HAL
open science

Méthode nouvelle pour la discussion des problémes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique (suite et fin)

M.A. Cornu

▶ **To cite this version:**

M.A. Cornu. Méthode nouvelle pour la discussion des problémes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique (suite et fin). J. Phys. Theor. Appl., 1874, 3 (1), pp.44-52. 10.1051/jphystap:01874003004400 . jpa-00237006

HAL Id: jpa-00237006

https://hal.science/jpa-00237006v1

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉTHODE NOUVELLE POUR LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DE DIFFRACTION DANS LE CAS D'UNE ONDE CYLINDRIQUE

(SUITE ET FIN);

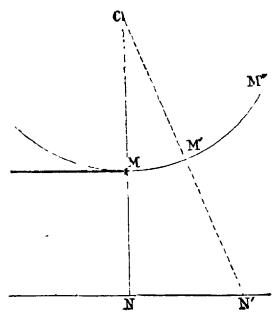
PAR M. A. CORNU.

III. — *Applications.*

Résultante de l'onde entière. — Elle est représentée en intensité par le carré de la distance des points asymptotiques = 2,000. Sa phase est $\frac{1}{8}$; autrement dit, la vibration résultante est en retard de $\frac{1}{8}$ de période sur celle du pôle de l'onde.

Ombre du bord d'un écran rectiligne indéfini. — Supposons que l'écran soit parallèle au plan du tableau NN′ (*fig.* 5) et que

Fig. 5.



son bord affleure au pôle de N, c'est-à-dire en M. Supposons le point N′ très-éloigné de l'ombre géométrique du bord de l'écran; l'arc efficace de l'onde se composera de la demi-onde M′M″ et de l'autre MM′ demi-onde presque tout entière; sur la ligne représentative, les arcs utiles se composent de toute la spirale de droite jusqu'au point asymptotique J (*fig.* 4) et de la spirale de gauche jusqu'à un point α d'une spire d'ordre élevé définie par la longueur MM′. A mesure que le point N′ se rapproche de N, M se rapproche de M′, et le point α se rapproche du centre de la ligne; l'intensité de la lumière sera représentée par le carré du rayon vecteur Jα; le point α décrivant les tours de la spirale de gauche, le

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphystap:01874003004400

rayon vecteur offre des variations périodiques de longueur, variations qui augmentent d'amplitude, jusqu'à la dernière et la plus grande des spires où le rayon vecteur passe par le *minimum minimorum* et le *maximum maximorum* : telle est l'explication des franges extérieures de l'ombre de l'écran.

Lorsque le point N′ arrive au point N, limite de l'ombre géométrique, le point α arrive au point μ ; l'intensité de la lumière, dans l'ombre géométrique, est donc représentée par le carré du rayon vecteur de la spirale de droite. A la limite de l'ombre, l'intensité est le quart de celle qu'aurait la lumière si les deux ondes agissaient simultanément, puisque l'amplitude est égale à la moitié de la distance des deux points asymptotiques J_1, J'_0 ; en deçà, l'amplitude décroît régulièrement jusqu'à zéro sans maxima ni minima, parce que le rayon vecteur de la spirale ne présente aucune variation périodique dans sa rotation autour du point asymptotique.

On peut représenter l'ensemble du phénomène par un tracé auxiliaire en construisant la courbe des intensités des franges successives. Il suffit de porter en ordonnées les carrés des rayons vecteurs (ou seulement les rayons vecteurs pour simplifier), menés du point asymptotique J à tous les points de la graduation de l'arc, les abscisses représentant le développement de l'arc. La courbe ainsi construite par points résout directement tous les problèmes qu'on peut se proposer sur les franges de l'écran ; les intensités sont les carrés des ordonnées [1]. Leur position sur le tableau relativement à la position idéale de l'ombre géométrique se calcule par la formule (7) donnée plus haut.

La distance des franges à l'ombre géométrique est exprimée par une loi approximative très-simple, loi qui est évidente à l'inspection de la courbe. En effet, les maxima et les minima des rayons vecteurs correspondent très-sensiblement aux points d'intersection de la ligne représentative avec la droite JJ′. Cette droite coupe toutes les spires en une série de points ρ_1, ρ_2, ρ_3..... les indices impairs correspondant aux maxima et les impairs aux minima : or il y a déjà une série de points β_1, β_2, β_3.... dont on con-

---

[1] Il est bon de ne pas oublier que l'intensité, dans le cas où l'écran n'est mesurée par le nombre 2 (carré de la distance des points asymptotiques $J_1 J'_0$), de sorte qu'il faut diviser tous les nombres par 2 si l'on prend pour unité l'intensité de la lumière normale.

naît les distances à l'origine μ comptée sur l'arc. Ces distances sont $\mu\beta_1 = \sqrt{2}$, $\mu\beta_2 = \sqrt{4}$, $\mu\beta_n = \sqrt{2n}$, ainsi qu'on le vérifie sur la courbe et qu'on le démontre en intégrant l'expression $d\sigma = k\,ds$ et exprimant σ en fonction de v; les points ρ_1, ρ_2, ρ_3,... sont situés respectivement en arrière de ces points à $\frac{1}{8}$ de spire de distance; or, comme on avance d'une demi-spire en ajoutant 2 au nombre n sous le radical $\sqrt{2n}$, on reculera sensiblement de $\frac{1}{8}$ de spire en retranchant $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ à ce nombre n. Donc les distances $\mu\rho_1$, $\mu\rho_2$,..., $\mu\rho_n$ sont exprimées approximativement par $\sqrt{2 - \frac{1}{2}}$, $\sqrt{4 - \frac{1}{2}}$, ..., c'est-à-dire $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{\frac{11}{2}}$, ..., $\sqrt{\frac{4n-1}{2}}$; comme ces valeurs sont proportionnelles aux distances x_1, x_2, ..., x_n des franges successives à l'ombre géométrique, la loi énoncée se trouve ainsi définie par une expression très-simple.

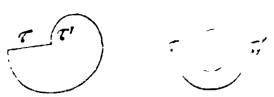
Ombre d'une fente. — Nous n'entrerons pas dans la discussion détaillée de ce cas; il n'offre aucune difficulté, d'après ce qui a été dit précédemment. Les intensités sont les carrés de la corde de l'arc $\tau\tau'$ de longueur constante, qui représente la largeur de la fente $2a$; la longueur de cet arc se calcule d'après la règle exposée plus haut, ainsi que la position correspondante des points du tableau. On obtient toutes les circonstances du phénomène en déplaçant cet arc $\tau\tau'$ sur toute la longueur de la double spirale.

Le lecteur pourra s'exercer à discuter d'abord le cas d'une fente très-large; on reconnaît sans peine l'existence de deux systèmes de franges tout à fait semblables à celles du bord d'un écran indéfini, dues aux deux bords de la fente; mais, au lieu de trouver un décroissement continu de la lumière vers les deux parties de l'ombre géométrique, on aperçoit des franges très-étroites et très-pâles, mais qui deviennent d'autant plus intenses (relativement à la lumière centrale) et plus larges que la fente est plus étroite.

Le cas d'une fente très-étroite est particulièrement instructif : l'*épanouissement* du faisceau diffracté, après le passage à travers une fente semblable, semble, au premier abord, incompatible avec les propriétés ordinaires de la lumière. La courbe représentative en donne une explication en quelque sorte intuitive : en effet, la

portion d'onde efficace étant égale à la largeur de la fente, l'arc correspondant $\tau\tau'$ sera très-petit, et sa corde, qui représente la racine carrée de l'intensité, gardera une valeur sensiblement constante sur tous les tours de spire où la courbure est relativement faible. Il en résulte que l'éclairement dû à la lumière diffractée est, sur une longueur considérable du tableau, sensiblement constant et égal à celui de la partie géométriquement éclairée (limitée aux points où l'arc $\tau\tau'$ contient l'origine μ); que, de plus, cet éclairement constant est proportionnel au carré de l'ouverture de la fente; enfin que l'intensité lumineuse va en décroissant jusqu'au moment où l'arc constant $\tau\tau'$ occupe une spire complète (*fig.* 7), parce que le

Fig. 7.



rayon vecteur passe alors par un minimum. Au delà, les alternatives se succèdent; il y a des franges sombres ou plus claires, suivant que l'arc $\tau\tau'$ comprend un nombre pair ou impair de demi-spires.

Un tracé graphique auxiliaire permettrait, comme dans le cas précédent, de représenter l'ensemble du phénomène.

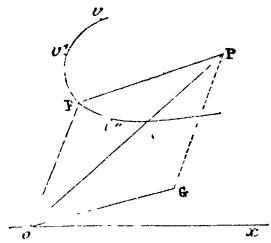
Remarque. — Ce phénomène d'épanouissement montre que, comme les ondes sonores (auxquelles les considérations précédentes s'appliquent sans réserve), les ondes lumineuses peuvent s'éloigner complétement de la propagation rectiligne qu'on est accoutumé à leur voir suivre. Dans l'un et dans l'autre cas, la cause de cette dérogation apparente est la même; c'est que l'ouverture qui leur livre passage est petite par rapport à la longueur d'ondulation.

Ombre d'un fil. — La discussion de ce problème est un peu moins simple que celle des exemples précédents, parce que l'on a à comparer deux portions d'ondes non contiguës, séparées par une portion inefficace, $\tau\tau'$ représentant la largeur du fil. Nous ne nous arrêterons pas à cette discussion.

Mais nous indiquerons une seconde marche plus instructive, qui consiste à déduire les résultats de l'ombre du fil de ceux de

l'ombre d'une fente de même largeur. Soit OF (*fig.* 8) la droite représentative du mouvement vibratoire envoyé en un certain point, quelconque d'ailleurs, du tableau.

Fig. 8.



Supposons maintenant qu'on enlève le fil ; alors l'onde entière enverra un mouvement dont l'amplitude est représentée par OP = JJ′, POx = 45°, comme sur la ligne représentative. Si l'on substitue alors au fil une fente de même largeur et de même position, on aura, pour droite représentative du mouvement envoyé au même point du tableau, une droite OG ; mais la diagonale du parallélogramme, construit sur OF et OG, doit reproduire OP, car la somme des deux parties de l'onde reproduit l'onde entière. Donc aussi la droite FP = OG représente l'amplitude du mouvement dû à la fente, d'où l'on conclut la règle suivante : On porte, à partir du point P comme origine, les amplitudes Pυ, Pυ′, Pυ″,..., envoyées à divers points du tableau N, N′, N″,..., dirigées suivant leurs phases respectives mesurées par l'angle polaire ; on forme ainsi une courbe υ, υ′, Fυ″,.... Cette même courbe représente aussi les amplitudes et les phases, correspondant aux mêmes points du tableau, dues à l'*écran complémentaire,* à la condition de prendre le point O comme origine des rayons vecteurs et des angles.

La méthode s'applique évidemment à tous les systèmes d'écrans complémentaires, c'est-à-dire aux écrans dont les pleins remplacent les vides, et réciproquement.

L'exemple le plus simple qu'on puisse prendre comme vérification est le cas, discuté plus haut, du bord d'un écran indéfini d'un côté ; l'écran complémentaire serait celui qui, ayant même bord, se prolongerait à l'infini de l'autre côté. Le lecteur verra aisémen

que, dans ce cas, les deux points asymptotiques JJ′ (*fig.* 4) tiennent lieu des points OP, et que la courbe ν, ν', ν''.... n'est autre que la double spirale elle-même.

IV. — *Calcul numérique d'un cas particulier.*

Construction pratique de la ligne représentative. — Si l'on veut effectuer quelques calculs numériques par la méthode qui vient d'être développée, il est bon de tracer l'épure de la *fig.* 4 à une échelle plus grande pour obtenir plus de précision. L'échelle de 20 millimètres pour $\nu = 0,1$ est très-commode; après la détermination des points par abscisse et ordonnée à l'aide de la table, on peut se dispenser du tracé à main levée de la courbe, tracé qui présente une certaine difficulté graphique, et l'exécuter tout entier au compas; en effet, le calcul du rayon de courbure en chaque point est très-simple. La formule (4) exprimée en fonction de ν se simplifie beaucoup, parce qu'on a choisi le coefficient arbitraire k, de manière à réduire à l'unité le coefficient des intégrales (6) qui expriment les coordonnées des points de la courbe :

$$R = k\,\frac{r\,d\lambda}{2\pi\,(r+d)}\,\frac{1}{s} = \frac{k}{\pi\nu}\sqrt{\frac{2\,(r-d)}{r\,d\lambda}} = \frac{1}{\pi\nu}.$$

Ainsi le rayon de courbure au point $\varepsilon = \nu$ se réduit à l'inverse de $\pi\nu$. Voici une table auxiliaire donnant de $\frac{2}{10}$ en $\frac{7}{10}$ de ν (ou de ε) la valeur du rayon de courbure :

ε	R	ε	R	ε	R	ε	R
0,2	1,592	1,2	0,265	2,2	0,145	3,2	0,100
0,4	0,796	1,4	0,227	2,4	0,133	3,4	0,094
0,6	0,530	1,6	0,199	2,6	0,122	3,6	0,089
0,8	0,398	1,8	0,177	2,8	0,113	3,8	0,084
1,0	0,318	2,0	0,159	3,0	0,106	4,0	0,080

A l'aide de ces nombres, qui sont exprimés en fonctions de l'unité avec laquelle on compte ν, on détermine l'ouverture de compas convenable pour tracer l'arc de courbe compris entre les deux

points voisins : ainsi, pour tracer l'arc contigu du point marqué ν ou $\varepsilon = 1,0$, on prend sur l'échelle des abscisses la longueur de 0,318, avec un compas; on détermine le centre de courbure du point donné en traçant avec cette ouverture deux arcs de cercle du point 0,9 et du point 1,1 comme centre. De ce centre de courbure comme centre, on trace au crayon l'arc de cercle qui passe par ces deux points; comme vérification, il passe par le point intermédiaire 1,0; on continue ainsi de proche en proche.

A l'origine, la courbure étant infinie, la construction au compas est en défaut; mais on peut l'employer dès le groupe 0,3, 0,4, 0,5.

V. — *Problèmes numériques.*

1° *A quelle distance du tableau faut-il placer une fente, de largeur donnée $2a$, pour que la frange centrale ait une intensité minima? Déterminer, en outre, cette intensité.*

Ce problème conduirait à des calculs assez compliqués, si on l'essayait par les méthodes ordinaires; il se résout à la simple inspection de la courbe. En effet, la partie efficace de l'onde doit être symétriquement disposée par rapport au pôle μ; dès lors il suffit de voir quels sont les points des deux spirales qui sont les plus voisins, et l'on aura le *minimum minimorum* d'intensité que puisse avoir la frange centrale due à une fente.

Avec le compas, on détermine aisément que les points de distance minima correspondent à $\nu = \pm 1,875$; la formule (5) permet de tirer de là, en remarquant que $s = a$,

$$\frac{2(r+d)}{rd\lambda} a^2 = (1,857)^2,$$

d'où l'on tire d si l'on connaît λ et $r + d$ (distance du tableau à la fente) [1]. Le problème n'est pas toujours possible, car la valeur de d est donnée par une équation du second degré.

---

[1] On a fait l'expérience avec une fente de $0^{mm},81$ de largeur : $2a = 0^{mm},81$, $d + r = 102\frac{1}{4}^{mm}$, $\lambda = 0^{mm},000624$ (verre rouge de vitrail, verre double coloré à l'oxydule de cuivre). L'expérience a donné $d = 184^{mm}$ avec une incertitude de $\pm 5^{mm}$: le calcul donne $d = 512^{mm} = 332 = 180^{mm}$ ou $84\frac{1}{4}^{mm}$: cette seconde valeur correspond au cas où la fente serait près de la source (la formule est symétrique en d et r), mais les franges sont si larges dans ce cas qu'on les observe moins bien.

L'intensité de la lumière est le carré de la distance des deux points; cette distance, relevée sur la courbe, $= 1,08$, d'où l'intensité $= 1,17$, si on la rapporte à celle de la lumière directe, c'est-à-dire sans aucun écran, qui est égale à $(JJ')^2 = 2$; l'intensité relative de la frange centrale est donc 0,585.

2° *Quelle est la distance des deux franges brillantes symétriques du centre de l'ombre d'une fente $2a$ observée dans les conditions suivantes : $r = 785^{mm}$, $d = 239^{mm}$, $\lambda = 0^{mm},000624$* (¹), $2a = 0^{mm},81$?

La formule (5) permet de calculer l'arc de courbe $2v$ qui correspond à cet arc d'onde $2s = 2a$,

$$v^2 = \frac{2(r+d)}{rd\lambda}a^2, \quad \text{d'où} \quad v = \pm 1,694;$$

de sorte que l'arc total représentant la largeur de la fente sur la ligne représentative est égal à $3,388 = \tau\tau'$. Il faut tracer la courbe des amplitudes correspondant au déplacement relatif du centre de cet arc $\tau\tau'$. A cet effet, on commence par marquer les points τ_0, τ'_0, c'est-à-dire $\mu\tau_0 = +1,694$, sur l'une des spirales $\mu\tau'_0 = -1,694$; au compas, ou mieux avec une bande de papier, on relève la distance $\tau_0\tau'_0$ et on la porte en ordonnée à l'abscisse zéro; on avance de 0,1 le point τ_0, et on le désigne par τ_1; on recule τ'_0 de 0,1 jusqu'en τ'_1, et on relève $\tau_1\tau'_1$, qu'on porte en ordonnée à l'abscisse 0,1 et ainsi de suite. On construit ainsi une courbe dont le premier maximum correspond à l'abscisse $v = 0,58$; c'est l'ordonnée correspondant à la frange brillante. D'après la formule (7), on en conclut la distance au milieu de l'ombre

$$x = v\sqrt{\frac{(r+d)\lambda d}{2r}} = 0^{mm},18, \quad \text{d'où} \quad 2x = 0^{mm},36.$$

(¹) La longueur d'onde de cette lumière, produite par le verre rouge cité plus haut, a été déterminée à l'aide de deux fentes très-fines, d'environ $0^{mm},1$, découpées dans une lame de clinquant, dont les milieux étaient distants de $1^{mm},28 = 2a$; sept franges brillantes observées à une distance de $d = 244^{mm}$, dans le plan focal d'un micromètre à fil, ont donné $x = 0^{mm},119$ comme valeur moyenne d'une frange : on calcule λ par la formule

$$\lambda = \frac{2ax}{d}.$$

L'expérience a donné, pour la distance des deux franges brillantes, $2x = 0^{mm},39$, avec un peu d'incertitude, parce que les deux franges sombres contiguës sont pâles et mal définies.

Ces exemples suffisent pour permettre au lecteur de résoudre numériquement tous les problèmes analogues qu'il pourrait se proposer; mais il est bon de faire remarquer aux physiciens qui voudraient essayer des vérifications précises que toutes les franges de diffraction ne sont pas aussi bien définies que les franges des *deux miroirs de Fresnel,* par exemple, et que souvent il y a, non pas un maximum, mais une sorte d'arrêt dans la variation de l'intensité de la lumière, ce qui rend les mesures très-incertaines; il est donc bon de ne chercher des vérifications précises que dans le cas où les franges sont bien régulières.