_0 = 0,632$ et $c_3 = 12,2329$.

Une plus grande approximation du second membre de (17) exigerait des calculs assez laborieux.

VII. En résumé, le débit par unité d'aire, à la distance ε du centre d'un orifice circulaire ayant un rayon donné R et sur le bord duquel la formule de D. Bernoulli indique une certaine vitesse V_0 , admettra comme expression approchée

$$(24) \quad \begin{cases} V_0 f\left(\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right) = V_0 \left(0,632 + 12,2329 \frac{\varepsilon^{10}}{R^{10}}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right), \\ \text{ou} \\ V_0 f(s) = V_0 (0,632 + 12,2329 s^5)(1 - s). \end{cases}$$

En même temps, le coefficient de contraction m sera très sensiblement $0,6073$, ou plutôt un peu moins, vu l'existence de petits frottements, négligés ici, qui, pour la vitesse $0,632 V_0$ observée au centre, doivent réduire légèrement le débit vers les bords. Or cette valeur théorique, $m = 0,6$ environ, se trouve bien d'accord avec le coefficient expérimental de débit $m = 0,598$, obtenu par M. Bazin (1).

D'après (24), la dérivée $f'(s)$, divisée par $12,2329$, est

$$-6s^5 + 5s^4 - 0,051664.$$

On voit, sur sa propre dérivée $-10s^3(3s - 2)$, que, de $s = 0$ à $s = \frac{2}{3}$, elle croît, pour décroître ensuite : négative de $s = 0$ à $s = 0,36903$, elle est positive de $s = 0,36903$ à $s = 0,81370$, et, de nouveau, négative au delà de $s = 0,81370$. Donc, le débit par

(1) On sait que les orifices très petits donnent des coefficients de débit plus forts, à cause, sans doute, d'un effet de capillarité ou d'adhérence de la couche superficielle de la veine sur l'étroite paroi cylindrique de l'orifice, effet propre à rapprocher la veine elle-même de cette forme cylindrique et à diminuer par conséquent la contraction. Mais son influence devait être complètement insensible dans l'orifice de $0^m,20$ de diamètre dont M. Bazin mesurait le débit; car des observations d'ingénieurs américains sur des orifices circulaires de diamètres beaucoup plus grands encore, et atteignant jusqu'à $0^m,60$, ont également fourni des coefficients de débit très voisins de $0,6$.

unité d'aire (24), ou composante de la vitesse suivant la normale au plan de l'orifice, décroît lentement, autour du centre (par suite de l'inclinaison de plus en plus grande des filets), jusqu'à la distance $r = \sqrt{0,36903} R = 0,6075 R$, où elle atteint son minimum $0,45160 V_0$. Au delà, l'influence de l'accroissement de vitesse, dû aux diminutions de pression qu'entraînent les forces centrifuges, l'emporte sur celle de l'inclinaison; et le débit par unité d'aire grandit, jusqu'à la distance $r = \sqrt{0,81370} R = 0,90205 R$ au centre, où elle atteint son maximum $0,93065 V_0$. Aux distances supérieures, l'influence des inclinaisons de plus en plus fortes des filets l'emporte de nouveau, pour réduire finalement à zéro le débit $V_0 f(1)$ sur le bord, où, cependant, la vitesse d'écoulement atteint son maximum V_0 .

VIII. Passons maintenant au cas d'un orifice rectangulaire allongé, de largeur $2b$. Le débit par unité d'aire, supposé encore fonction entière des coordonnées, devra évidemment y être, aux diverses distances η de l'axe longitudinal, $V_0 f\left(\frac{\eta^2}{b^2}\right)$, avec f de la forme

$$(25) \quad f\left(\frac{\eta^2}{b^2}\right) = \left(c_0 + c_1 \frac{\eta^2}{b^2} + c_2 \frac{\eta^4}{b^4} + c_3 \frac{\eta^6}{b^6} + \dots\right) \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right),$$

ou, plus simplement, en appelant s le rapport $\frac{\eta^2}{b^2}$,

$$(25 \text{ bis}) \quad f(s) = (\Sigma c_n s^n)(1 - s) = \Sigma c_n (s^n - s^{n+1}).$$

Sur l'axe, où $s = 0$, la vitesse, normale au plan de l'orifice, se trouvera exprimée par $V_0 f(0) = c_0 V_0$, et, vu sa valeur expérimentale $0,690 V_0$, il viendra, comme première condition imposée aux coefficients c_0, c_1, c_2, \dots ,

$$(26) \quad c_0 = 0,690.$$

Quant au débit total q (par unité de longueur), il aura l'expression $2 \int_0^b V_0 f(s) d\eta = b V_0 \int_0^1 f(s) \frac{ds}{\sqrt{s}}$, et son quotient par $2bV_0$ sera le coefficient de contraction (ou de débit) m .

Il vient donc pour la moitié de ce coefficient, en substituant

finalemt à $f(s)$ sa dernière valeur (25 bis) et intégrant,

$$(27) \quad \frac{m}{2} = \frac{1}{4} \int_0^1 f(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{c_0}{1.3} + \frac{c_1}{3.5} + \frac{c_2}{5.7} + \dots$$

Évaluons, d'autre part, la vitesse V dans le plan de l'orifice, aux distances y de l'axe supérieures à b . Chaque élément rectangulaire $d\xi d\eta$ de la bande d'orifice comprise entre les deux parallèles $y = \eta$, $y = \eta + d\eta$ à l'axe, exerce au point considéré (x, y) l'appel $\frac{dq}{2\pi r^2} = \frac{V_0 f(s) d\xi d\eta}{2\pi[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]}$, qui a, suivant la perpendiculaire menée de (x, y) à l'axe, la composante

$$\frac{V_0 f(s)}{2\pi} (y - \eta) d\eta [(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2]^{-\frac{3}{2}} d\xi.$$

Par suite, celle-ci, intégrée de $\xi = -\infty$ à $\xi = \infty$, donne, comme appel total de la bande en (x, y) ,

$$\frac{V_0 f(s) d\eta}{2\pi(y-\eta)} \left[\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} = \frac{V_0 f(s) d\eta}{\pi(y-\eta)}.$$

En y joignant l'appel analogue de la bande symétrique comprise de $y = -(\eta + d\eta)$ à $y = -\eta$, la somme est

$$\frac{V_0 f(s) d\eta}{\pi} \left(\frac{1}{y-\eta} + \frac{1}{y+\eta} \right) = \frac{2V_0 f(s) y d\eta}{\pi(y^2 - \eta^2)} = \frac{V_0}{\pi} \frac{b}{y} \frac{f(s)}{1 - \frac{b^2}{y^2} s} \frac{ds}{\sqrt{s}};$$

et l'on n'a plus qu'à intégrer cette expression depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$ pour avoir la vitesse cherchée V . Il vient donc, en divisant par V_0 et, finalement, en substituant $\sum c_n (s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, pour effectuer l'intégration terme à terme après avoir remplacé $1 - \left(\frac{b^2}{y^2} s\right)^{-1}$ par son développement convergent $1 + \frac{b^2}{y^2} s + \frac{b^4}{y^4} s^2 + \dots$

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{1}{\pi} \frac{b}{y} \int_0^1 f(s) \left(1 - \frac{b^2}{y^2} s\right)^{-1} \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{b}{y} \left[\sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{y^2} \sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^4}{y^4} \sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

A la limite $y = b$, le dernier membre prend la forme finie $\frac{2}{\pi} \sum \frac{c_n}{2n+1}$, à cause des identités

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3},$$

$$\frac{2}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5},$$

.....

et l'on a

(29) (au bord de l'orifice) $\frac{V}{V_0} = \frac{2}{\pi} \sum \frac{c_n}{2n+1}.$

IX. Ainsi, la condition $V = V_0$ (pour $y = \pm b$) revient à écrire $\sum \frac{c_n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, ou à poser entre les coefficients inconnus c_1, c_2, c_3, \dots , vu, finalement, (26), la relation

(30) $\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{5} + \frac{c_3}{7} + \frac{c_4}{9} + \dots = \frac{\pi}{2} - c_0 = 0,8808.$

D'autre part, l'équation (1), dernière de nos quatre conditions imposées au mode $V_0 f(s)$ de répartition du débit, s'écrira, si l'on divise par 2, $\frac{m}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_b^\infty \frac{V^2}{V_0^2} \frac{dy}{b}$; et, en y substituant à $\frac{V}{V_0}$ le dernier membre de (28) [où $\sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)}$ n'est autre que $\frac{m}{2}$ en vertu de (27)], après avoir d'ailleurs choisi une nouvelle variable d'intégration γ égale à $\frac{b}{y}$, on aura l'équation

(31) $\left\{ \begin{aligned} \frac{m}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \left[\frac{m}{2} - \gamma^2 \sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma^4 \sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} + \dots \right]^2 d\gamma \quad (1). \end{aligned} \right.$

(1) En négligeant sous le signe f les termes en $\gamma^2, \gamma^4, \dots$, essentiellement positifs d'après leur provenance au second membre de (28), il vient l'inégalité du second degré $\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{m^2}{\pi^2}$, qui, résolue, donne comme limite inférieure de m , dans toute hypothèse possible sur le mode de répartition du débit,

$$\frac{\pi^2}{4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \right) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \right)^{-1} = 0,565.$$

Dans celle-ci, la somme des coefficients du polynôme entre crochets, en γ^2 , est la valeur, multipliée par $\frac{\pi}{4}$, du dernier membre de (28), à la limite $\gamma = b$ où le premier membre de (28) est 1; ce qui permet, en élevant au carré, de poser la relation, très importante pour les calculs suivants,

$$(32) \quad \left\{ \left[\frac{m}{2} + \sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} + \sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} + \dots \right]^2 = \frac{\pi^2}{16} = 0,61685. \right.$$

X. Réduisons encore à un seul, comme pour l'orifice circulaire, les coefficients c_1, c_2, c_3, \dots , en choisissant celui d'entre eux qui, déterminé par (30), permettra le mieux de satisfaire à l'équation (31).

La relation (30) donne ainsi, successivement, lorsqu'on réduit son premier membre à un seul terme,

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2,6424, \\ c_2 = 4,4040, \\ c_3 = 6,1656, \\ c_4 = 7,9272, \\ c_5 = 9,6888, \\ \dots \end{array} \right.$$

et il résulte alors de (27), pour les moitiés des coefficients de contraction correspondants,

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1}{2} = 0,4062, \\ \frac{m_2}{2} = 0,3558, \\ \frac{m_3}{2} = 0,3279, \\ \frac{m_4}{2} = 0,3101, \\ \frac{m_5}{2} = 0,2978, \\ \dots \end{array} \right.$$

Quant à la série qui figure, sous le signe f , au second membre

de (31), elle reçoit les expressions respectives

$$\begin{aligned}
 &(0,4062 + 0,1215\gamma^2 + 0,0617\gamma^4 + \dots)^2 = 0,1650 + 0,0987\gamma^2 + 0,0648\gamma^4 + \dots, \\
 &(0,3558 + 0,1159\gamma^2 + 0,0642\gamma^4 + \dots)^2 = 0,1266 + 0,0825\gamma^2 + 0,0591\gamma^4 + \dots, \\
 &\quad \left\{ \begin{aligned} &(0,3279 + 0,1083\gamma^2 + 0,0628\gamma^4 + 0,0426\gamma^6 + \dots)^2 \\ &= 0,1075 + 0,0710\gamma^2 + 0,0529\gamma^4 + 0,0415\gamma^6 + \dots, \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} &(0,3101 + 0,1014\gamma^2 + 0,0604\gamma^4 + 0,0420\gamma^6 + 0,0315\gamma^8 + 0,0247\gamma^{10} + 0,0200\gamma^{12} + \dots)^2 \\ &= 0,0961 + 0,0629\gamma^2 + 0,0477\gamma^4 + 0,0383\gamma^6 + 0,0317\gamma^8 + 0,0268\gamma^{10} + 0,0230\gamma^{12} + \dots, \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &(0,2978 + 0,0957\gamma^2 + 0,0577\gamma^4 + 0,0409\gamma^6 + 0,0313\gamma^8 + \dots)^2 \\ &= 0,0887 + 0,0570\gamma^2 + 0,0435\gamma^4 + 0,0354\gamma^6 + 0,0298\gamma^8 + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

En vertu de (32), les sommes des coefficients non écrits explicitement aux seconds membres égalent les excédents respectifs de $\frac{\pi^2}{16}$, ou de 0,61685, sur les sommes des coefficients écrits, qui sont, respectivement, au nombre de 3, 3, 4, 7, 5, On trouve ainsi, pour ces excédents,

$$0,2883, \quad 0,3486, \quad 0,3439, \quad 0,2903, \quad 0,3625, \quad \dots$$

Et comme les coefficients successifs dont ils expriment les sommes acquerraient en diviseur, par le fait de l'intégration définie indiquée au second membre de (31), les divers impairs supérieurs à 5, 5, 7, 13, 9, ..., le résultat total de cette intégration comprendra : 1° l'intégrale fournie par la partie explicitement écrite, savoir $0,1650 + \frac{0,0987}{3} + \frac{0,0648}{5}$, etc., ou, tous calculs faits,

$$(35) \quad 0,2108, \quad 0,1659, \quad 0,1477, \quad 0,1399, \quad 0,1247, \quad \dots;$$

2° une partie notable, mais inconnue, des quotients $\frac{0,2883}{7}, \frac{0,3486}{7}, \frac{0,3439}{9}, \frac{0,2903}{15}, \frac{0,3625}{11}, \dots$, qui sont

$$(36) \quad 0,0412, \quad 0,0498, \quad 0,0382, \quad 0,0194, \quad 0,0330, \quad \dots$$

Dans les trois premiers cas, l'intégrale définie n'atteint donc pas les valeurs

$$\begin{aligned}
 &0,2108 + 0,0412 = 0,2520, \\
 &0,1659 + 0,0498 = 0,2157; \\
 &0,1477 + 0,0382 = 0,1859,
 \end{aligned}$$



et le second membre de (31) est, par suite, assez au-dessous, respectivement, de

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}(0,2520) = 0,3521,$$

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}(0,2157) = 0,3374,$$

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}(0,1859) = 0,3253,$$

nombres moindres eux-mêmes que le premier membre, égal, d'après (34), à 0,4062, 0,3558, 0,3279.

Au contraire, dans les cas qui suivent le quatrième, l'intégrale définie figurant au second membre de (31) excède d'une manière sensible sa partie explicitement calculée 0,1247, . . . ; et ce second membre dépasse par suite, assez notablement, les quantités $\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}(0,1247) = 0,3005$, . . . , qui sont, néanmoins, supérieures au premier membre $\frac{1}{2} m_3 = 0,2978$,

XI. Ainsi le seul cas qui puisse convenir est le quatrième, où les deux coefficients conservés dans l'expression (25) ou (25 bis) de la répartition du débit sont $c_0 = 0,690$ et $c_4 = 7,9272$. Alors l'intégrale définie à évaluer dans le second membre de (31), égale à la somme de 0,1399 et d'une partie notable, mais inconnue, de 0,0194, peut s'écrire, en appelant θ un nombre positif sensiblement inférieur à l'unité,

$$0,1399 + (0,0194) \frac{1 \pm \theta}{2} = 0,1495 \pm 0,0097\theta.$$

Le second membre de (31) devient, par suite,

$$(37) \quad \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}(0,1495 \pm 0,0097\theta) = 0,3106 \pm 0,0039\theta;$$

ce qui ne diffère pas sensiblement du premier membre, 0,3101 d'après (34). Les valeurs $c_0 = 0,690$, $c_4 = 7,9272$ vérifient donc, à très peu près, toutes les conditions imposées, et elles correspondent à un coefficient théorique de contraction double de 0,3101 ou exprimé, sauf écart négligeable, par la formule

$$(38) \quad m = 0,62.$$

XII. C'est ce que confirme assez bien l'observation, puisqu'elle a donné à M. Bazin 0,626 pour m , ou, plutôt, pour le coefficient de débit, que devait renforcer légèrement une certaine *non-pression* constatée dans l'axe de la veine et produisant un surcroît de hauteur de charge dont fait abstraction la formule usuelle $m\sqrt{2gh}$. Il en résulte que le débit par unité d'aire, aux diverses distances $r_1 = b\sqrt{s}$ de l'axe longitudinal de l'orifice, doit admettre, d'après (25) et (25 bis), l'expression approchée

$$(39) \quad \begin{cases} V_0 f\left(\frac{r_1^2}{b^2}\right) = V_0 \left(0,690 + 7,9272 \frac{r_1^8}{b^8}\right) \left(1 - \frac{r_1^2}{b^2}\right), \\ \text{ou} \\ V_0 f(s) = V_0 (0,690 + 7,9272 s^4)(1 - s). \end{cases}$$

Le dernier membre, divisé par $7,9272 V_0$, a pour dérivée

$$(40) \quad -5s^3 + 4s^7 - 0,087042,$$

trinôme que l'on reconnaît, à l'inspection de sa propre dérivée $4s^2(3 - 5s)$, croître de $s = 0$ à $s = \frac{3}{5}$, pour décroître ensuite. Comme ce trinôme, pour s ou nul, ou égal à 1, se trouve avoir le signe *moins*, contraire à celui de son maximum correspondant à $s = \frac{3}{5}$, les racines qui l'annulent sont au nombre de deux, entre les limites à considérer $s = 0$, $s = 1$. Négatif au-dessous de la première racine $s = 0,33438$, il est ensuite positif jusqu'à ce que s atteigne la seconde racine, 0,7604, pour redevenir et rester négatif au delà. Donc la composante longitudinale de la vitesse, $V_0 f(s)$, débit, par unité d'aire, des diverses parties de l'orifice, décroît quand on s'éloigne de l'axe (malgré la lente augmentation de la vitesse totale V) à raison de l'inclinaison qu'y présentent les filets fluides; et ce décroissement a lieu jusqu'à la distance

$$\pm r_1 = \sqrt{0,33438} b = 0,57826 b$$

de part et d'autre de l'axe, distance où le débit par unité d'aire atteint son minimum $0,5252 V_0$. Au delà, il croît, à raison de l'influence prépondérante de l'accroissement des vitesses V , lorsqu'on s'éloigne de l'axe où celles-ci étaient le plus réduites par l'excès de pression dû aux forces centrifuges; et il atteint ainsi son maximum, $0,8003 V_0$, à la distance $\pm r_1 = \sqrt{0,7604} b = 0,8720 b$

de part et d'autre de l'axe. Plus loin de celui-ci, l'influence des inclinaisons, désormais très grandes, des filets, prédomine de nouveau et de plus en plus, jusqu'à annuler enfin le débit par unité d'aire sur les deux bords $\eta = \pm b$, où, cependant, la vitesse totale V atteint son maximum V_0 (').