



HAL
open science

La dilatation thermique du milieu cristallin - IV. Les coefficients d'élasticité, les tensions et la dilatation thermique

J. Laval

► To cite this version:

J. Laval. La dilatation thermique du milieu cristallin - IV. Les coefficients d'élasticité, les tensions et la dilatation thermique. *Journal de Physique et le Radium*, 1961, 22 (12), pp.783-791. <10.1051/jphys-rad:019610022012078300>. <jpa-00236579>

HAL Id: jpa-00236579

<https://hal.science/jpa-00236579v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

LA DILATATION THERMIQUE DU MILIEU CRISTALLIN

Par J. LAVAL,
Collège de France, Paris.

IV

Les coefficients d'élasticité, les tensions et la dilatation thermique.

Résumé. — Toute déformation isotherme qui entraîne une variation de volume fait augmenter ou diminuer les tensions thermiques. En conséquence, tout coefficient d'élasticité qui se rapporte à une variation de volume renferme une composante égale à la tension thermique.

A température croissante, quand le milieu cristallin se dilate libre de toute contrainte, les coefficients d'élasticité diminuent (en grandeur absolue), et cette diminution est déterminée par la dilatation thermique. La diminution calculée paraît en bon accord avec les données expérimentales.

Enfin, une dernière étude est consacrée à la variation que le coefficient de compressibilité subit lorsque le milieu cristallin, maintenu à température constante, est soumis à une pression croissante.

Abstract. — Any isothermal deformation leading to a variation of volume causes thermal strains to increase or decrease. Consequently, any elastic coefficient related to a variation of volume includes a component equal to the thermal strain.

At increasing temperature, when the crystalline medium expands, free from all constraints, the elastic coefficients decrease (in absolute magnitude) and this decrease is determined by the thermal expansion. The calculated decrease gives good agreement with the experimental data.

Finally, a study is made of the variation of the compressibility coefficient when the crystalline medium, kept at constant temperature, is subjected to an increasing pressure.

A. Les tensions thermiques et les coefficients d'élasticité.

Cas des cristaux cubiques formés par les métaux (1). — Quand le milieu cristallin subit une contraction ou une dilatation isotrope à température constante, chaque facteur $g_{s\tau}$ (9) et chaque pulsation $\omega_{s\tau}$ (67) varient. Mais tant que la contraction et la dilatation restent minimales, tant qu'elles développent des tensions conformes à la loi de Hooke, tous les rapports (24)

$$\xi_{s\tau} = g_{s\tau} / \omega_{s\tau}^2$$

restent à peu près constants ; car la croissance ou la décroissance relative des produits

$$D_a^{\alpha\beta\gamma} a_1, \quad D_{ab}^{\alpha\beta\gamma} a_1$$

est, dans l'ensemble, à peu près égale à celle des dérivées secondes $C_a^{\alpha\beta}$, et partant à celle des carrés des pulsations $\omega_{s\tau}^2$ (24). D'autre part, l'élévation ou l'abaissement relatif des pulsations $\omega_{s\tau}$ étant très petit, chaque énergie $W_{s\tau}$ (3) n'éprouve pas de variation notable, même aux basses températures.

(1) Les formules numérotées de 1 à 31, les références de 1 à 5 et les figures 1 et 2 se trouvent dans la première partie ; les formules numérotées de 32 à 53, les références de 6 à 10, et les figures 3, 4, 5, 6, 7 dans la seconde partie ; les formules numérotées de 54 à 69, la référence numérotée 11, la figure 8 dans la troisième partie.

Pour des raisons semblables, une faible contraction ou dilatation du milieu cristallin, à température constante, ne fait pas varier considérablement, non plus, l'énergie moyenne W_m (27-28-29) ni les coefficients b (28) et c (29).

Cela suppose la dilatation ou la contraction isotrope ; en général

$$\Delta v/v = \sum_{\beta} t_{\beta\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (70)$$

et les trois dilatations ($t_{\beta\beta} > 0$) ou contractions ($t_{\beta\beta} < 0$) élémentaires diffèrent entre elles. Mais, même si la dilatation ou la contraction se réduit à une seule composante, $t_{\beta\beta}$ (β constant), en grandeur absolue, les variations qu'elle imprime aux dérivées secondes et troisièmes de l'énergie potentielle sont de même sens ; dans l'ensemble, les modules de ces dérivées décroissent s'il y a dilatation et croissent s'il y a contraction ; donc les facteurs $g_{s\tau}$ et les carrés $\omega_{s\tau}^2$ des pulsations augmentent à la fois ou diminuent à la fois ; et tant que la contraction ou la dilatation élémentaire $t_{\beta\beta}$ reste minime, tant qu'elle développe des tensions proportionnelles à son amplitude, $|t_{\beta\beta}|$, les rapports $\xi_{s\tau} = g_{s\tau} / \omega_{s\tau}^2$, les énergies $W_{s\tau}$ et, de même, les coefficients b et c et l'énergie W_m ne subissent pas de variation notable.

(1) $t_{\beta\delta}$ sont les déformations élémentaires : si u est le déplacement du point x

$$t_{\beta\delta} = \partial u_{\beta} / \partial x^{\delta} ; \quad \beta, \delta = 1, 2, 3.$$

Une déformation de cisaillement $t_{\beta\delta}$ ($\delta \neq \beta$) accroît les distances entre certains atomes et les diminuent entre d'autres. En conséquence, elle augmente des dérivées secondes $C_a^{\alpha\beta}$ (1-2) tandis qu'elle réduit d'autres dérivées du même ordre. Mais les distances accrues sont en même nombre que les distances diminuées, et les dérivées secondes renforcées. Et si la déformation $t_{\beta\delta}$ est uniforme, c'est-à-dire de même grandeur $|t_{\beta\delta}|$ partout — ce que je suppose — et si elle reste en outre minime, développant des tensions en raison directe des déplacements, dans tous les éléments de la matrice de Fourier (20), les croissances et les décroissances des dérivées secondes se compensent sensiblement ; de la sorte, les pulsations $\omega_{s\tau}$ des oscillations fondamentales ne sont pas sensiblement modifiées ; les augmentations et les diminutions des dérivées troisièmes se compensent de même dans les expressions des facteurs $g_{s\tau}$ (9) qui ne subissent donc pas, non plus, de variations notables ; et pour la même raison, les coefficients b (28) et c (29) ne sont pas sensiblement altérés.

Ainsi, tant que le milieu cristallin reste le siège d'une déformation isotherme qui développe des forces de rappel obéissant à la loi de Hooke, la tension thermique a sensiblement pour expression :

$$T_{\Theta} = B/v \quad (71)$$

B étant une constante :

$$B = \frac{1}{\mu} (Q + bW_m^2 + cW_m^3)$$

donc

$$(\partial T_{\Theta} / \partial v)_{\Theta} = -B/v^2 = -T_{\Theta}/v \quad (71 \text{ bis})$$

et compte tenu de (70)

$$\Delta T_{\Theta} = -T_{\Theta} \sum_{\beta} t_{\beta\beta}.$$

1. COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ ISOTHERME. — Dans une étude précédente [5] (1), j'ai rapporté les coefficients d'élasticité isotherme, $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ (ou $c_{\Theta}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$) aux translations du milieu cristallin et aux dérivées secondes de son énergie potentielle. Je suppose le milieu libre de toute tension interne. Cette condition n'est pas remplie. A toute température, même au zéro absolu, le milieu cristallin est le siège de tensions thermiques (2).

(1) Dans cette étude je désigne les coefficients d'élasticité isotherme par $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$, c'est-à-dire $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} = c_{\Theta}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$.

(2) De nombreux auteurs font état d'une pression interne exercée par les électrons de conductibilité dans les cristaux métalliques. Ils définissent cette pression conformément aux lois qui régissent la statistique de Fermi et de Dirac. C'est tenir les électrons de conductibilité pour des électrons libres, et c'est envisager la surface du cristal comme la paroi rigide d'un récipient fermé. Les électrons de conductibilité sont dans le champ de forces des ions positifs. Et c'est l'énergie potentielle mutuelle des électrons de conduc-

Chez les cristaux cubiques formés par les métaux, la dilatation thermique est isotrope. Elle développe des tensions $T_a^{\alpha\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) qui ont la même intensité : $T_a^{11} = T_a^{22} = T_a^{33} = T_a$. Et la condition pour que le milieu cristallin, libre de toute contrainte, soit en équilibre se traduit par l'égalité [2]

$$T_a + T_{\Theta} = 0. \quad (72)$$

Imprimons au milieu cristallin, abandonné à lui-même, dont la dilatation thermique s'élève à $\eta_{\beta\beta}$, une légère déformation isotherme ($t_{\beta\beta}$) (3) ($|t_{\beta\beta}| \ll 1$). Les dilatations sont portées à $\eta_{\beta\beta} + t_{\beta\beta}$. Et la tension thermique et la tension développée par la dilatation deviennent respectivement $T_{\Theta} + \Delta T_{\Theta}$ et $T_a + \Delta T_a$. Au lieu de la tension $T_a^{11}_{BA}$ égale et opposée à la tension $T_{\Theta}^{11}_{BA}$ (fig. 2), prenons en compte la tension $T_a^{11}_{AB}$, exercée par le demi-cristal A sur le demi-cristal B , donc de même sens $\overrightarrow{Ox_1}$ que la tension $T_{\Theta}^{11}_{BA}$. La condition d'équilibre devient :

$$T_a^{11}_{AB} = T_{\Theta}^{11}_{BA} \quad (72 \text{ bis})$$

et

$$\Delta T_a^{11}_{AB} = \sum_{\beta} c_{\Theta}^{11,\beta\beta} t_{\beta\beta}$$

$$\Delta T_{\Theta}^{11}_{BA} = -T_{\Theta}^{11}_{BA} \sum_{\beta} t_{\beta\beta}.$$

Ainsi, compte tenu de la condition d'équilibre (72 bis) la déformation isotherme ($t_{\beta\beta}$) développe suivant $\overrightarrow{Ox_1}$, une tension

$$\tau^{11} = \sum_{\beta} (c_{\Theta}^{11,\beta\beta} + T_{\Theta}) t_{\beta\beta}$$

et, en général, des tensions

$$\tau^{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} (c_{\Theta}^{\alpha\alpha,\beta\beta} + T_{\Theta}) t_{\beta\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

La tension τ^{11} a pour expression explicite :

$$\tau^{11} = (c_{\Theta}^{11,11} + T_{\Theta}) t_{11} + (c_{\Theta}^{11,22} + T_{\Theta}) (t_{22} + t_{33}) \\ (c_{\Theta}^{11,33} = c_{\Theta}^{11,22}).$$

tibilité et des ions positifs qui assure en majeure partie la cohésion des atomes qui forment les cristaux métalliques (Wigner, Seitz, Fuchs, [12], [13], [14]). Ainsi, les électrons de conductibilité sont des électrons liés ; ils n'exercent point de tension interne. D'autre part, les oscillations de plasma telles qu'elles sont présentement définies [15], ne développent pas, non plus, de tensions internes, précisément des tensions qui soient notables. Donc, à des différences infimes près, les tensions internes qui s'exercent dans le milieu cristallin sont dues exclusivement à l'agitation thermique des atomes.

Aux basses températures, la dilatation n'obéit plus exactement à la loi de Grüneisen. Klémens interprète cet écart par une dilatation d'origine électronique [16]. Mais, comme je l'ai montré plus haut, la loi de Grüneisen n'est plus valable aux basses températures.

(3) Par ($t_{\beta\beta}$) je désigne le tenseur de la déformation, soit les 9 déformations élémentaires $t_{\beta\delta}$; $\beta, \delta = 1, 2, 3$.

Donc, les tensions $\mathcal{T}^{\alpha\alpha}$ se rapportent aux coefficients d'élasticité (isotherme) apparents :

$$c'_{\Theta}{}^{11,11} = c_{\Theta}{}^{11,11} + T_{\Theta}; \quad c'_{\Theta}{}^{11,22} = c_{\Theta}{}^{11,22} + T_{\Theta}. \quad (73)$$

Les déformations de cisaillement $t_{\beta\delta}$ ($\delta \neq \beta$) n'entraînent nulle variation de volume, partant nulle variation sensible de la tension thermique ; donc le coefficient $c_{\Theta}{}^{12,12}$ reste inchangé (1) :

$$c'_{\Theta}{}^{12,12} = c^{12,12}.$$

Et le coefficient de compressibilité (isotherme) apparent a pour expression (2) :

$$\Gamma'_{\Theta} = \frac{c'_{\Theta}{}^{11,12} + 2c'_{\Theta}{}^{11,22}}{3} = \Gamma_{\Theta} + T_{\Theta}. \quad (74)$$

Cas général. — Un cristal triclinique est le siège de six tensions thermiques distinctes $T_{\Theta}{}^{\alpha\gamma}$ ($T_{\Theta}{}^{\gamma\alpha} = T_{\Theta}{}^{\alpha\gamma}$), et ses déformations ont en général pour effet de déplacer les uns par rapport aux autres les différents réseaux formés par les atomes en même position dans la maille [18], [5]. Mais entre les limites où la loi de Hooke reste valable, ces déplacements relatifs restent extrêmement petits. Ils n'entraînent pas une variation considérable des dérivées secondes C_{α}^{β} , troisièmes $D_{\alpha\beta}^{\gamma}$, etc... (1-2) de l'énergie potentielle ; partant ils n'apportent pas des modifications importantes aux pulsations $\omega_{S\tau}$ des oscillations fondamentales, ni aux facteurs $g_{S\tau}$ (9) ni aux coefficients b (28) et c (29). Et, tant que ces modifications restent négligeables, une légère déformation isotherme ($t_{\beta\delta}$) développe dans un milieu cristallin triclinique des tensions :

$$\mathcal{T}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta\delta} c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} t_{\beta\delta} + T_{\Theta} \sum_{\beta} t_{\beta\beta}.$$

D'où l'on conduit les coefficients d'élasticité (isotherme) apparents :

$$c'_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} = c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} + T_{\Theta} \alpha\gamma$$

mais, si δ diffère de β ,

$$c'_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} = c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}; \quad (\delta \neq \beta).$$

2. COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ ADIABATIQUE. — Dans un milieu cristallin, libre de toute contrainte, à température constante et uniforme, la masse spécifique est en tous points la même à *petite échelle* : c'est-à-dire, mesurée dans une sphère dont le rayon minime, égal à quelques dizaines d'angströms, est plus petit que le rayon d'action sensible r des forces répulsives qui forment les tensions thermiques [2].

(1) Le coefficient $c^{12,12} = \mathcal{N}^{12,12}$, de même que le coefficient $c^{12,12}$ (Voigt) n'est pas affecté par la tension thermique [5].

(2) Dans le calcul du coefficient de dilatation, je fais état du coefficient de compressibilité Γ (8) et non du coefficient Γ' (74) ; mais, dans le calcul de l'accroissement qui est apporté à la tension thermique par une élévation de la température, je tiens compte de l'affaiblissement subi par cette tension du fait de la dilatation (33).

Parmi les composantes harmoniques de l'agitation thermique, les oscillations du genre acoustique, qui ont les plus basses fréquences, si elles ne sont pas strictement transversales, développent dans le milieu cristallin des contractions et des dilatations locales qui s'étendent sur des distances plus grandes que le rayon d'action sensible r des forces répulsives ; mais ces dilatations et ces contractions sont compensées à chaque instant par les variations de volume qui sont produites par les autres composantes harmoniques de l'agitation thermique. De la sorte, dans le milieu cristallin abandonné à lui-même et à température constante et uniforme, les tensions thermiques ont partout la même intensité. D'autre part, du zéro absolu aux températures moyennes, tant que les oscillations secondaires restent négligeables, les oscillations fondamentales de l'agitation thermique restent conformes aux oscillations déterminées par la matrice de Fourier [20]. Cela étant, les oscillations fondamentales de basses fréquences se rapportent aux coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$ [5], déduits directement de la matrice de Fourier, ou aux coefficients d'élasticité isotherme de la théorie classique $c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$, définis par Voigt et par Max Born [17], [18] (3), si l'on admet que les forces de cohésion qui unissent les atomes engagés dans le milieu cristallin peuvent être tenues pour centrales. Sous l'action des ondes élastiques, le milieu cristallin diffuse les rayons X, les électrons, les neutrons. Et de l'intensité que prennent ces diffusions, il est possible de déduire les coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$ où les coefficients d'élasticité isotherme de Voigt-Max Born $c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$.

Mais cette uniformité des tensions thermiques dans un cristal abandonné à lui-même est rompue par une oscillation étrangère, excitée dans le milieu cristallin par des impulsions externes ou par l'effet piézoélectrique. Comme toute composante harmonique de l'agitation thermique et suivant la même loi, l'oscillation excitée développe des tensions internes [2]. Mais si grande que soit son amplitude, les tensions qu'elle produit restent minimes, négligeables par rapport aux tensions thermiques, même au zéro absolu de la température. C'est par une autre action que l'oscillation excitée influe sur les tensions thermiques. Si elle n'est pas strictement transversale, elle imprime au milieu cristallin des contractions et des dilatations locales qui se répètent périodiquement dans l'espace et le temps et qui s'étendent sur des longueurs très grandes par rapport au rayon d'action sensible, r , des forces répulsives. Ainsi l'oscillation excitée fait osciller à *grande échelle* le volume spécifique du milieu cris-

(3) Les coefficients $c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ dont je fais état sont ceux que Max Born a définis dans le traité intitulé « Atomtheorie des Festenzustandes » Max Born suppose les forces de cohésion centrales et rapporte de la sorte les coefficients d'élasticité de Voigt à la structure atomique du milieu cristallin.

tallin ; elle fait donc osciller, de même, les tensions thermiques. Ces oscillations des tensions thermiques étant rapides, augmentent ou diminuent localement l'énergie thermique, donc élèvent ou abaissent localement la température selon qu'elles sont produites par une contraction ou par une dilatation du milieu cristallin. En conséquence, l'oscillation excitée se rapporte aux coefficients d'élasticité adiabatique apparents ⁽¹⁾ :

$$D'_{\sigma\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = D_{\sigma\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} + T_{\Theta} \alpha^3 \quad (75)$$

si l'on adopte la théorie que j'ai proposée [5], ou aux coefficients

$$c'_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} = c_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} + T_{\Theta} \alpha^{\gamma} \quad (75 \text{ bis})$$

si l'on adopte la théorie classique (Voigt-Max Born) [17], [18]. Bien entendu si δ diffère de β , on a :

$$\text{ou} \quad \left. \begin{aligned} D'_{\sigma\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} &= D_{\sigma\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \\ c'_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} &= c_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} \end{aligned} \right\} \beta \neq \delta$$

On retombe sur les relations (75-75 bis) par le calcul qui donne les équations classiques, relatives à la propagation des oscillations acoustiques [20]. Si le cristal est sillonné par un train d'ondes élastiques planes, chacun de ses éléments est soumis à une force (oscillante) df_{α} ayant pour composantes :

$$df_{\alpha} = \sum_{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left(\frac{\partial E}{\partial t_{\alpha\gamma}} \right) \right] dx^1 dx^2 dx^3$$

$\alpha, \gamma = 1, 2, 3.$

Et selon la théorie classique de l'élasticité [20] la densité d'énergie E se rapporte aux coefficients d'élasticité adiabatique apparents $c'_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ (75 bis).

Ces conclusions concernent une oscillation excitée dont la longueur d'onde Λ est beaucoup plus grande que le rayon d'action sensible, r , des forces répulsives qui forment les tensions thermiques [2] (soit à une oscillation ayant une fréquence moindre que 10^{10} s^{-1}).

Envisageons une oscillation excitée dont la longueur d'onde Λ diminue continuellement. Quand cette longueur d'onde devient inférieure au rayon d'action sensible, r , des forces répulsives, les variations locales que l'oscillation excitée imprime aux tensions thermiques s'atténuent progressivement, puis finissent par s'annuler, et les coefficients d'élasticité auxquels se rapportent l'oscillation excitée, égaux primitivement aux coefficients d'élasticité

⁽¹⁾ Rappelons que les coefficients d'élasticité adiabatique $c'_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ sont liés aux coefficients d'élasticité isotherme $c_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ par la relation

$$c_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} = c_{\Theta}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta} + \frac{\lambda^{\alpha\gamma} \lambda^{\beta\delta}}{\rho c_v} \Theta$$

où $\lambda^{\alpha\gamma} \lambda^{\beta\delta}$ sont les coefficients thermiques des tensions $T_{\Theta}{}^{\alpha\gamma}$ et $T_{\Theta}{}^{\beta\delta}$, c_v la chaleur spécifique à volume constant, et ρ la masse spécifique [19].

adiabatique apparents, $c'_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ (75 bis), tendent vers les coefficients d'élasticité isotherme $c_{\sigma}{}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ (72).

Chez les cristaux cubiques formés par les métaux, à la température ordinaire, la tension thermique T_{Θ} n'atteint que le centième, environ, du coefficient de compressibilité isotherme Γ (8). Mais aux températures élevées, proches du point de fusion, elle peut excéder le dixième du même coefficient.

B. Variation des coefficients d'élasticité avec la température.

Cas des cristaux cubiques formés par les métaux.

À température croissante, lorsque le milieu cristallin se dilate libre de toute contrainte externe, la dérivée (négative) (69)

$$d \text{Log. } c^{11} / d \text{Log. } v \quad (2)$$

reste en gros constante ; et, à la température Θ , le coefficient d'élasticité apparent $c'_{\Theta}{}^{11}$ (73) a pour expression approximative :

$$c'_{\Theta}{}^{11} = c_0^{11} e^{-\varphi^{11}\delta(\Theta)} + T_{\Theta}$$

$$\left(\delta(\Theta) = \int_0^{\Theta} \beta(\Theta) d\Theta \right)$$

où c_0^{11} est, au zéro absolu, la grandeur du coefficient c^{11} , et φ^{11} un coefficient constant, égal et de signe opposé, au module moyen de la dérivée $d \text{Log. } c^{11} / d \text{Log. } v$, entre le zéro absolu et la température de fusion. À la même approximation nous avons :

$$dc'_{\Theta}{}^{11} / d\Theta = -\beta(\Theta) \varphi^{11} c_0^{11} e^{-\varphi^{11}\delta(\Theta)} + dT_{\Theta} / d\Theta. \quad (76)$$

Quand la température tend vers le zéro absolu, le coefficient de dilatation cubique $\beta(\Theta)$ et la dérivée $dT_{\Theta} / d\Theta$ s'annulent, donc la dérivée $dc'_{\Theta}{}^{11} / d\Theta$ tombe aussi à zéro.

Aux températures moyennes, tant que la dérivée $d\alpha / d\Theta$ ((54) et fig. 6) reste sensiblement constante, l'exposant $\varphi^{11} \delta(\Theta)$ reste petit, de quelques centièmes au dixième seulement, et

$$\frac{dc'_{\Theta}{}^{11}}{d\Theta} \simeq -\beta(\Theta) \varphi^{11} c_0^{11} \left(1 - \varphi^{11} \delta(\Theta) + \frac{1}{2!} \varphi^{11^2} \delta^2(\Theta) \right) + \frac{dT_{\Theta}}{d\Theta}.$$

La température s'élevant, le produit

$$\beta(\Theta) \left(1 - \varphi^{11} \delta(\Theta) + \frac{1}{2} \varphi^{11^2} \delta^2(\Theta) \right)$$

conserve grossièrement la même grandeur, car

⁽²⁾ c^{11} , c^{12} , c^{44} sont les symboles à deux indices des coefficients d'élasticité (Voigt)

$$c^{11} = c^{11,11} ; \quad c^{12} = c^{11,22} ; \quad c^{44} = c^{23,23} = c^{12,12}.$$

l'accroissement du coefficient $\beta(\Theta)$ compense à peu près la décroissance du facteur

$$\left(1 - \varphi^{11} \delta(\Theta) + \frac{1}{2} \varphi^{11^2} \delta^2(\Theta)\right)$$

et comme la dérivée (positive) $dT_\Theta/d\Theta$ est encore minime par rapport au produit

$$\beta(\Theta) \varphi^{11} c_0^{11} \left(1 - \varphi^{11} \delta(\Theta) + \frac{1}{2} \varphi^{11^2} \delta^2(\Theta)\right),$$

la dérivée $dc_\Theta^{11}/d\Theta$ reste à peu près constante.

Aux températures élevées, proches du point de fusion, la dérivée $dT_\Theta/d\Theta$ tend vers

$$(k/\mu\nu) [3\xi(1 - \beta_{(\Theta)} \cdot \Theta) + bk\Theta(2 - \beta_{(\Theta)} \cdot \Theta) + ck^2 \Theta^2(3 - \beta_{(\Theta)} \cdot \Theta)]$$

Elle atteint, de la sorte, le dixième environ de la dérivée

$$dc_\Theta^{11}/d\Theta = -\beta(\Theta) \varphi^{11} c_0^{11} e^{-\varphi^{11}\delta(\Theta)}. \quad (77)$$

Ainsi, quand la température s'élève, dès le zéro absolu, le coefficient d'élasticité isotherme apparent c_Θ^{11} diminue d'abord lentement (jusqu'à $\Theta = \Theta_M$ (fig. 6)) (branche AB, fig. 9), puis sa décroissance devient à peu près linéaire (branche BC, fig. 9), enfin au voisinage du point de fusion elle est moindre que celle du coefficient c_0^{11} (77) (branche CD, fig. 9); car aux températures élevées la tension thermique, T_Θ , n'est plus négligeable par rapport aux coefficients d'élasticité isotherme c_Θ^{11} .

Pour les mêmes raisons, nous avons, à la température Θ , de même approximativement

$$\begin{aligned} c_\Theta^{12} &= c_0^{12} e^{-\varphi^{12} \delta(\Theta)} + T_\Theta \\ \Gamma_\Theta &= \Gamma_0 e^{-\varphi \delta(\Theta)} + T_\Theta \quad (1) \\ c_\Theta^{44} &= c_0^{44} e^{-\varphi^{44} \delta(\Theta)} \end{aligned} \quad (78)$$

où c_0^{12} , c_0^{44} et Γ_0 sont, au zéro absolu, respectivement les grandeurs des coefficients d'élasticité, c_Θ^{12} , c_Θ^{44} et du coefficient de compressibilité Γ_Θ isotherme.

Les coefficients φ^{11} , φ^{12} , φ^{44} et φ , diffèrent entre eux car, lorsque la température s'élève, les modules des dérivées secondes C_α^β (1-2) ne diminuent pas uniformément. Remarquons que le coefficient d'élasticité apparent c_Θ^{44} est indépendant de la tension thermique (78). En conséquence, si la même élévation de la température réduisait dans la même proportion les modules de toutes les dérivées secondes, à température croissante, la diminution du coefficient d'élasticité apparent c_Θ^{44} serait plus rapide que celle des coefficients c_Θ^{11} et c_Θ^{12} , et partant que celle du coefficient de compressibilité Γ_Θ (74).

Les expériences qui ont pour objet la variation

(1) Développant le raisonnement dont j'ai rappelé les grands traits, Grüneisen définit la variation du module de compressibilité avec la température [10]. J'obtiens un résultat tout différent de celui que trouve Grüneisen.

des coefficients d'élasticité avec la température [21], [22] donnent des résultats qui paraissent confirmer les conclusions précédentes. En particulier, les recherches faites par W. C. Overton et J. Gaffney sur l'élasticité des cristaux de cuivre [22] révèlent

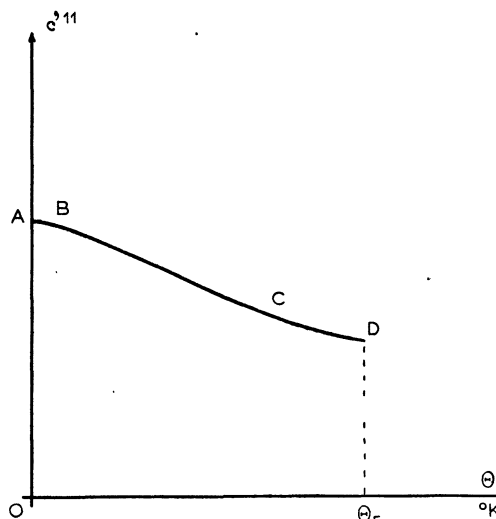


FIG. 9.

que les dérivées $dc_\Theta^{11}/d\Theta$, $dc_\Theta^{12}/d\Theta$, $dc_\Theta^{44}/d\Theta$, s'annulent bien au zéro absolu de la température.

Mais les conclusions précédentes supposent que la tension thermique est isotrope et partant que la dilatation thermique est de même. Elles concernent donc seulement l'élasticité des cristaux cubiques. Un cristal triclinique est le siège de six tensions thermiques $T_\Theta^{\alpha\gamma}$ distinctes et, quand la température s'élève, la diminution que subissent ses coefficients d'élasticité est fonction de toutes les composantes $\eta_{\beta\delta}$ de la dilatation thermique ($\beta, \delta = 1, 2, 3$). Cependant, il est à présumer que cette diminution est déterminée principalement par l'augmentation relative de volume, $\sum_\beta \eta_{\beta\beta}$, produite par la dilatation.

C. Variation de la compressibilité isotherme avec la pression.

Cas des cristaux cubiques formés par les métaux.

A température constante et tant que la pression exercée sur le milieu cristallin développe des forces de rappel sensiblement conformes à la loi de Hooke, la tension thermique T_Θ (71) — nous l'avons vu — reste sensiblement en raison inverse du volume spécifique V (58) (ou du volume de la maille élémentaire v). Admettons que cette propriété subsiste encore sous les fortes pressions, lorsque la limite de l'élasticité est dépassée. D'après l'égalité (71 bis) nous avons :

$$(\partial \text{Log. } T_\Theta / \partial \text{Log. } v)_\Theta = -1 \quad (79)$$

et le rapport T_{Θ}/Γ restant toujours petit par rapport à l'unité, l'expression (74) donne :

$$\left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma'}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} = \left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} - \left[\left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} + 1 \right] \left(\frac{T_{\Theta}}{\Gamma} - \frac{T_{\Theta}^2}{\Gamma^2} + \frac{T_{\Theta}^3}{\Gamma^3} - \dots \right) \quad (80)$$

La dérivée (négative)

$$\left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta}$$

est moindre, en grandeur absolue, que la dérivée

$$d \text{Log. } \Gamma / d \text{Log. } v$$

prise par rapport à la dilatation thermique du cristal libre de toute contrainte extérieure :

$$\frac{d \text{Log. } \Gamma}{d \text{Log. } v} - \left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} = \frac{1}{\beta(\Theta)\Gamma} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Theta}\right)_v \quad (81)$$

Et cette différence (négative),

$$\frac{1}{\beta(\Theta)\Gamma} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Theta}\right)_v,$$

croît, en grandeur absolue, quand la température s'élève.

Posons :

$$d \text{Log. } \Gamma / d \text{Log. } v = -\varphi ; \quad \left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} = -\varphi' \\ \left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma'}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} = -\zeta. \quad (82)$$

Compte tenu de (81), nous avons :

$$\varphi' < \varphi$$

et compte tenu de (80) :

$$\zeta = \varphi' - (\varphi' - 1) \left(\frac{T_{\Theta}}{\Gamma} - \frac{T_{\Theta}^2}{\Gamma^2} + \dots \right).$$

Donc la différence $\varphi - \zeta$ croît avec la température.

Supposons la dérivée

$$\left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma'}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta} = -\zeta$$

invariable et la température constante. Si p est la pression exercée sur le cristal,

$$d\Gamma'/dp = \zeta$$

D'où nous déduisons :

$$1) \Gamma' = \Gamma'_0 + \zeta p \quad (83)$$

$$2) dV/V = -dp/(\Gamma'_0 + \zeta p), \quad (84)$$

Γ'_0 étant la grandeur vers laquelle tend le coefficient de compressibilité isotherme apparent Γ' (74) lorsque la pression tombe à zéro.

Soient : V_0 le volume spécifique (58) sous une pression nulle, et δ la contraction, en grandeur absolue ($\delta = -\sum_{\alpha} t_{\alpha\alpha}$; $t_{\alpha\alpha} < 0$) :

$$V = V_0(1 - \delta), \quad (85)$$

L'équation (84) admet la solution

$$(V/V_0)\zeta = \frac{1}{1 + \frac{\zeta p}{\Gamma'_0}} \quad (86)$$

c'est-à-dire :

$$1 - \delta = \left(1 + \frac{\zeta p}{\Gamma'_0}\right)^{-\frac{1}{\zeta}} \quad (86 \text{ bis})$$

Et, en développant $\left(1 + \frac{\zeta p}{\Gamma'_0}\right)^{-\frac{1}{\zeta}}$ suivant les puissances entières et positives de p/Γ'_0 , on exprime la contraction δ (85) par une série qui converge lentement, même si le rapport p/Γ'_0 est minime (et diverge dès que le produit $\zeta \frac{p}{\Gamma'_0}$ s'élève au-dessus de l'unité), (1) (2)

$$\delta = \frac{p}{\Gamma'_0} - \frac{1 + \zeta}{2!} \left(\frac{p}{\Gamma'_0}\right)^2 + \frac{(1 + \zeta)(1 + 2\zeta)}{3!} \left(\frac{p}{\Gamma'_0}\right)^3 - \dots \\ \dots - (-1)^n \frac{(1 + \zeta)(1 + 2\zeta) \dots (1 + (n-1)\zeta)}{n!} \left(\frac{p}{\Gamma'_0}\right)^n - \dots \quad (87)$$

Si, comparé à l'unité, le rapport p/Γ'_0 est très petit, on a sensiblement :

$$\delta = \frac{p}{\Gamma'_0} - \frac{1 + \zeta}{2!} \left(\frac{p}{\Gamma'_0}\right)^2. \quad (88)$$

Selon Bridgman, la contraction δ (85) mesurée peut être exprimée :

$$\delta = Ap - Bp^2 \quad (89)$$

A et B étant deux constantes ; d'où l'on déduit, par comparaison avec l'égalité précédente (88), la relation découverte par Slater à la suite d'un raisonnement tout différent [23]

$$\zeta = \frac{2B}{A^2} - 1. \quad (90)$$

(1) Le module ζ de la dérivée $\left(\frac{\partial \text{Log. } \Gamma'}{\partial \text{Log. } v}\right)_{\Theta}$ est toujours positif. Il s'élève à quelques unités pour les cristaux cubiques formés par les métaux (à 6 environ pour les cristaux de cuivre).

(2) La solution (86) de l'équation (84) peut encore être formulée

$$p = \frac{\Gamma'_0}{\zeta} [(1 - \delta)^{-\zeta} - 1].$$

Et, en développant $(1 - \delta)^{-\zeta}$ suivant les puissances positives et entières de δ on définit la pression p par une série, qui est toujours convergente, et dont la convergence est plus rapide (à grandeur égale de $\frac{p}{\Gamma'_0}$, et de δ) que celle de la série (87)

$$p = \Gamma'_0 \left[\delta + \frac{\zeta + 1}{2!} \delta^2 + \frac{(\zeta + 1)(\zeta + 2)}{3!} \delta^3 + \dots + \frac{(\zeta + 1)(\zeta + 2) \dots (\zeta + n - 1)}{n!} \delta^n + \dots \right].$$

Mais la dérivée $\left(\frac{\partial \text{Log.}\Gamma}{\partial \text{Log.}v}\right)_\Theta$ ne reste pas exactement constante. Elle varie avec l'état du milieu cristallin, c'est-à-dire avec l'état auquel elle se rapporte ; donc elle varie avec la température et le volume spécifique du milieu cristallin ⁽¹⁾. Si elle n'augmente ou ne diminue, en grandeur absolue, que dans une proportion minime — de l'ordre du centième — sur toute l'étendue de la dilatation thermique, du zéro absolu de la température au point de fusion (69), elle varie sans doute notablement sous les fortes contractions que Bridgman fait subir aux cristaux métalliques. D'autre part, le rapport T_{Θ}/Γ diminue quand la contraction δ (85) augmente, car d'après les relations (79) et (82), nous avons :

$$\frac{T_{\Theta}}{\Gamma} \simeq \frac{T_{0\Theta}}{\Gamma_0} e^{-(\varphi'-1)}; \quad \varphi' > 1$$

$T_{0\Theta}$ et Γ_0 étant respectivement la tension thermique et le coefficient de compressibilité sous une pression nulle. En conséquence, la dérivée (80)

$$(\partial \text{Log.}\Gamma'/\partial \text{Log.}v)_\Theta = -\zeta$$

ne reste pas invariable. De ce fait, les relations (83) et (86-87) ne sont qu'approximatives, et l'erreur qu'elles comportent croît probablement avec la contraction δ (85). Donc, quand la pression devient très forte (expériences de Bridgman), la contraction δ ne peut être exprimée correctement par une série telle que (88-89) réduite à 2 termes.

Une formule établie par Einstein [24] implique l'égalité

$$\zeta/2 = - (d \text{Log.}\omega/d \text{Log.}v) + (1/6) \quad (91)$$

et si l'on admet la relation (90), il vient :

$$B/A^2 = - (d \text{Log.}\omega/d \text{Log.}v) + (2/3). \quad (92)$$

D'autre part, selon Grüneisen (62)

$$-\frac{d \text{Log.}\omega}{d \text{Log.}v} = \frac{\beta}{c_v} \frac{V}{\alpha} = \gamma, \quad (93)$$

de sorte que l'on aurait, compte tenu de (91) :

$$\zeta/2 = \gamma + (1/6), \quad (94)$$

et compte tenu de (92) :

$$(B/A^2) = \gamma + (2/3) \quad (95)$$

(1) C'est que les dérivées (65)

$$(\partial C_{\alpha\beta}/\partial \Theta)_v$$

ne sont pas rigoureusement constantes. Elles varient avec la température et le volume spécifique du milieu cristallin. Mais leur variation totale entre le zéro absolu de la température et le point de fusion, quand le cristal se dilate libre de toute contrainte, reste très faible. De même, les dérivées

$$(\partial C_{\alpha\beta}/\partial \Theta)_v \quad (63)$$

sont fonctions de la température et du volume spécifique.

Mais l'égalité (91) serait seulement satisfaite s'il n'existait pas des tensions thermiques, et si les modules de toutes les dérivées secondes $C_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ (1-2) croissaient uniformément quand la contraction δ (85) augmente ; et leur croissance est loin d'être uniforme (67) ⁽²⁾. D'autre part la constante γ (93) de Grüneisen est égale au rapport ξ/μ (57), non au module de la dérivée moyenne

$$d \text{Log.}\omega/d \text{Log.}v \quad (62) \quad (3).$$

Partant, la relation (94) ne peut être satisfaite (sinon l'accord serait fortuit), et encore moins la relation (95), surtout si les coefficients A et B (89-92) se rapportent à des contractions amples produites par de fortes pressions.

Note sur les tensions thermiques et les énergies potentielles triatomiques

Dans le mémoire intitulé « Les tensions thermiques dans le milieu cristallin » [2], je rapporte chaque énergie potentielle « triatomique » ω_{jkl}^{mpq} aux translations $m + j - p - k$, $p + k - q - l$, $q + l - m - j$; et u_j^m , u_k^p , u_l^q étant les déplacements accomplis par les trois atomes en positions $m + j$, $p + k$ et $q + l$, je développe en série l'énergie ω_{jkl}^{mpq} suivant les puissances entières et positives des neuf déplacements relatifs

$$u_{jkl}^{m\alpha} = u_j^{m\alpha} - u_k^{\alpha} - u_l^{\alpha}, \quad u_{kl}^{p\alpha} = u_k^{p\alpha} - u_l^{\alpha}, \quad u_l^{qm\alpha} = u_l^{q\alpha} - u_j^{m\alpha}$$

$$\alpha = 1, 2, 3.$$

La série ainsi obtenue n'est pas déterminée entièrement. Car les trois translations $m + j - p - k$, $p + k - q - l$, $q + l - m - j$, ont une résultante nulle, donc deux d'entre elles seulement sont indépendantes.

D'autre part, si l'on rapporte chaque énergie triatomique ω_{jkl}^{mpq} à deux translations indépendantes, par exemple aux deux translations $m + j - p - k$, $m + j - q - l$, les forces de rappel f_j^{m-pq} , f_k^{p-qm} , f_l^{q-mj} , qui dérivent de cette énergie, se trouvent définies par des expressions dissymétriques, ne se déduisant pas les unes des autres par la permutation circulaire des trois translations $m + j$, $p + k$, $q + l$.

Je donne dans cette note de nouvelles expressions des coefficients $D_{\alpha\beta\gamma}^{m-p}$ et $D_{\alpha\beta\gamma}^{m-p, m-q}$. Ces expressions restent symétriques par rapport aux trois trans-

(2) Einstein suppose que toutes les oscillations thermiques ont la même fréquence, déterminée par les coefficients d'élasticité (en particulier par le coefficient de compressibilité) et par la masse spécifique du milieu cristallin.

En outre, la relation (91) implique $\frac{1}{\beta(\theta)\Gamma} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}\right)_v = 0$.

(3) Pour les cristaux de cuivre, le module de la dérivée $d \text{Log.}\omega/d \text{Log.}v$ s'élève aux environs de 2,8, et selon Grüneisen $\gamma = 1,96$ [11].

lations $m + j, p + k, q + l$, et sont néanmoins entièrement déterminées.

Afin de simplifier les formules, posons :

$$m + j = a, \quad p + k = b, \quad q + l = c.$$

Et soient $u^a u^b u^c$ les déplacements absolus des atomes a, b et c (en positions a, b et c) et $u^{ab} = u^a - u^b$; $u^{bc} = u^b - u^c$; $u^{ca} = u^c - u^a$ leurs déplacements relatifs.

Toute énergie potentielle triatomique ω^{abc} est la somme de trois termes :

$$\omega^{abc} = \omega^{a-bc} + \omega^{b-ca} + \omega^{c-ab}$$

ω^{a-bc} est l'énergie potentielle de l'atome a , dans le champ de forces commun aux deux atomes b et c , ω^{b-ca} l'énergie potentielle de l'atome b , dans le champ commun aux atomes c et a , ω^{c-ab} l'énergie potentielle de l'atome c , dans le champ commun aux atomes a et b .

Rapportons l'énergie potentielle ω^{a-bc} aux deux translations indépendantes $a - b, c - a$. Dans la série de Taylor qui exprime cette énergie, les termes du troisième degré par rapport aux déplacements relatifs $u^{ab\alpha}, u^{ca\alpha}$, ont pour somme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3, a-bc} = & -\frac{1}{3!} \sum_{\alpha\beta\gamma} [\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ab\gamma} \\ & + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ab\gamma} \\ & + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ca\gamma} \\ & + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ab\gamma} \\ & + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ca\gamma} \\ & + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ab\gamma}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ab\gamma} &= -\frac{\partial^3 \omega^{a-bc}}{\partial(a^\alpha - b^\alpha) \partial(a^\beta - b^\beta) \partial(a^\gamma - b^\gamma)} \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ca\gamma} &= -\frac{\partial^3 \omega^{a-bc}}{\partial(c^\alpha - a^\alpha) \partial(c^\beta - a^\beta) \partial(c^\gamma - a^\gamma)} \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma} &= -\frac{\partial^3 \omega^{a-bc}}{\partial(a^\alpha - b^\alpha) \partial(a^\beta - b^\beta) \partial(c^\gamma - a^\gamma)} \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-b} u^{ca\alpha} u^{ab\beta} u^{ab\gamma} &= -\frac{\partial^3 \omega^{a-bc}}{\partial(c^\alpha - a^\alpha) \partial(a^\beta - b^\beta) \partial(a^\gamma - b^\gamma)} \end{aligned}$$

Rapportons, de même, l'énergie ω^{b-ca} aux deux translations $b - c, a - b$, donc aux déplacements relatifs $u^{bc\alpha}, u^{ab\alpha}$, l'énergie ω^{c-ab} aux deux translations $c - a$ et $b - c$, donc aux déplacements relatifs $u^{ca\alpha}, u^{bc\alpha}$. Et soient $\mathcal{S}_{3, b-ca}, \mathcal{S}_{3, c-ab}$, les sommes des termes du troisième degré dans les séries de Taylor qui expriment respectivement les énergies ω^{b-ca} et ω^{c-ab} . Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c} &= \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a-bc} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-ca} \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, a} &= \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, b-ca} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, c-ab} \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, b} &= \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, c-ab} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, a-bc} \end{aligned} \quad (I)$$

Ainsi, l'énergie triatomique ω^{abc} est définie par une série de Taylor, où les termes du troisième degré par rapport aux déplacements relatifs, $u^{ab\alpha}, u^{bc\alpha}, u^{ca\alpha}$, forment une somme (de 21×27 termes) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3, abc} &= \mathcal{S}_{3, a-bc} + \mathcal{S}_{3, b-ca} + \mathcal{S}_{3, c-ab} \\ &= -\frac{1}{3!} \sum_{\alpha\beta\gamma} [(\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c} u^{ab\alpha} u^{bc\beta} u^{ab\gamma} \\ &+ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-c} u^{ab\alpha} u^{bc\beta} u^{bc\gamma} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma} \\ &+ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-c} u^{ab\alpha} u^{bc\beta} u^{ab\gamma} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ab\gamma} \\ &+ \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-c} u^{ab\alpha} u^{bc\beta} u^{bc\gamma} + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c-a} u^{ab\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma}) \\ &+ (\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, a} u^{bc\alpha} u^{bc\beta} u^{bc\gamma} \\ &\dots \\ &\dots + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, a-b} u^{bc\alpha} u^{ab\beta} u^{ab\gamma}) \\ &+ (\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, b} u^{ca\alpha} u^{ca\beta} u^{ca\gamma} \\ &\dots \\ &\dots + \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, b-c} u^{ca\alpha} u^{bc\beta} u^{bc\gamma})]. \end{aligned}$$

Hormis les trois dérivées $-\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, c}, -\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{b-c, a}, -\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{c-a, b}$ (I) qui portent individuellement sur deux des trois énergies partielles $\omega^{a-bc}, \omega^{b-ca}, \omega^{c-ab}$, toute autre dérivée qui figure dans la somme $\mathcal{S}_{3, abc}$, est définie par un symbole comportant deux indices qui rappellent les deux translations prises pour variables indépendantes, et partant, selon la convention adoptée, qui indique l'énergie partielle dont elle provient. Par exemple, $-\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-c}$ se rapportent aux deux translations $a - b$ et $b - c$, c'est donc une dérivée de l'énergie partielle ω^{b-ca} :

$$-\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma}^{a-b, b-c} = \frac{\partial^3 \omega^{b-ca}}{\partial(a^\alpha - b^\alpha) \partial(a^\beta - b^\beta) \partial(b^\gamma - c^\gamma)}$$

Exprimons maintenant la somme $\mathcal{S}_{3, abc}$, en fonction des neuf déplacements absolus u^a, u^b, u^c . Soit $\mathcal{S}'_{3, abc}$, l'expression obtenue. Puis développons directement l'énergie ω^{abc} en série suivant les puissances entières et positives des mêmes déplacements absolus. Cette opération donne une nouvelle expression $\mathcal{S}''_{3, abc}$, de la somme que forment les termes du troisième degré, par rapport aux déplacements u^a, u^b, u^c . Et, dans les deux sommes égales, $\mathcal{S}'_{3, abc}$, et $\mathcal{S}''_{3, abc}$, les coefficients d'un même produit $u^a u^b u^c$ sont égaux. D'où en égalant les coefficients de la somme $\mathcal{S}'_{3, abc}$, aux coefficients correspondants de la somme $\mathcal{S}''_{3, abc}$, on obtient, en reprenant les translations $m + j, p + k, q + l$ (respectivement égales à a, b et c) au lieu des formules (10), les coefficients $D_{3\alpha\beta\gamma}^{m-p, m-q}$ et $D_{3\alpha\beta\gamma}^{m-p, m-q}$ rapportés aux énergies partielles $\omega^{a-bc}, \omega^{b-ca}, \omega^{c-ab}$,

donc à des dérivées portant toutes sur deux déplacements relatifs qui sont indépendants

$$D_{3\alpha}^{m-p} = \sum_{\beta\gamma} \left(\mathcal{D}_{\alpha}^{m-p, q} \mathcal{D}_{\beta}^{m-p, p-q} - \mathcal{D}_{\alpha}^{m-p, p-q} \mathcal{D}_{\beta}^{m-p, q} \right) + \mathcal{D}_{\alpha}^{m-p, p-q} \mathcal{D}_{\beta}^{q-m, m-p} - \mathcal{D}_{\alpha}^{q-m, m-p} \mathcal{D}_{\beta}^{m-p, p-q}$$

$$D_{\alpha}^{m-p, m-q} = \left(\mathcal{D}_{\alpha}^{m-p, p-q} \mathcal{D}_{\beta}^{m-p, q-m} - \mathcal{D}_{\alpha}^{m-p, q-m} \mathcal{D}_{\beta}^{m-p, p-q} \right) + \mathcal{D}_{\alpha}^{q-m, m-p} \mathcal{D}_{\beta}^{q-m, p-q} - \mathcal{D}_{\alpha}^{q-m, p-q} \mathcal{D}_{\beta}^{q-m, m-p}$$

ERRATUM

I. Les facteurs de la dilatation. *J. Physique Rad.*, Juillet 1961, 22, 451. — A la page 457, dans la formule 29, au lieu de W_m^2 lire W_m^3 .

Manuscrit reçu le 11 avril 1961.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] WIGNER et SEITZ (F.), *Phys. Rev.*, 1933, **43**, 804 ; 1934, **46**, 509.
- [13] SEITZ (F.), *Phys. Rev.*, 1935, **47**, 400.
- [14] FUCHS (K.), *Proc. Roy. Soc.*, 1935, **151**, 585.
- [15] RAIMES (S.), *Reports on Progress in Physics*, 1957, **20**, 1.
- [16] KLÉMENS (P. G.), *Phys. Rev.*, 1960, **120**, 843.
- [17] VOIGT (W.), *Lehrbuch der Krystallophysik*, Leipzig, Teubner, 1910.
- [18] BORN (M.), *Atomtheorie des Festenzustandes*, Leipzig Teubner, 1923.
- [19] MASON et WARREN (P.), Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics. D. Van Nostrand Company, New York, 1948.
- [20] LOVE (A. E.), *Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [21] ZENER (C.), *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Chicago, Illinois, U. S. A., 1952.
- [22] OVERTON (W. C., Jr.) et GAFFNEY (John), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 969.
- [23] SLATER (J. C.), *Introduction to Chemical Physics*, New York and London, 1939 ; *Phys. Rev.*, 1940, **57**, 744.
- [24] EINSTEIN (A.), *Ann. Physik*, 1911, **34**, 170.