



HAL
open science

Sur l'intensité absolue de la pesanteur Defforges

► **To cite this version:**

Defforges. Sur l'intensité absolue de la pesanteur. J. Phys. Theor. Appl., 1888, 7 (1), pp.347-364.
10.1051/jphystap:018880070034701 . jpa-00238848

HAL Id: jpa-00238848

<https://hal.science/jpa-00238848>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'INTENSITÉ ABSOLUE DE LA PESANTEUR ;

PAR M. LE COMMANDANT DEFFORGES.

(2^e article) (1).

II. — PENDULE RÉVERSIBLE DE REPSOLD.

Les pendules réversibles construits par Repsold sont de deux types. Les uns ont une durée d'oscillation voisine de 1^s, les autres ont une durée voisine de 0^s, 75. Ils ont donc, soit 1^m environ, soit 0^m, 56 environ de longueur entre les arêtes des couteaux. Les divers appareils existant diffèrent par quelques détails de construction peu importants. Au fond, ils sont tous très semblables.

Je décrirai ici rapidement l'appareil construit en 1880 pour le service géographique de l'armée française. Les constructeurs ont réalisé dans ce pendule quelques perfectionnements.

L'instrument se compose (*fig. 5*) d'un support métallique démontable et transportable, en forme de trépied, sur lequel oscille un pendule réversible symétrique muni de deux couteaux échangeables.

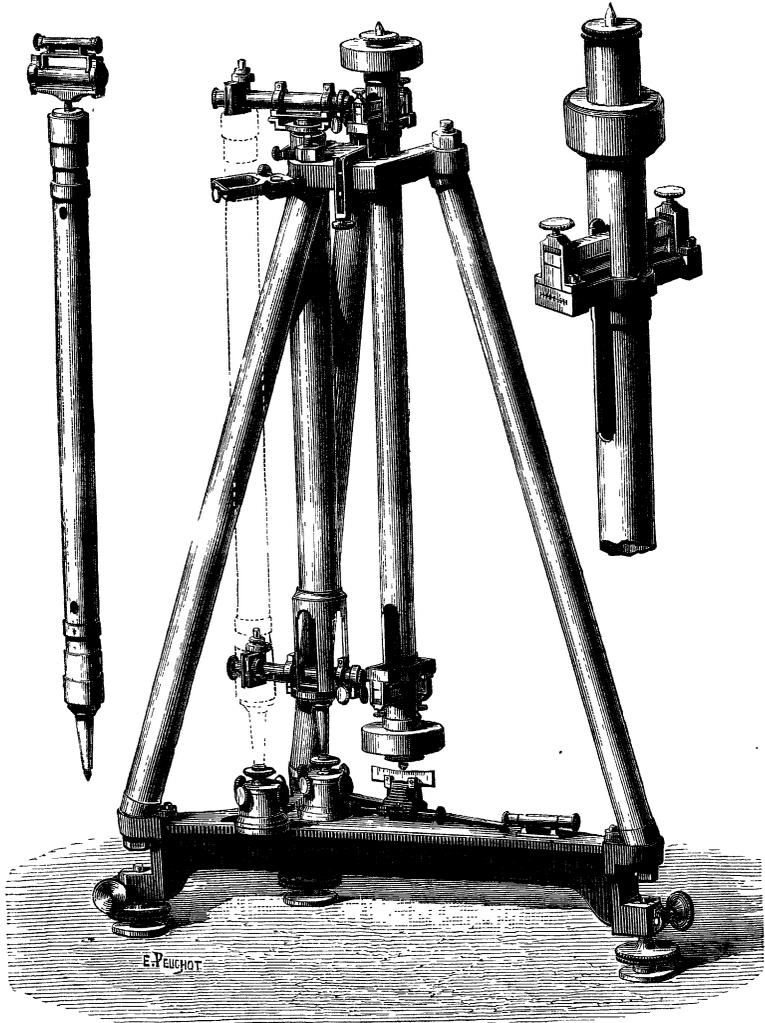
Un comparateur à microscopes, mobile autour d'un axe vertical, permet de mesurer la distance des arêtes, le pendule restant suspendu, et de la comparer aux traits d'un étalon voisin du pendule. Le comparateur et l'étalon sont portés par le trépied.

(1) Voir p. 239 de ce volume.

Un appareil spécial sert à mesurer la distance du centre de gravité aux arêtes des deux couteaux.

1° *Le pendule.* — Le pendule se compose d'une tige cylindrique

Fig. 5.



creuse de $0^m,04$ de diamètre extérieur et d'environ $0^m,002$ d'épaisseur. Aux deux extrémités de la tige sont fixés deux disques circu-

lares de $0^m,03$ d'épaisseur et de $0^m,08$ de diamètre. La tige est perpendiculaire aux plans des disques.

L'un des disques est plein et l'autre creux et parfaitement étanche. C'est cette différence de poids des deux disques qui éloigne le centre de gravité du centre de figure et rend h et h' inégaux.

En dehors des disques, la tige du pendule porte à ses deux extrémités deux pointes formées d'un court cylindre de $0^m,006$ de diamètre et $0^m,015$ de longueur, terminé par un cône assez aplati. Tout le pendule est exactement tourné et centré sur ces pointes, qui peuvent servir, par conséquent, à sa vérification.

Les montures du couteau sont soudées à la tige. Elles sont d'une forme particulière assez compliquée, motivée par le mode de suspension du pendule sur son support. Les couteaux reposent sur leur monture par l'extrémité de leur face inférieure. Ils s'appuient sur deux surfaces planes venues au tour et parfaitement perpendiculaires à l'axe du pendule. Deux étriers munis d'une vis de pression les maintiennent pressés sur leurs surfaces d'appui.

Les couteaux sont en agate, de $0^m,06$ de longueur. Ils présentent la forme d'un prisme horizontal dont les deux arêtes auraient été tronquées. Les plans de troncature sont inclinés à 45° sur chacune des faces du prisme et se rencontrent par conséquent sous un angle de 90° . L'arête est formée par deux biseaux légèrement inclinés sur les plans de troncature.

Le prisme n'est ainsi tronqué que sur les quatre centimètres de sa partie médiane. Les deux extrémités conservent, sur une longueur d'environ $0^m,01$, la forme prismatique.

Ce sont ces prismes terminaux qui sont engagés dans l'étrier de la monture et qui servent à fixer les couteaux solidement au pendule. En desserrant les vis de pression des étriers, les couteaux peuvent être retirés de leur monture. Comme ils sont aussi identiques que possible, ils peuvent être échangés et retournés bout pour bout.

L'agate des couteaux a reçu le degré de poli le plus élevé, celui qu'on appelle le *poli spéculaire*.

Les couteaux reposent, comme on le verra tout à l'heure, sur un seul plan d'agate porté par une sorte de potence fixée au trépied. La tige du pendule est évidée pour laisser passer cette po-

tence. Elle se trouve ainsi très affaiblie, ce qui est un assez grave défaut.

Le pendule, comme le demande la théorie de la réversion, est absolument symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à son axe de figure en son milieu.

2° *Le support.* — C'est une sorte de trépied démontable, formé d'une platine inférieure en bronze, assez lourde, munie de trois vis calantes reposant sur des galets.

Sur cette platine sont fixées, à l'aide d'écrous, trois tiges creuses inclinées qui convergent à leur extrémité supérieure et supportent une platine supérieure en bronze dans laquelle elles sont engagées et maintenues par des écrous.

La platine supérieure porte la potence, surmontée d'un plan d'agate serti dans le métal et sur lequel repose l'arête du couteau pendant les oscillations. Un système de V mobiles à l'aide d'un levier et d'une vis de rappel reçoit le pendule et sert à l'élever et à l'abaisser sans secousse.

Le plan d'agate a environ 0^m,01 de largeur et 0^m,04 de longueur à sa surface supérieure, qui est parfaitement travaillée et polie.

Une entaille cylindrique l'interrompt dans son milieu, qui est évidé pour laisser passer la lumière et laisser apercevoir l'arête dans le champ du microscope supérieur du cathétomètre pendant la mesure de la longueur. L'arête du couteau, qui a 0^m,04, ne repose donc sur le plan que sur 3^{es}, 5 environ; le demi-centimètre du milieu est libre.

La platine inférieure du support porte un arc divisé en degrés dont le bord est voisin de la pointe inférieure du pendule et qui sert à mesurer l'amplitude de l'oscillation. A cet arc est fixée une pince mobile à charnière qui peut être abaissée ou relevée à volonté. Cette pince permet de saisir la queue inférieure du pendule entre un butoir à ressort et une vis de rappel et de l'immobiliser pendant le réglage de l'appareil et la mesure de la longueur.

3° *Le comparateur.* — Les deux platines de support soutiennent le comparateur et son étalon.

Le comparateur est formé d'une colonne creuse qui repose par son extrémité inférieure, en pointe, dans une crapaudine fixée à

la platine inférieure, et qui est saisie à sa partie supérieure par un collier dépendant de la platine supérieure. La crapaudine est mobile, par le jeu de vis spéciales, dans deux sens horizontaux perpendiculaires et dans le sens vertical. Le collier supérieur est fixe.

Les mouvements de la crapaudine permettent, à l'aide d'un niveau placé sur la colonne, de la rendre verticale et de l'amener, avec les microscopes qu'elle porte, à la hauteur convenable.

Les deux microscopes à micromètre sont montés sur la colonne de manière à pouvoir, à l'aide d'un niveau spécial placé sur leur tube, être rendus perpendiculaires à l'axe du comparateur. Le microscope supérieur peut, en outre, être élevé ou abaissé tout en restant parallèle à lui-même. Ce mouvement spécial permet de régler à volonté la distance comprise entre les axes optiques des deux microscopes.

Le tour de vis des micromètres est très voisin de $\frac{4}{10}$ de millimètre, le tambour est divisé en 100 parties qui correspondent chacune à environ un micron.

Un peigne à cinq dents sert à compter les tours. Le châssis mobile des micromètres porte une double paire de fils dont la distance, dans chaque paire, est calculée de façon qu'ils encadrent convenablement les divisions de l'étalon.

Les deux paires de fils sont à une distance de deux tours et demi de la vis. En employant alternativement pour la mesure l'une et l'autre paire de fils et prenant la moyenne des nombres obtenus avec l'une et l'autre, on élimine en très grande partie l'erreur périodique de la vis ; cette erreur est d'ailleurs peu sensible.

4° *L'étalon*. — Il est formé d'un tube de laiton étiré creux, pareil à celui qui forme la tige du pendule, et pris dans le même tube qu'elle, afin que les dilatations de l'étalon et du pendule soient comparables. Aux deux extrémités du tube, la moitié antérieure du cylindre creux est enlevée par deux sections faites par deux plans passant, l'un par l'axe du cylindre, l'autre perpendiculaire au premier et à cet axe.

Aux portions hémicylindriques restantes du tube sont fixées par des vis et soudées à l'argent (1) deux pièces en cuivre portant une

(1) Les étalons des appareils sortis des ateliers de Repsold sont simplement

lame d'argent dont la surface polie est contenue dans le plan de la section verticale du tube et dont une des arêtes coïncide avec l'axe du cylindre.

L'une des lames ne porte que trois traits, distants de $\frac{1}{10}$ de millimètre. Le trait milieu est marqué 0 et sert d'origine à la division. La seconde lame porte une division en dixièmes de millimètre de 558^{mm} à 560^{mm} .

L'étalon renferme, dans l'intérieur du tube, un thermomètre métallique formé d'un cylindre de zinc et d'un cylindre de laiton, concentriques entre eux et avec l'étalon, soudés l'un à l'autre et portant un index divisé qui se meut librement, par l'effet des dilatations accumulées des deux cylindres, tout contre le groupe de trois traits portés par la lame du zéro.

L'étalon, comme le comparateur, est porté par une crapaudine fixée à la platine inférieure et munie de trois mouvements, deux horizontaux, un vertical; il est fixé, par sa partie supérieure, à la platine supérieure du support à l'aide d'un collier. Ce collier, par le jeu de vis spéciales, peut être déplacé de façon à éloigner ou rapprocher l'étalon du comparateur pour la mise au point. Un niveau spécial s'ajuste sur la tête de l'étalon et sert à rendre son axe vertical.

Le pointé des traits de l'étalon se fait en les encadrant entre les deux fils de l'une ou l'autre des deux paires. Le pointé de l'arête du couteau s'effectue en plaçant la génératrice terminale à égale distance des deux fils. Il faut ainsi apprécier l'égalité de deux bandes, l'une lumineuse, l'autre presque obscure. Il y a, de ce chef, une équation personnelle assez notable dans le pointé, qui nuit à la précision de la mesure et *se double* dans le résultat.

5° *Appareil pour la détermination du centre de gravité.* —

Il se compose essentiellement d'un double tronc de cône en acier, mobile à l'aide d'une vis de rappel, d'un mouvement très lent, autour de l'axe commun des deux cônes. Ces deux troncs de cône sont en contact par leur petite base et forment une sorte de gorge mobile sur laquelle le pendule peut être placé en équilibre. Dans la position d'équilibre, le centre de gravité du pendule et l'axe

ajustés à l'aide de vis. Trouvant cet ajustage insuffisant, j'ai fait souder à l'argent les diverses pièces de l'étalon de l'appareil du service géographique.

du double tronc de cône sont dans un même plan vertical.

La monture du tronc de cône porte un vernier au $\frac{1}{100}$ de millimètre sous lequel glisse une règle divisée. Lorsque le pendule est en équilibre sur les troncs de cône, la règle est amenée au contact d'un des couteaux. Le contact s'effectue à l'aide d'un levier de contact extrêmement sensible. Ce contact obtenu, on fait la lecture de la règle et du vernier. On retourne alors le pendule sur les troncs de cône, on le met en équilibre et l'on amène la règle, en la faisant glisser sous le vernier, à être en contact avec le second couteau. On fait de nouveau la lecture. La différence des lectures donne évidemment la différence des distances du centre de gravité aux deux couteaux, $h - h'$. On connaît, par la mesure directe, $h + h'$. Il est facile d'avoir, dès lors, h et h' . Dans le pendule de Repsold $\frac{h}{h'} = 2$ environ.

L'opération de la mise en équilibre du pendule, au point de vue pratique, est un peu délicate. Avec un peu d'habitude, on arrive à des résultats très satisfaisants. La précision du $\frac{1}{100}$ de millimètre, donnée à la lecture par l'appareil, est, du reste, tout à fait superflue. Le $\frac{1}{10}$ de millimètre suffit largement dans tous les cas, et n'est pas laborieux à obtenir.

Tout l'appareil peut être démonté par pièces et transporté aisément, emballé dans deux boîtes de dimensions assez restreintes. Il est très portatif. A chaque station, le trépied, monté, doit être placé solidement sur un pilier maçonné. Le réglage de l'appareil se fait aisément. Le plan de suspension est d'abord nivelé. Puis, le pendule reposant librement sur le plan de suspension et étant immobile, le cathétomètre est rendu vertical, ses microscopes sont mis au point sur les arêtes des couteaux et leurs axes optiques sont amenés au parallélisme.

Le cathétomètre est ensuite pointé sur l'étalon qui est amené à son tour au point des microscopes et est rendu vertical.

Les observations de la durée peuvent être faites, soit par la méthode des coïncidences, soit par la méthode des passages. Cette dernière méthode a été très en honneur dans les vingt dernières années. Elle est cependant sujette à de très sérieuses critiques, mais elle est plus facile à installer.

Les mesures de la durée et de la longueur se font dans les diverses combinaisons obtenues en échangeant entre eux et retour-

nant dans leur monture les deux couteaux. Elles sont faites successivement dans les deux positions possibles du centre de gravité, et les oscillations, dans chaque série, doivent commencer et finir à la même amplitude (1).

De tels pendules ont été construits par Repsold pour la Prusse, l'Autriche, l'Italie, l'Espagne, les États-Unis, la Russie et la France. Ils ont servi à de très nombreuses mesures de la gravité.

III. — MOUVEMENT DU SUPPORT. MÉTHODE D'OBSERVATION PROPRE A EN ÉLIMINER L'ACTION TROUBLANTE SUR LA DURÉE D'OSCILLATION.

Très transportable, facile à installer et à mettre en expérience, le pendule de Repsold, quelque séduisant qu'il paraisse à première vue, présente des inconvénients graves.

Le pendule est trop faible dans sa construction et est exposé à des flexions ou déformations dangereuses. Il est trop léger, et l'amplitude s'éteint trop vite, du fait de la résistance du milieu. Les séries d'oscillations n'embrassent donc qu'une durée assez restreinte, variant de quarante minutes à une heure vingt minutes, intervalle de temps insuffisant pour réduire, autant qu'il est nécessaire, les incertitudes et les erreurs provenant, dans la mesure de la durée de l'oscillation, des variations de marche de l'horloge de comparaison et des erreurs de l'observation, soit des passages, soit des coïncidences.

Mais le défaut le plus sérieux de l'appareil de Repsold est le peu de stabilité du support.

Le pendule en mouvement entraîne avec lui le trépied, trop flexible, qui oscille avec lui synchroniquement.

Cette action du pendule sur le support a été d'abord soupçonnée par feu le général Baeyer. M. Albrecht, ayant mesuré g à Berlin à l'aide d'un appareil de Repsold, avait trouvé une valeur notablement plus faible que le nombre de Bessel, sans pouvoir s'expliquer la raison de la divergence constatée entre les résultats des deux mesures. Le général Baeyer pensa que le support était trop faible et la faveur avec laquelle avait d'abord été accueilli le pendule de Repsold en fut momentanément diminuée.

(1) Cette règle essentielle a été malheureusement trop fréquemment négligée dans les observations étrangères.

M. Peirce, du Coast Survey, mit le mouvement synchrone du trépid en évidence en 1875, à Paris, et calcula, en même temps que M. l'ingénieur suisse Cellérier, l'influence de ce mouvement sur la durée de l'oscillation.

Ils arrivent tous deux, par des analyses un peu différentes, à la formule

$$dl = \frac{p\varepsilon h}{l},$$

c'est-à-dire que la longueur du pendule synchrone est accrue par l'entraînement du support.

p est le poids du pendule, ε est le coefficient d'élasticité ou de flexion du support. C'est le rapport $\frac{\sigma}{F}$ du déplacement σ du point de suspension à l'effort F qui le produit.

MM. Peirce et Cellérier, dans leur analyse, sont partis du principe fondamental de la théorie de l'élasticité. *Les petits déplacements du support, considéré comme un solide élastique, sont proportionnels aux forces qui les produisent.*

Ils n'ont introduit dans le calcul ni la masse du support, ni la phase inévitable des deux mouvements oscillatoires, supposant que le support obéit instantanément, sans retard et sans période d'oscillation propre, à l'effort du pendule en mouvement.

Dans de telles conditions, en supposant les oscillations très petites, la formule ci-dessus se déduit aisément de considérations très simples.

Le déplacement infiniment petit $OO' = d\sigma$ du support, pendant le temps dt , est en effet, d'après le principe fondamental de la théorie de l'élasticité, proportionnel à l'effort

$$p \frac{h}{l} \sin \theta \cos \theta,$$

exercé par le pendule sur le support au point de suspension, tangentiellement à la direction du déplacement.

Si les oscillations sont très petites, le déplacement sera, aux termes du troisième ordre près,

$$d\sigma = p\varepsilon \frac{h}{l} d\theta.$$

Le déplacement correspondant $GG' = ds$ du centre de gravité

est, dans le temps dt ,

$$h d\theta,$$

avec la même approximation.

Le rapport

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{p\varepsilon}{l}$$

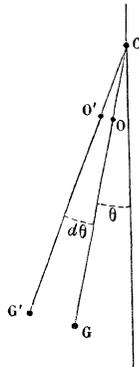
des deux déplacements est constant et indépendant de θ .

La droite $G'O'$ passe donc par un point fixe C situé au-dessus du plan de suspension à une distance

$$p\varepsilon \frac{h}{l},$$

et le point C est, pendant toute la durée du mouvement, le centre instantané de rotation du pendule qui oscille réellement autour du point C, comme si sa longueur théorique était accrue de la quantité OC.

Fig. 6.



D'après ce qui précède, les durées d'oscillation d'un pendule réversible autour de chacun de ses couteaux seront, en ayant égard seulement à l'entraînement du support,

$$T^2 = \frac{\pi^2}{g} \lambda \left(1 + \frac{p\varepsilon h}{h^2} \right),$$

$$T'^2 = \frac{\pi^2}{g} \lambda \left(1 + \frac{p\varepsilon h'}{h^2} \right),$$

et la durée théorique d'oscillation du pendule aura pour ex-

pression

$$\tau^2 = \frac{\pi^2}{g}(\lambda + p\varepsilon).$$

L'influence de cette cause d'erreur sur la longueur du pendule à secondes sera donc

$$dL = p\varepsilon \frac{L}{\lambda}.$$

M. Plantamour ⁽¹⁾ à Genève et à Berlin, M. Peirce ⁽²⁾ à Hoboken ont étudié expérimentalement et presque simultanément, dans les plus grands détails et à l'aide de méthodes de mesure différentes, l'influence du mouvement du support sur la durée d'oscillation du pendule.

M. Plantamour distingue deux coefficients d'élasticité, le *coefficient statique*, obtenu par l'expérience statique en mesurant le déplacement très petit produit par un effort connu appliqué horizontalement au support au point de suspension du pendule, et le *coefficient dynamique*, donné par l'expérience dynamique, laquelle consiste à mesurer les déplacements du support pendant les oscillations même sous l'effort du pendule en mouvement, effort facile à calculer. Il constate que les deux coefficients diffèrent l'un de l'autre d'environ $\frac{1}{8}$. Il hésite sur la question de savoir quel est celui qu'il convient d'introduire dans la formule de correction.

M. Peirce, tout en constatant expérimentalement une légère différence entre les deux coefficients, pense qu'elle tient à un défaut d'élasticité du support, affirme que, dans un support parfait, cette différence doit être nulle et préfère le coefficient dynamique comme le plus propre à la formule de correction.

En présence de cette divergence de résultats et d'opinions, il était permis d'hésiter et de conserver quelques doutes, d'autant que la correction à appliquer à la longueur du pendule à secondes est assez considérable pour qu'on ne puisse négliger le $\frac{1}{8}$ de sa valeur.

⁽¹⁾ *Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ses supports.* Genève; 1878.

⁽²⁾ *Coast Survey Report.* Washington, D. C.; 1876.

Il m'a donc paru opportun de reprendre la question par l'expérience, en employant une méthode de mesure autant que possible irréprochable et affranchie de toutes causes d'erreur systématique, telles que : temps mort de vis micrométriques, jeux d'axes de rotation ou de pivots, etc. Les déplacements à mesurer dans l'expérience dynamique sont en effet si petits que la moindre incertitude dans les mesures fausse ou masque irrémédiablement les résultats.

J'ai appliqué, dès 1883, sur l'excellent conseil de M. Cornu, à la mesure des petits déplacements du support, pendant le mouvement du pendule, les mouvements des franges d'interférence produites entre deux glaces parallèles par la lumière deux fois réfléchiée de l'alcool salé.

L'une des glaces est portée par le support, à hauteur du point sur lequel agit le pendule; elle se meut avec le support. La seconde glace est fixe et portée par un support indépendant aussi ferme que possible. Les franges étant établies, tout déplacement de la glace mobile se traduit par un déplacement correspondant des franges qui avancent ou reculent. Le déplacement des franges est observé dans une lunette grossissante par rapport à un fil fixe placé dans le plan focal de l'objectif ou par rapport à des repères marqués sur l'une des deux glaces.

Avec ce procédé purement optique, il est clair que le déplacement des franges représente fidèlement et sans erreur systématique le déplacement de la glace mobile et par conséquent du support auquel elle est fixée. Il reste à voir quelle précision le procédé comporte.

Si l'on désigne par σ la demi-excursion du support ou son écart en dehors de sa position d'équilibre, 2σ sera le déplacement de la glace mobile pendant l'oscillation, 4σ sera la variation correspondante de la différence de marche des rayons qui interfèrent. Un déplacement d'une frange entière ou la substitution d'une frange à la précédente ou à la suivante répondant à une variation de $0^{\mu},59$ dans la différence de marche, on voit qu'un déplacement d'une frange représente une demi-excursion ou un écart du support en dehors de sa position d'équilibre de

$$\sigma = 0^{\mu},15 \text{ environ.}$$

L'appréciation de $\frac{1}{15}$ d'une frange entière ou de $\frac{1}{7}$ d'un intervalle blanc ou noir se fait à vue sans difficulté. Ce procédé de mesure permet donc d'évaluer à vue et de mesurer les écarts du support en dehors de sa position d'équilibre jusqu'au $\frac{1}{100}$ de micron. Cette précision ne peut, croyons-nous, être atteinte par aucune autre méthode.

Le même appareil peut être employé dans l'expérience statique, mais il n'est pas indispensable. Les déplacements à mesurer, dans ce genre d'expériences, sont en effet assez considérables et peuvent être mesurés au microscope avec toute la précision désirable, les efforts appliqués au support étant généralement assez grands.

Le pendule soumis à l'expérience est un pendule de Repsold, acquis par le service géographique en 1880. Le support de ce pendule, grâce à une disposition spéciale du trépied, est beaucoup plus stable que les autres supports construits par Repsold avant cette époque. Son coefficient statique est en effet

$$\varepsilon = 0,000008.$$

La correction correspondante sur la longueur du pendule à secondes n'est que

$$dL = 0^m,000029 \text{ (}^1\text{)}.$$

Dans ces expériences, j'ai rendu l'élasticité de ce support variable en le supportant sur des galets spéciaux formés de lames élastiques. En faisant varier la longueur de ces lames, j'ai pu opérer à Paris, avec les coefficients statiques suivants :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0,000008, \\ \varepsilon_2 &= 0,000211, \\ \varepsilon_3 &= 0,000643. \end{aligned}$$

Les coefficients dynamiques, mesurés pendant le mouvement à

(¹) Ce coefficient et la correction correspondante sont très faibles comparativement à ceux de MM. Peirce et Plantamour.

Peirce (Hoboken).....	$\varepsilon = 0,000034$	$dL = 0,000217$
Plantamour (Genève).....	$\varepsilon = 0,000032$	$dL = 0,000172$
» (Berlin).....	$\varepsilon = 0,000025$	$dL = 0,000136$

J. de Phys., 2^e série, t. VII (Août 1888.)

l'aide des franges d'interférence, ont été trouvés égaux à

$$\varepsilon'_1 = 0,000007,$$

$$\varepsilon'_2 = 0,000196,$$

$$\varepsilon'_3 = 0,000593.$$

Les différences sont

$$\varepsilon_1 - \varepsilon'_1 = 0,000001 = \frac{\varepsilon_1}{8},$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon'_2 = 0,000015 = \frac{\varepsilon_2}{14},$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon'_3 = 0,000050 = \frac{\varepsilon_3}{13}.$$

Les durées d'oscillation du pendule, dans ces divers états d'élasticité du support, corrigées de l'amplitude, de la marche de l'horloge de comparaison et ramenées à 17°, sont

PARIS. — *Poids lourd en haut.*

1884. Oscillations.

$\varepsilon_1 = 0,000008 \dots$	}	1 ^{er} mars	1500	0,752276	}	0,752277
		7 »	3100	0,752278		
$\varepsilon_2 = 0,000211 \dots$	}	1 ^{er} »	1700	0,752376	}	0,752374
		7 »	3400	0,752373		
$\varepsilon_3 = 0,000643 \dots$	}	7 »	2300	0,752569	}	0,752569

Poids lourd en bas.

$\varepsilon_1 = 0,000008 \dots$	}	1 ^{er} »	1600	0,752271	}	0,752268
		7 »	4600	0,752266		
$\varepsilon_2 = 0,000211 \dots$	}	1 ^{er} »	1900	0,752451	}	0,752449
		7 »	5600	0,752447		
$\varepsilon_3 = 0,000643 \dots$	}	7 »	3600	0,752856	}	0,752856

La comparaison des variations de la durée d'oscillation correspondant aux variations du coefficient d'élasticité donne, entre les variations de durée observées et les variations de durée calculées à l'aide des coefficients statiques et dynamiques, les différences suivantes :

Variation observée.	Variation calculée.			
	Statique.	Δ .	Dynamique.	Δ .

Poids lourd en haut.

0,000097..... ^s	0,000092	+5	0,000086	+11
0,000292.....	0,000294	-2	0,000271	+21

Poids lourd en bas.

0,000181.....	0,000184	-3	0,000171	+10
0,000588.....	0,000588	0	0,000542	+46

L'examen des Δ ne laisse aucun doute : c'est le coefficient statique qu'il convient d'employer pour la formule de correction; avec ce coefficient, la formule représente très exactement la réalité. Si, au contraire, la correction est calculée avec le coefficient dynamique, la différence entre l'observation et le calcul va croissant avec l'élasticité.

J'aurais pu m'en tenir là et considérer la question comme résolue. J'ai cru devoir multiplier les expériences et, rejetant les grandes élasticités comme hors de la pratique habituelle, j'ai opéré, à la station élevée et particulièrement tranquille du pic du Midi de Bigorre, avec les élasticités statiques suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0,0000080, \\ \varepsilon_2 &= 0,0000129, \\ \varepsilon_3 &= 0,0000290, \\ \varepsilon_4 &= 0,0000725. \end{aligned}$$

Les coefficients dynamiques ont été trouvés égaux à

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= 0,0000069, \\ \varepsilon'_2 &= 0,0000117, \\ \varepsilon'_3 &= 0,0000250, \\ \varepsilon'_4 &= 0,0000642, \end{aligned}$$

par de nombreuses expériences faites avec l'appareil à franges à des amplitudes différentes.

Les différences entre les coefficients statiques et dynamiques

ont été trouvées égales à

$$\varepsilon_1 - \varepsilon'_1 = + 0,0000011 \pm 0,0000002 = \frac{\varepsilon_1}{7},$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon'_2 = + 0,0000012 \pm 0,0000002 = \frac{\varepsilon_2}{11},$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon'_3 = + 0,0000040 \pm 0,0000004 = \frac{\varepsilon_3}{7},$$

$$\varepsilon_4 - \varepsilon'_4 = + 0,0000083 \pm 0,0000003 = \frac{\varepsilon_4}{9}.$$

La moyenne des différences est donc environ $\frac{1}{8}$, pour des élasticités ne dépassant pas les valeurs pratiques.

On retrouve, dans les variations de la durée observées et calculées au pic du Midi, la différence mise en évidence à Paris entre la correction statique et la correction dynamique respectivement comparées à la correction fournie par l'observation.

On doit donc conclure :

1° Il y a, entre les mesures dynamiques et les mesures statiques du coefficient d'élasticité d'un support, une différence bien accusée qui, aux petites et moyennes élasticités, atteint le $\frac{1}{8}$ de la valeur de ε ; aux grandes élasticités, la différence est plus faible et n'atteint guère que le $\frac{1}{14}$ de la valeur du coefficient.

2° La formule de correction de Peirce et Cellérier convient parfaitement à la pratique et représente exactement la variation de la durée causée par l'ébranlement du support, à la condition que l'on n'y introduise pas d'autre coefficient que le coefficient statique.

Il resterait à expliquer pourquoi le coefficient dynamique est plus faible que l'autre. Cela provient très vraisemblablement d'un effet de la superposition de deux mouvements oscillatoires, le tré-pied pouvant être considéré comme *synchronisé* par l'action du pendule en mouvement.

C'est une question digne d'étude. Quoi qu'il en soit, ces faits constatés, j'ai pensé que, pour lever tous les doutes et désarmer la critique, il y avait lieu de construire des supports beaucoup plus solides et de rechercher si, par une disposition spéciale des appareils et des observations, il ne serait pas possible d'éliminer l'action du support.

Voici la méthode qui m'a paru propre à réaliser cette élimination :

Que l'on considère deux pendules réversibles de longueurs différentes, disposés pour recevoir les deux mêmes couteaux et pour osciller sur un même support d'élasticité ε .

Soient

- λ_1, λ_2 les longueurs des deux pendules, mesurées entre les arêtes des couteaux ;
- $h_1 h'_1, h_2 h'_2$ les distances des centres de gravité des deux pendules aux arêtes des couteaux ;
- ρ, ρ' les rayons de courbure des couteaux ;
- $T_1 T'_1, T_2 T'_2$ les durées d'oscillation, poids lourd en bas et poids lourd en haut, des deux pendules oscillant sur les mêmes couteaux, semblablement disposés et dans les mêmes limites d'amplitude.

On a, entre ces quantités, l'intensité g de la pesanteur et le rapport π de la circonférence au diamètre, les relations

$$\frac{h_1 T_1^2 - h'_1 T_1'^2}{h_1 - h'_1} = \frac{\pi^2}{g} \lambda_1 \left(1 + \frac{p_1 \varepsilon}{\lambda_1} - \frac{\rho - \rho'}{h_1 - h'_1} \right),$$

$$\frac{h_2 T_2^2 - h'_2 T_2'^2}{h_2 - h'_2} = \frac{\pi^2}{g} \lambda_2 \left(1 + \frac{p_2 \varepsilon}{\lambda_2} - \frac{\rho - \rho'}{h_2 - h'_2} \right).$$

Retranchant membre à membre, il vient, en introduisant les durées théoriques τ_1^2 et τ_2^2 , pour abrégier l'écriture,

$$\tau_2^2 - \tau_1^2 = \frac{\pi^2}{g} (\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{\pi^2}{g} \varepsilon (p_2 - p_1) + \frac{\pi^2}{g} (\rho - \rho') \left(\frac{\lambda_1}{h_1 - h'_1} - \frac{\lambda_2}{h_2 - h'_2} \right),$$

ou, en remplaçant λ_1 et λ_2 par $h_1 + h'_1, h_2 + h'_2$, quantités équivalentes,

$$\tau_2^2 - \tau_1^2 = \frac{\pi^2}{g} (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\pi^2}{g} \varepsilon (p_2 - p_1) + \frac{\pi^2}{g} (\rho - \rho') \left(\frac{h_1 + h'_1}{h_1 - h'_1} - \frac{h_2 + h'_2}{h_2 - h'_2} \right).$$

Il faut et il suffit, pour que les deux derniers termes du deuxième membre soient nuls, que

$$p_1 = p_2,$$

$$\frac{h_1}{h'_1} = \frac{h_2}{h'_2}.$$

Donc on peut éliminer entièrement l'effet du support et celui du rayon de courbure des couteaux en faisant osciller, dans les mêmes limites d'amplitude, sur le même support et avec les mêmes couteaux, deux pendules de même poids, de longueur différente et dont les centres de gravité sont semblablement disposés par rapport aux arêtes des couteaux.

L'intensité de la pesanteur est alors donnée, sans correction aucune, par la formule très simple

$$\frac{\pi^2}{g}(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{h(T_2^2 - T_1^2) - h'(T_2'^2 - T_1'^2)}{h - h'}$$

$\frac{h}{h'}$ représentant la valeur commune des deux rapports $\frac{h_1}{h'_1}, \frac{h_2}{h'_2}$.

L'élimination des deux causes d'erreur sus-énoncées, l'entraînement du support et la différence des rayons de courbure des couteaux, n'est pas le seul avantage de la méthode. Toutes les causes d'erreur systématique, et elles sont nombreuses, qui peuvent affecter la mesure de la longueur, disparaissent dans la différence $\lambda_2 - \lambda_1$ des longueurs des deux pendules, qui entre seule dans la formule.

Ainsi, l'équation personnelle du pointé sur l'arête, qui se double dans la mesure de la longueur d'un pendule réversible à cause de l'opposition des arêtes des couteaux, disparaît dans la différence de $\lambda_2 - \lambda_1$.

Ainsi, l'influence inconnue sur la longueur, pendant le mouvement, de l'écrasement du couteau s'élimine dans la différence $\lambda_2 - \lambda_1$, puisque les deux pendules, ayant même poids, doivent également déformer leurs couteaux s'ils oscillent dans les mêmes limites d'amplitude. (A suivre.)