



HAL
open science

Propriétés des systèmes fondus en théorie fonctionnelle

Jean-Louis Destouches

► **To cite this version:**

Jean-Louis Destouches. Propriétés des systèmes fondus en théorie fonctionnelle. Journal de Physique et le Radium, 1961, 22 (2), pp.76-82. <10.1051/jphysrad:0196100220207600>. <jpa-00236420>

HAL Id: jpa-00236420

<https://hal.science/jpa-00236420v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES FONDUS EN THÉORIE FONCTIONNELLE

Par JEAN-LOUIS DESTOUCHES,
Institut Henri-Poincaré.

Résumé. — Diverses transformations des équations fondamentales d'une partie fondue d'un système physique en théorie fonctionnelle. Objectivité des valeurs des coefficients m_j des corpuscules intervenant lors de la fusion. Propriétés des ondes distinguables dans une partie fondue. Ondes à phase linéaire. Conditions nécessaires et suffisantes pour que deux particules soient fondues ou non. Ondes d'états complètement fondus, particule fondue. Forme des termes non linéaires d'une partie fondue. Propriétés de l'onde moyenne d'une assemblée de systèmes fondus. Onde prévisionnelle ; démonstration des équations linéaires mises par M. L. de Broglie à la base de la théorie de la fusion. Propriétés de l'onde moyenne définie par une mesure ; obtention des équations de la théorie linéaire de la fusion de M. Louis de Broglie.

Abstract. — Several transformations of the fundamental equations for a melded part of a physical system in the functional theory of particles. Objectivity of the values of the m_j coefficients of the particles in the fusion process. Properties of the distinguishable waves in a melded part of a system. Linear phase waves. Necessary and sufficient conditions for two particles to be melded or not. Properties of the mean wave for a set of melded systems. Provisional wave ; deduction of the linear equations admitted in the linear de Broglie theory of fusion. Properties of the mean wave determined by measurement ; deduction of the linear de Broglie equations.

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES FONDUS

1. **Introduction.** — Nous nous proposons d'étudier en théorie fonctionnelle quelques propriétés des systèmes contenant des parties fondues. Dans un article précédent [1] nous avons établi les équations de l'onde u_P d'une partie fondue P d'un système S : il y a une équation d'évolution (1) et n_P équations de condition (2) si la partie P contient n_P corpuscules :

$$i\hbar \frac{\partial u_P}{\partial t} = u_P S^{(P)} \tag{1}$$

$${}^F N_j - \mathcal{K}_j^{(P)} - \frac{m_j}{M} S^{(P)} = 0, \quad (C_j \in P) \tag{2}$$

où \mathcal{K}_j est une expression analytique de u_P formée à partir de l'opérateur hamiltonien \mathfrak{H}_j du j^e corpuscule et ${}^F N_j$ une expression analytique de u_P formée à partir du terme non linéaire de l'équation du j^e corpuscule de la partie P avant la fusion, enfin $S^{(P)}$ est la somme des ${}^F N_k - \mathcal{K}_k$ pour les n_P corpuscules C_k de la partie P . Les équations (2) sont liées par une identité qu'on obtient en ajoutant terme à terme les équations (2) compte tenu de la définition de $S^{(P)}$.

2. **Transformation des équations.** — Multiplions l'équation (1) par la constante $\frac{m_j}{M}$ (les coefficients m_j sont sans rapport avec les masses d'inertie $m_{0,j}$ et on a $M =_d \sum m_j$ pour $j \in P$) et l'équation (2) par u_P ,

ajoutons membre à membre ; nous obtenons n_P équations de la forme :

$$i\hbar \frac{m_j}{M} \frac{\partial u_P}{\partial t} = u_P ({}^F N_j - \mathcal{K}_j^{(P)}), \quad (C_j \in P). \tag{3}$$

Réciproquement, si l'on ajoute toutes les équations (3) membre à membre, on obtient (1') qui est identique à (1) compte tenu de la définition de $S^{(P)}$. Multiplions (1') par $\frac{m_j}{M}$ et soustrayons de (3), on obtient les équations (2), d'où :

THÉORÈME. — Les $n_P + 1$ équations (1) et (2) d'une partie fondue P sont équivalentes aux n_P équations (3).

Multiplions maintenant les équations (3) par $u_P^{\frac{m_j}{M}-1}$; le premier membre devient ainsi la dérivée de $u_P^{\frac{m_j}{M}}$; en remplaçant au second membre l'expression $\mathcal{K}_j^{(P)}$ par son expression définissante

$$\mathcal{K}_j^{(P)} =_d u_P^{-\frac{m_j}{M}} \cdot \mathfrak{H}_j \odot u_P^{\frac{m_j}{M}} \tag{4}$$

nous obtenons le système de n_P équations

$$i\hbar \frac{\partial u_P^{\frac{m_j}{M}}}{\partial t} = ({}^F N_j - \mathfrak{H}_j \odot) \cdot u_P^{\frac{m_j}{M}}, \quad (C_j \in P). \tag{5}$$

En divisant par $u_P^{\frac{m_j}{M}-1}$ les deux membres des

équations (5) et introduisant la définition (4), nous obtenons les équations (3), d'où :

THÉORÈME. — Une équation (3) est équivalente à l'équation (5) de même indice j .

Des deux théorèmes précédents résulte ce corollaire :

COROLLAIRE. — Les trois systèmes d'équations (1) et (2), (3), (5) sont équivalents.

3. L'onde $u_{I,P}$. — Les coefficients m_j ont été jusqu'à maintenant laissés arbitraires. Pour aller plus loin, il faut fixer leur valeur. On pourrait en particulier poser $m_j = m_{0,j}$ et ainsi égaliser les coefficients m_j aux masses au repos, mais c'est un autre choix qu'il faut faire. Convenons de choisir tous les coefficients m_j égaux, soit $m_j = m_1$, alors $M = n_P \cdot m_1$ et $\frac{m_j}{M} = \frac{1}{n_P}$. Dans ces conditions, posons

$$u_{I,P} = \frac{1}{n_P} u_P \quad (6)$$

alors en prenant la fonction $u_{I,P}$ au lieu de u_P , pour représenter le mouvement d'une partie fondue P , à partir de (5), nous obtenons pour $u_{I,P}$ le système de n_P équations :

$$i\hbar \frac{\partial u_{I,P}}{\partial t} = (\sum_j \mathcal{N}_j - \sum_j \mathcal{E}_j) u_{I,P} \quad (C_j \in P). \quad (7)$$

On voit que l'on passe de (5) à (7) par la définition (6), par suite les systèmes (5) et (7) sont équivalents, alors du corollaire précédent résulte ce théorème :

THÉORÈME. — Si les coefficients m_j sont choisis tous égaux, soit $m_j = m_1$, le système d'équations (7) pour la partie fondue P est équivalent aux systèmes d'équations (1) et (2), (3), (5).

4. Propriétés des coefficients m_j . — Au début nous avons choisi des coefficients m_j arbitrairement. Puis nous avons constaté que si on les posait tous égaux entre eux, on obtenait des équations de la forme (7). On peut se demander si leur valeur est objectivement fixée ou s'ils demeurent arbitraires. Un mouvement du système est fixé par un ensemble de fonctions u_j solutions des équations du système. A partir des u_j , on calcule d'une manière univoque l'onde barycentrique u_P d'une partie P par

$$u_P = \prod_{j \in P} u_j.$$

Les ondes relatives pour la partie P sont définies par

$$u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots} = u_{j,\beta} \cdot u_{P,\alpha,\beta,\gamma,\dots}^{-x}$$

où $x = \frac{m_j}{M}$. La partie P sera dans un état fondu si pour $j \in P$, on a $u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots} = \text{Cte}$. Les coefficients m_j seront arbitraires si x peut être arbitraire ($x < 1$), la partie P demeurant dans un état fondu. Soit y une autre valeur du coefficient, $y \neq x$, alors si les ondes $u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ sont des constantes pour la valeur x , elles ne peuvent pas l'être pour une valeur y . En effet, on aura

$$u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots}^{(y)} = u_{j,\beta} \cdot u_{P,\alpha,\beta,\gamma,\dots}^{-y} = u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots} \cdot u_{P,\alpha,\beta,\gamma,\dots}^{x-y}$$

si $u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ est une constante, comme $u_{P,\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ est une fonction univoquement déterminée et non constante, $u_{r,j,\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ ne peut pas être une constante si $y \neq x$, d'où :

THÉORÈME. — Si une partie P d'un système S peut être fondue avec un choix m_j des coefficients, elle ne peut pas être fondue si l'on adopte un autre choix des coefficients (sauf un changement d'unité ou, ce qui revient au même, sauf si $m'_j = \lambda m_j$ où λ est le même coefficient pour tous les C_j de la partie P). Or pour une partie, le fait d'être fondue est une propriété objective qui se voit sur les propriétés des fonctions d'ondes physiques ; les coefficients m_j doivent alors être choisis de façon à rendre compte de cette propriété, d'où ce corollaire :

COROLLAIRE. — Si une partie P d'un système S admet un état fondu, les coefficients m_j intervenant dans la définition des ondes relatives sont objectivement déterminés (à un changement d'unité près).

5. Ondes distinguables dans une partie fondue.

— Soit une partie fondue P formée de n corpuscules C_1, \dots, C_n . Avant la fusion, on a des ondes u_{j,α_j} , d'où une onde barycentrique et des ondes relatives :

$$u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \prod_{j \in P} u_{j,\alpha_j}, \quad u_{r,j,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = u_{j,\alpha_j} \cdot u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{-m_j/M} \quad (8)$$

et le produit de toutes les ondes relatives est égal à l'unité.

Après fusion, on a, par définition de la fusion, des ondes relatives constantes, d'où l'expression des ondes u_j :

$$u_{r,j,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = C_{j,\alpha_1,\dots,\alpha_n}, \quad u_{j,\alpha_j} = C_{j,\alpha_1,\dots,\alpha_n} \cdot u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m_j/M} \quad (9)$$

De ces relations, on tire u_P en fonction d'une onde u_j quelconque :

$$u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = C_{j,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{-M/m_j} \cdot u_{j,\alpha_j}^{M/m_j}$$

En égalant des seconds membres de la relation précédente pour diverses valeurs de j et α_j , on

obtient par exemple en choisissant les valeurs 1 et 1 pour les indices :

$$u_{j,\alpha_j} = C_{j,1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} \cdot C_{1,1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}^{-m_j/m_1} \cdot C_{1,1}^{m_j/m_1} \cdot u_{1,1} \quad (10)$$

ainsi toutes les composantes α_j de toutes les fonctions u_j (pour $j \neq 1$) s'expriment au moyen de la seule fonction numérique $u_{1,1}$ et de constantes, Mais la formule précédente demeure valable si on remplace le deuxième indice 1 par α_1 , d'où deux expressions pour u_{j,α_j} qu'on peut égaler ; on en tire

$$u_{1,\alpha_1} = C_{j,1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}^{m_1/m_j} \cdot C_{j,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}^{-m_1/m_j} \cdot C_{1,1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}^{-1} \cdot C_{1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} \cdot u_{1,1} \quad (11')$$

ainsi toutes les fonctions u_{j,α_j} s'expriment au moyen d'une seule fonction numérique. Posons pour avoir des expressions symétriques

$$u = a_{1,1}^{-1} \cdot u_{1,1}$$

où $a_{1,1}$ est une constante arbitraire, alors $u_{1,1} = a_{1,1} \cdot u$ et en portant cette expression de $u_{1,1}$ dans (10) et (11), nous obtiendrons les expressions des composantes u_{1,α_1} et de toutes les composantes des autres fonctions u_{j,α_j} , mais chacune de ces fonctions ne doit dépendre que d'un seul indice α_j , par suite le produit de toutes les constantes dans (10) et (11) compte tenu de l'expression de $u_{1,1}$ doit donner une constante ne dépendant que d'un seul indice α ; soit a_{j,α_j} cette constante, on peut donc écrire :

$$u_{1,\alpha} = a_{1,\alpha} \cdot u, \quad u_{j,\alpha_j} = a_{j,\alpha_j} \cdot u^{m_j/m_1} \quad (12)$$

Donc toutes les composantes u_{j,α_j} des ondes u_j des corpuscules fondus dans une partie P s'expriment au moyen d'une seule fonction numérique u et de constantes a_{j,α_j} , par suite l'onde barycentrique s'exprime aussi en fonction de u et des constantes a_{j,α_j} ; en outre les ondes relatives constantes s'expriment au moyen des constantes a_{j,α_j} .

En effet, de (12) et (18), on tire

$$u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \prod_{j=1}^n a_{j,\alpha_j} \cdot u^{M/m_1} \quad (13)$$

De (12), de (8) et de cette expression de u_P , on tire

$$u_{r,j,\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n} = a_{j,\alpha_j} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_{k,\alpha_k} \right)^{-m_j/M} \quad (14)$$

qui donne bien une valeur constante pour les ondes relatives.

Les formules (12), (13), (14) se simplifient lorsque tous les coefficients m_j sont égaux entre eux : dans ce cas, on a 1 au lieu de m_j/m_1 et n au lieu de M/m_1 , enfin $-1/n$ au lieu de $-m_j/M$.

De telles ondes pour une partie fondue P où l'on peut ainsi distinguer des ondes u_j pour chaque corpuscule de cette partie P sont appelées *ondes de corpuscules distinguables dans la partie fondue P*. Ces ondes correspondent à certains états de mouvements de la partie P .

6. Ondes à phase linéaire. — Un cas particulier d'ondes distinguables dans une partie fondue P est celui où la fonction u est à phase linéaire, ou plus généralement, celui où pour un des axes de coordonnées du repère, soit x , la phase de u est linéaire en x :

$$u = e^{i(p x + \varphi(y,z,t))} f(x, y, z, t).$$

alors toutes les ondes u_j de tous les corpuscules ont cette propriété ainsi que l'onde barycentrique : on a

$$u_{j,\alpha_j} = a_{j,\alpha_j} \cdot e^{i \frac{m_j}{m_1} (p x + \varphi)} |f| \frac{m_j}{m_1};$$

$$u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \left(\prod_{j=1}^n a_{j,\alpha_j} \right) e^{i \frac{M}{m_1} p x + \varphi} |f| \frac{M}{m_1} \quad (15)$$

Réciproquement, supposons que les ondes u_j de la partie fondue P soient de la forme

$$u_{j,\alpha_j} = |f_{j,\alpha_j}| \cdot e^{i[p_j x + \varphi_j(y,z,t)]}$$

alors l'onde barycentrique est

$$u_P = \prod_j |f_{j,\alpha_j}| \cdot e^{i \sum_j (p_j x + \varphi_j)}$$

mais d'après le paragraphe précédent, toutes les fonctions u_{j,α_j} s'expriment au moyen d'une fonction numérique u et de constantes, alors on a des ondes de la forme (15) et par suite.

$$p_j = \frac{m_j}{m_1} p, \quad \sum_j p_j = \frac{M}{m_1} p.$$

En cas de phase linéaire, les formules précédentes ont lieu pour les trois coordonnées d'espace.

7. Condition nécessaire et suffisante pour que deux particules soient fondues ou non. — Considérons deux corpuscules C_1 et C_2 représentés par des ondes u_1 et u_2 . Ces deux corpuscules appartiennent-ils ou non une partie fondue ? (Naturellement l'hypothèse où l'on a deux ondes u_1 et u_2 entraîne que si C_1 et C_2 appartiennent tous deux à une partie fondue P , celle-ci est dans un état où l'on peut distinguer les corpuscules C_1 et C_2 .) Si C_1 et C_2 appartiennent à une partie fondue P , ils appartiennent à la partie fondue P_2 formée de ces deux corpuscules, en vertu du théorème sur les fusions successives [1]. Alors $u_{1\alpha}$ et $u_{2\beta}$ sont les composantes de u_1 et u_2 ; on a $u_{P_2\alpha\beta} = u_{1\alpha} \cdot u_{2\beta}$ et pour des coefficients m_1 et m_2 on a des ondes relatives $u_{r,1,\alpha,\beta}$ et $u_{r,2,\alpha,\beta}$. Si P_2 est fondue, ces ondes relatives sont alors des constantes, et d'après les résultats du § 5, les ondes $u_{1\alpha}$ et $u_{2\beta}$ s'expriment au

moyen d'une fonction numérique u par les formules (12) ; dans ce cas il existe donc un nombre ρ tel que

$$u_{1,\alpha} = a_{1,\alpha} \cdot u \quad \text{et} \quad u_{2,\beta} = a_{2,\beta} u^\rho. \quad (12_2)$$

Réciproquement, s'il existe un nombre ρ tel que les égalités précédentes aient lieu, on peut trouver m_1 et m_2 tels que $\rho = m_2/m_1$ et $M = m_1 + m_2$, l'unité de ces coefficients demeurant arbitraire ; alors de (13) et (14), il résulte que les ondes relatives sont des constantes, donc que les corpuscules C_1 , C_2 appartiennent à une partie fondue, d'où :

THÉORÈME. — *Si u_1 et u_2 sont les fonctions d'ondes physiques de deux corpuscules C_1 , C_2 , une condition nécessaire et suffisante pour que ces corpuscules appartiennent à une partie fondue P est qu'il existe un nombre constant ρ tel que entre les composantes $u_{1,\alpha}$ et $u_{2,\beta}$ on ait des relations*

$$u_{2,\beta} = k_{\alpha\beta} \cdot u_{1,\alpha}^\rho$$

où les $k_{\alpha\beta}$ sont des constantes

Par contraposition, on en déduit :

COROLLAIRE. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux corpuscules C_1 et C_2 n'appartiennent pas tous deux à une partie fondue P est qu'il n'existe aucun nombre ρ tel que entre les composantes $u_{1,\alpha}$ et $u_{2,\beta}$ des deux corpuscules on ait*

$$u_{2,\beta} \cdot u_{1,\alpha}^{-\rho} = k_{\alpha\beta}$$

où les $k_{\alpha\beta}$ sont des constantes.

Ce résultat s'étend au cas où, au lieu de corpuscules C_1 et C_2 , on considère des particules fondues P_1 et P_2 mais cette fois α et β sont remplacés par plusieurs indices.

8. Ondes d'états complètement fondus. — Pour une partie fondue P , aux ondes barycentriques u_P définies à partir d'ondes de corpuscules distinguables dans la partie fondue P , nous devons adjoindre d'autres ondes que nous appellerons *ondes d'états complètement fondus*. Elles seront définies comme les solutions u_P physiquement acceptables des équations (1) et (2) (ou d'un système équivalent (3) ou (5)).

Cette fois, on n'a plus les relations (10) ni (11), (12), (13), (14) et les diverses composantes $u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ ne sont pas proportionnelles entre elles et ne dépendent pas d'une seule fonction numérique u .

Dans le cas où l'on a des ondes $u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ dépendant d'une seule fonction numérique u et de constantes, on peut introduire des constantes a_{j,α_j} et l'on a des ondes distinguables, on revient au cas du § 4. Une partie P peut être formée de k parties P_1, P_2, \dots, P_k fondues en P et distinguables dans P ,

les éléments de ces parties P_j étant non distinguables. Lorsque tous les coefficients m_j sont égaux entre eux, on peut définir des ondes $u_{I,P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ obéissant aux équations (7) : la partie fondue P constitue dans ce cas ce que nous appellerons une *particule fondue*. Les diverses composantes de $u_{I,P}$ ne sont pas proportionnelles entre elles si l'on se trouve dans un état complètement fondu et l'onde $u_{I,P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ ne dépend pas d'une seule fonction numérique u . Dans les états complètement fondus, on ne peut plus reconnaître le mouvement des éléments de la partie P , il n'y a plus d'ondes u_{j,α_j} des corpuscules, on a bien une partie dont le mouvement se comporte (pendant l'intervalle de temps où elle reste dans un tel état) comme une particule, sans qu'on puisse en distinguer des éléments. Les éléments par contre, se reconnaissent sur les opérateurs \mathfrak{S}_j des équations (7).

Comme ondes particulières, on doit distinguer :

1° Les ondes $u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ dont la phase ne dépend que de la variable t (relativement au repère considéré) ; on les appellera *ondes d'états de repos* (relativement au repère auquel on rapporte les mouvements). Elles correspondent à une quantité de mouvement nulle.

2° Les ondes $u_{P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$ dont les phases sont des constantes, on les appellera *ondes d'état d'annihilation*. Elles correspondent à une quantité de mouvement nulle et à une énergie nulle (y compris l'énergie $m_0 c^2$). Dans un changement de repère, une partie P dans un état d'annihilation reste dans un état d'annihilation.

A un système S , on peut toujours adjoindre des parties fondues dans un état d'annihilation sans modifier l'état dynamique du système S . Une partie P d'un système n'est susceptible d'être fondue que s'il existe au moins une onde u_P appartenant à l'un des types que nous venons de distinguer.

9. Forme des termes non linéaires d'une partie fondue. — Dans la théorie de la fusion pour une partie P formée de n corpuscules, nous sommes partis d'équations non linéaires pour chaque corpuscule :

$$i\hbar \frac{\partial u_j}{\partial t} = Q_j - \mathfrak{S}_j u_j \quad (16)$$

puis nous avons introduit les expressions \mathcal{N}_j par

$$\mathcal{N}_{j,\alpha_j} = u_{j,\alpha_j}^{-1} \cdot Q_{j,\alpha_j}$$

De là, au cours de la fusion, nous sommes passés à ${}^F\mathcal{N}_{j,\alpha_j}$ qu'on obtient à partir de \mathcal{N}_{j,α_j} en remplaçant les arguments u_{j,α_j} et les u_{k,α_k} par leur expression (9) une fois la fusion effectuée. Si les coefficients m_j sont égaux entre eux, on a les équations (7) avec les ${}^F\mathcal{N}_j$ et on peut poser

$$Q_{j,\alpha_1,\dots,\alpha_q}^\odot = {}^F\mathcal{N}_{j,\alpha_j} \cdot u_{I,P,\alpha_1,\dots,\alpha_q}$$

Il faut ensuite prolonger les ${}^F\mathcal{N}_{j,\alpha_j}$ pour le cas des ondes complètement fondues ; ce prolongement peut ou non s'effectuer selon la forme du terme Q_{j,α_j} .

Dans l'équation (16), l'opérateur \mathfrak{S}_j et le terme Q_j ne sont pas ceux d'un corpuscule isolé, mais ceux du corpuscule C_j au sein du système S. On peut poser

$$\mathfrak{S}_j = \mathfrak{S}_{j,0} + \mathfrak{R}_j ; \quad Q_j = Q_{0,j} + Q_{I,j}$$

où $\mathfrak{S}_{j,0}$ et $Q_{0,j}$ sont l'opérateur hamiltonien et le terme non linéaire du corpuscule C_j isolé, c'est-à-dire soumis à des actions extérieures, mais non soumis aux interactions avec les autres corpuscules du système. De même \mathfrak{R}_j et $Q_{I,j}$ sont l'opérateur et le terme non linéaire dus à l'action des autres corpuscules du système S. En introduisant les quantités \mathcal{N} correspondant aux termes $Q_{0,j}$ et $Q_{I,j}$, l'équation (21) prendra la forme

$$i\hbar \frac{\partial u_j}{\partial t} = (\mathcal{N}_{0,j} + \mathcal{N}_{I,j} - \mathfrak{S}_{0j} - \mathfrak{R}_j) u_j$$

Après la fusion, si tous les coefficients m_j sont égaux, l'équation (7) prendra alors la forme

$$i\hbar \frac{\partial u_{I,P}}{\partial t} = ({}^F\mathcal{N}_{0,j} + {}^F\mathcal{N}_{I,j} - {}^F\mathfrak{R}_j - \mathfrak{S}_{0,j}^{\odot}) u_{I,P}$$

${}^F\mathcal{N}_{0,j} + {}^F\mathcal{N}_{I,j}$ n'est autre que ${}^F\mathcal{N}_j$ de (7), mais l'opérateur \mathfrak{R}_j qui opère sur u_j dépend, avant fusion, des fonctions u_k des autres corpuscules du système S, soit $\mathfrak{R}_j(u_1, \dots, u_k, \dots)$. Après fusion, chaque u_k a été remplacé par son expression (9) si bien que $\mathfrak{R}_j u_j$ est devenue une expression non linéaire en $u_{I,P}$, soit

$$\mathcal{R}_j(u_{I,P}) = \mathfrak{R}_j(u_{I,P}) \cdot u_{I,P}.$$

On peut alors poser

$${}^F\mathcal{Q}_{0,j} = {}^F\mathcal{N}_{0,j} u_{I,P},$$

$${}^F\mathcal{Q}_{I,j} = {}^F\mathcal{N}_{I,j} u_{I,P} - \mathcal{R}_j(u_{I,P})$$

$${}^F\mathcal{N}_j^{\odot} = {}^F\mathcal{N}_{0,j} + {}^F\mathcal{N}_{I,j} - u_{I,P}^{-1} \mathcal{R}(u_{I,P}),$$

et l'équation (7) prend finalement la forme

$$i\hbar \frac{\partial u_{I,P}}{\partial t} = ({}^F\mathcal{N}_j^{\odot} - \mathfrak{S}_{0,j}^{\odot}) u_{I,P}. \quad (17)$$

Dans ces conditions, le terme linéaire $\mathfrak{S}_{0,j}^{\odot}$ ne comprend que l'opérateur issu d'un corpuscule isolé du système S et soumis seulement aux actions extérieures, tandis que le terme dû aux actions intérieures, c'est-à-dire aux autres corpuscules du système S est venu s'ajouter au terme non linéaire d'interaction. Ce terme peut d'ailleurs être de la forme $\alpha_4^{(j)} \cdot k + \mathfrak{R}_{I,j}(u_{I,P})$ avec un premier terme qui vient se grouper avec le terme de masse, si bien que le groupement une fois effectué, les masses figurant dans les équations (7) peuvent ne pas

être celles des corpuscules initiaux ; le terme d'interaction introduit une énergie de liaison servant à maintenir la fusion de la partie fondue P ; la masse au repos de la partie fondue P doit être inférieure à la somme des masses au repos des corpuscules ayant servi à former la partie P .

10. Les équations de la fusion de M. Louis de Broglie. —

Si dans les équations (7), nous annulons le terme non linéaire ${}^F\mathcal{N}_j$ et si \mathfrak{S}_j^{\odot} est l'opérateur déduit de l'hamiltonien d'une équation de Dirac d'un corpuscule de spin 1/2, nous obtenons des équations ayant exactement la même forme que les équations que M. Louis de Broglie a mises à la base de sa théorie des particules à spin par sa méthode de fusion. Cependant ici les équations (7) portent sur l'onde physique $u_{I,P}$ déduite de l'onde barycentrique u_G de la partie fondue P, tandis que dans la théorie de la fusion de M. Louis de Broglie [2] il s'agit au contraire de l'onde prévisionnelle ψ de la mécanique ondulatoire usuelle qui n'a qu'une signification statistique. Il ne suffit donc pas d'annuler le terme non linéaire ${}^F\mathcal{N}_j^{\odot}$ pour obtenir la théorie de la fusion de M. Louis de Broglie ; par contre, on peut l'obtenir après des considérations statistiques.

11. Propriétés de l'onde moyenne d'une assemblée de systèmes fondus. —

Considérons selon la méthode de Gibbs une assemblée de N systèmes physiques S_k sans interaction entre eux et de même composition, à savoir n corpuscules de spin 1/2, et supposons que chacun de ces systèmes soit fondu ; le système S_k peut être décrit par la fonction d'onde physique $u_{IS,k}$. Considérons l'onde moyenne u_M de ces N systèmes

$$u_M = \frac{1}{N} \sum_k u_{IS,k}. \quad (18)$$

Du système d'équations (7) pour les $u_{IS,k}$, il résulte que cette onde u_M satisfait au système d'équations dérivant de la relation

$$i\hbar \frac{\partial u_M}{\partial t} = \frac{i\hbar}{N} \sum_k \frac{\partial u_{IS,k}}{\partial t}.$$

Posons

$$Q_{M,j} = {}^F\mathcal{N}_{0,j} u_{I,P}$$

Comme $\mathfrak{S}_{0,j}^{\odot}$ est linéaire, on a

$$\frac{1}{N} \sum_k \mathfrak{S}_{0,j}^{\odot} u_{IS,k} = \mathfrak{S}_{0,j}^{\odot} u_M$$

d'où finalement pour u_M le système d'équations

$$i\hbar \frac{\partial u_M}{\partial t} = Q_{M,j} - \mathfrak{S}_{0,j}^{\odot} u_M \quad (j = 1, \dots, n) \quad (19)$$

Le système (19) ne diffère de (17) que par le fait

que le terme non linéaire est ici le terme moyen. De la compatibilité (qu'on suppose réalisée) des équations (7) donnant une solution $u_{IS,k}$ pour tout k de 1 à N , il résulte que l'on a une fonction u_M bien définie.

En refaisant, pour le cas d'un système fondu, le même raisonnement que nous avons fait dans le cas d'un corpuscule simple [3] (c'est-à-dire d'un corpuscule non fondu défini par une équation d'évolution sans équations de condition) on est conduit à ce résultat : *si les quatre conditions suivantes sont remplies :*

1° *Les termes non linéaires*

$$Q_{j,k}^{\odot} = {}^F N_{j,k}^{\odot} u_{IS,k}$$

sont bornés par un nombre b :

$$|Q_{j,k}^{\odot}| < b.$$

2° *Si $D_j(u_{IS,k}, \varepsilon, t)$ est l'ensemble des points P pour lesquels $|Q_{j,k}^{\odot}| > \varepsilon$ à l'instant t et R_N le domaine dans lequel peuvent se trouver les N systèmes fondus S_k , alors*

$$\text{vol } R_N \gg \sum_{j,k} \text{Vol } D_j(u_{IS,k}, \varepsilon, t).$$

3° *Il existe des sphères $S_N(j, k, \varepsilon, t)$ de rayon r_N qui contiennent les ensembles $D_j(u_{IS,k}, \varepsilon, t)$.*

4° *Les centres des sphères S_N sont répartis au hasard dans le domaine R_N selon une densité de probabilité très voisine d'une densité uniforme.*

Alors avec une probabilité de l'ordre de

$$1 - \frac{\text{Vol } D_j(u_{IS,k}, \varepsilon, t)}{\text{Vol } R_N}$$

le terme $Q_{M,j}^{\odot}$ de l'onde moyenne u_M de l'assemblée de systèmes S a son module $|Q_{M,j}^{\odot}|$ inférieur à un nombre arbitraire ε .

A la limite, en probabilité, l'onde u_M obéit à un système d'équations linéaires

$$i\hbar \frac{\partial u_M}{\partial t} + \mathfrak{H}_{j,0}^{\odot} u_M = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (20)$$

12. Onde prévisionnelle. — Statistiquement, l'onde moyenne u_M apparaît comme l'onde la plus probable pour cet ensemble de Gibbs de systèmes, et si les quatre conditions ci-dessous sont remplies, elle obéit au système d'équations (20). On est alors conduit à prendre comme onde prévisionnelle ψ à l'approximation de la mécanique ondulatoire usuelle, une onde correspondant à l'onde la plus probable, donc correspondant à u_M . Comme l'onde ψ doit pouvoir être normée, on doit la poser proportionnelle à u_M , soit

$$\psi = K \cdot u_M$$

la constante K permettant la normalisation de ψ .

Comme les équations (10) sont linéaires, la fonction ψ satisfait aux mêmes équations, d'où

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathfrak{H}_{0,j}^{\odot} \psi = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (21)$$

Si $\mathfrak{H}_{0,j}^{\odot}$ est l'opérateur déduit par fusion de l'hamiltonien d'un corpuscule de Dirac de spin $1/2$, alors on constate que *le système d'équations (21) est identique au système d'équations que M. Louis de Broglie a placé à la base de sa théorie des particules à spin pour un corpuscule fondu de spin $n/2$.*

13. Onde moyenne définie par une mesure. —

En généralisant le raisonnement que nous avons fait dans le cas d'un corpuscule simple [3], lors d'une mesure, on ne peut déterminer des conditions initiales précises sur l'ensemble $\{u_j\}$ des ondes des corpuscules C_j d'un système S , et cela demeure valable dans le cas d'un système fondu.

On a un ensemble de mouvements possibles. On peut alors définir une onde la plus probable \bar{u} et si les quatre conditions envisagées ci-dessus sont remplies, alors à la limite en probabilité, on a

$$i\hbar \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathfrak{H}_j^{\odot} \bar{u} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (22)$$

C'est à partir de cette fonction la plus probable que l'on devra calculer les prévisions. Avec une probabilité infiniment proche de l'unité, elle obéit à une équation linéaire, et à l'approximation de la mécanique ondulatoire usuelle, les prévisions devront s'exprimer par une fonction d'onde ψ proportionnelle à \bar{u} . Cette fonction ψ obéit alors à la même équation, soit

$$\psi = k\bar{u}.$$

Ici encore le système d'équations (22) est identique au système que M. Louis de Broglie a mis à la base de sa théorie des particules à spin par sa méthode de fusion. Ainsi ce que nous avons appelé plus haut (§ 7), *particule fondue* se réduit à l'approximation linéaire à ce que M. Louis de Broglie a appelé *particule fondue* (mais ce n'est pas un corpuscule. Ne sont corpuscules que les éléments inséparables, entrant ou non dans des parties fondues, du système S , c'est-à-dire en fait les particules de spin $1/2$).

M. Louis de Broglie [2] a insisté sur le caractère peu satisfaisant des raisonnements qui l'ont conduit aux équations (11). Ici au contraire, grâce à la façon dont on représente un système de corpuscules en théorie fonctionnelle, que l'on se place au point de vue des ondes physiques u à l'approximation linéaire, ou ce qui est préférable, au point de vue prévisionnel à l'approximation de la mécanique ondulatoire usuelle, soit à partir d'une assemblée de systèmes selon la méthode de Gibbs, soit à partir d'une mesure, *on obtient les équations de*

M. Louis de Broglie des particules fondues sans aucune hypothèse particulière ou supplémentaire et d'une façon déductive rigoureuse en accord avec toutes les exigences physiques. C'est là un résultat important que fournit la théorie fonctionnelle et qui ne pouvait pas être obtenu par la mécanique ondulatoire usuelle parce qu'elle ne peut se passer d'utiliser un espace de configuration, ce qui est en désaccord avec les conditions imposées par la relativité, et parce qu'on ne peut pas définir de système de corpuscules en mécanique ondulatoire relativiste usuelle. Les résultats obtenus ici nous per-

mettent d'écarter les objections qui ont pu être faites à la méthode de fusion. En particulier, à partir de la fusion de deux corpuscules de spin $1/2$, on obtient la théorie du photon et de l'électromagnétisme non linéaire [4], et à partir de la fusion de quatre corpuscules de spin $1/2$, on obtient la théorie du graviton et de la gravitation [5]; les équations sont non linéaires comme toujours en théorie fonctionnelle. A l'approximation de la mécanique ondulatoire usuelle, on retrouve la théorie linéaire de M. Louis de Broglie [6].

Manuscrit reçu le 13 juin 1960.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESTOUCHES (J. L.), *J. Physique Rad.*, 1961, **22**, 76.
 [2] DE BROGLIE (Louis), *Théorie générale des particules à spin* (Gauthier-Villars, Paris, 1^{re} éd., 1942, 2^e éd., 1954).
 [3] DESTOUCHES (J. L.), *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 2722 ; *J. Physique Rad.*, 1960, **21**, 145.
 DESTOUCHES (J. L.) et AESCHLIMANN (F.), *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle* (Hermann, Paris, 1959), p. 88-94.
 [4] AESCHLIMANN (F.), *Thèse*, Paris, 1957 ; *C. R. Acad. Sc.*, 1957, **244**, 3034 ; *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 562, t. 20, 1959, p. 730, 927, t. 21, 1960, 115, 859. Recherches sur la notion de système physique (Gauthier Villars, Paris, 1961).
 DESTOUCHES (J. L.) et AESCHLIMANN (F.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 632.
 DESTOUCHES (J. L.), *Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1958), p. 61-100.
 [5] DESTOUCHES (J. L.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 642. *Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1958), p. 101-145.
 [6] DE BROGLIE (Louis), *Une nouvelle théorie de la lumière* (2 vol., Hermann, Paris, 1940).