



HAL
open science

Tenseur de conductivité d'un plasma chaud, homogène et faiblement ionisé

Anne Mangeney

► **To cite this version:**

Anne Mangeney. Tenseur de conductivité d'un plasma chaud, homogène et faiblement ionisé. *Journal de Physique et le Radium*, 1960, 21 (12), pp.870-872. 10.1051/jphysrad:019600021012087000 . jpa-00236395

HAL Id: jpa-00236395

<https://hal.science/jpa-00236395>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TENSEUR DE CONDUCTIVITÉ D'UN PLASMA CHAUD, HOMOGENE ET FAIBLEMENT IONISÉ

Par A. MANGENEY

Institut d'Astrophysique, Paris

Résumé. — Ce travail étend les résultats de MM Bayet, Delcroix, Denisse, exposés dans le premier d'une série de quatre articles parus dans le *Journal de Physique* au cas d'un gaz de Lorentz dont la température électronique est assez élevée pour justifier un traitement relativiste. On montre que la conductivité électrique dans la direction du champ magnétique n'est pas modifiée et on donne les nouvelles expressions des conductivités transverses. La méthode de résolution employée n'est valable, si la fréquence du champ électrique est inférieure à la fréquence gyro-magnétique des électrons, que pour une classe de distributions électroniques initiales que l'on détermine.

Abstract. — In this work, the results of MM Bayet, Delcroix, Denisse, presented in the first of a series of four papers published in the *Journal de Physique*, are extended to the case of a Lorentz gas, the electronic temperature of which is high enough to justify a relativistic treatment. It is shown that the electric conductivity in the direction of the magnetic field is the same as in the paper of Bayet, Delcroix, Denisse. The new expressions of the transverse conductivities are given. If the frequency of the electric field is less than the gyro-magnetic frequency of the electrons, the used method is valid only for a class of electronic distribution functions.

1. Introduction. — Nous allons considérer un gaz de Lorentz électrons-molécules, homogène, ou les électrons sont supposés être à une température assez élevée pour que leur mouvement obéisse aux lois de la relativité restreinte, tandis que les molécules de masse infiniment grande ont une vitesse négligeable devant celle des électrons.

Nous négligerons les collisions électrons-électrons, électrons-ions et supposons que dans un choc électron-molécule il n'y a qu'un très faible échange d'énergie, c'est-à-dire que l'énergie cinétique des électrons est faible devant l'énergie au repos des molécules.

2. Équation de Boltzmann relativiste. — On peut définir pour les électrons une fonction de distribution dans l'espace des 4-vitesses et des 4-positions :

$$f(x^\alpha, u^\alpha), \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict, \\ u_i = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} c \frac{dx^i}{dt}, \quad uu^4 = v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ v = \text{vitesse d'un électron},$$

qui vérifie une équation de Boltzmann covariante [2]

$$cu^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + c^{-1} m_0^{-1} F^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} f = \Delta_c(f) \quad (1)$$

(m_0 : masse au repos de l'électron), $\Delta_c(f)$ étant un opérateur collisionnel invariant et F^α étant la force qui s'exerce sur un électron.

Mais u^4 est fonction des u^i et (1) peut s'écrire :

$$u^4 \frac{\partial f^*}{\partial t} + u_i \frac{\partial f^*}{\partial x^i} + m_0^{-1} c^{-1} F^i \frac{\partial f^*}{\partial u^i} = \Delta_c(f^*) \quad (2)$$

ou $f^* = f(u^i, u^4(u^i))$

$\left(u_i \frac{\partial f^*}{\partial x^i} = u \frac{\partial f^*}{\partial x} = 0, \text{ car le plasma est supposé homogène}\right).$

(Comme dans la suite nous ne considérerons plus que f^* , nous pouvons supprimer l'astérisque.)

Avec les hypothèses faites, l'opérateur de collision $\Delta_c(f)$ se met sous une forme identique au $J(f)$ de Bayet, Delcroix, Denisse [1] :

$$\Delta_c(f) = vN \int (f' - f) d\Sigma$$

N , densité des molécules, $d\Sigma$, section efficace différentielle, ($f'(u) = f(u')$, u' étant la vitesse d'un électron après une collision avec une molécule).

$\Delta_c(f)$ est alors un opérateur linéaire qui commute avec les rotations [1] dans l'espace des u ; ce qui permet d'écrire

$$\Delta_c(C_{lm}) = -v_l C_{lm} \\ \Delta_c(S_{lm}) = -v_l S_{lm}$$

C_{lm} et S_{lm} étant les fonctions sphériques associées d'ordre (l, m) sur l'espace des u . Si l'on écrit u :

$$\text{sh } \chi \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{ce qui revient à définir } \chi \text{ par} \\ \text{sh } \chi \sin \theta \sin \varphi \quad c \text{ th } \chi = v) \\ \text{sh } \chi \cos \theta$$

alors

$$C_{lm} = (\text{sh } \chi)^l P_{lm}(\cos \theta) \cos m\varphi \\ S_{lm} = (\text{sh } \chi)^l P_{lm}(\cos \theta) \sin m\varphi$$

Nous allons donc décomposer f en série de fonctions sphériques et obtenir au lieu d'une équation en f , une infinité dénombrable d'équations en les coefficients de f .

3. Calcul de f au premier ordre en la perturbation. — Nous supposons que le gaz est soumis à un champ magnétique constant et uniforme \mathcal{H} , dirigé suivant l'axe Oz et à un champ électrique E , dépendant sinusoidalement du temps et de plus uniforme. (En toute rigueur, il faudrait considérer une onde électromagnétique se propageant dans le

plasma, mais comme nous ne nous intéressons pas au problème de la dispersion des ondes, nous pouvons négliger les effets de propagation et ceux dus au champ magnétique associé)

Nous supposons aussi que, dans le système du laboratoire, l'amplitude α du champ électrique E est petite et développerons f suivant les puissances de α :

$$f = f_0 + f_1 +$$

La force F_i qui s'exerce sur un électron s'écrit

$$F_i = e(u_4 E_i + (\mathbf{u} \times \mathcal{H})_i)$$

D'où les équations pour f_0, f_1, \dots

$$u_4 \frac{\partial f_0}{\partial t} + em_0^{-1} c^{-1} (\mathbf{u} \times \mathcal{H}) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}} = \Delta_c(f_0) \quad (3)$$

$$u_4 \frac{\partial f_1}{\partial t} + em_0^{-1} c^{-1} u_4 E \frac{\partial f_0}{\partial t} + em_0^{-1} c^{-1} (\mathbf{u} \times \mathcal{H}) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}} = \Delta_c(f_1) \text{ etc.} \quad (4)$$

Posons $\frac{e\mathcal{H}}{m_0 c} = \Omega z$ (z vecteur unitaire de l'axe Oz),

$$\frac{eE}{m_0 c} = \alpha e^{i\omega t} (\cos \Psi z + \sin \Psi y)$$

(y vecteur unitaire de l'axe Oy), et

$$f_0 = \sum_{i,m} (a_{im} C_{im} + a'_{im} S_{im})$$

$$f_1 = \sum_{i,m} (b_{im} C_{im} + b'_{im} S_{im}).$$

En remplaçant \mathcal{H}, E, f_0 par leurs expressions dans (3) on trouve les équations suivantes

$$\begin{aligned} \dot{a}_{00} &= 0 \\ u_4 \dot{a}_{10} + v_1 a_{10} &= 0 \\ u_4 \dot{a}_{11} + v_1 a_{11} &= \Omega a'_{11} \\ u_4 \dot{a}'_{11} + v_1 a'_{11} &= -\Omega a_{11} \\ u_4 \dot{a}_{l0} + v_l a_{l0} &= 0 \\ u_4 \dot{a}_{lm} + v_l a_{lm} &= \Omega m a'_{lm} \\ u_4 \dot{a}'_{lm} + v_l a'_{lm} &= -\Omega m a_{lm} \end{aligned} \quad (I)$$

Les solutions du système (I) s'écrivent :

$$a_{00}(t) = a_{00}(0)$$

$$a_{l0}(t) = A_{l0} e^{-(v_l/u_4)t}$$

$$a_{lm}(t) = A_{lm} e^{-(v_l/u_4)t} \cos(\varphi_{lm} - m(\Omega/u_4)t)$$

$$a'_{lm}(t) = A_{lm} e^{-(v_l/u_4)t} \sin(\varphi_{lm} - m(\Omega/u_4)t)$$

($A_{l0}, A_{lm}, \varphi_{lm}$ étant des constantes d'intégration).

Nous voyons sur ces formules que les temps de relaxation des différentes anisotropies diffèrent de ceux trouvés par Bayet, Delcroix, Denisse [1] par un facteur $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

Les coefficients a_{im}, a'_{im} s'annulant au bout d'un temps plus ou moins long, on peut considérer qu'en régime permanent f_0 est isotrope et se réduit à a_{00} .

De même que tout à l'heure, remplaçant \mathcal{H}, E, f_1 , par leurs expressions et f_0 par a_{00} dans (4), on trouve pour f_1 le système d'équations :

$$\dot{b}_{00} = 0$$

$$u_4 \dot{b}_{10} + \alpha \cos \Psi \frac{\text{ch } \gamma}{\text{sh } \gamma} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh } \gamma)} \cos \omega t + v_{10} b_{10} = 0$$

$$u_4 \dot{b}_{11} + v_1 b_{11} = \Omega b'_{11}$$

$$u_4 \dot{b}'_{11} + v_1 b'_{11} + \alpha \sin \Psi \frac{\text{ch } \chi}{\text{sh } \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh } \chi)} \cos \omega t = -\Omega b_{11}$$

$$u_4 \dot{b}_{l0} + v_l b_{l0} = 0$$

$$u_4 \dot{b}_{lm} + v_l b_{lm} = \Omega b_{lm}$$

$$u_4 \dot{b}'_{lm} + v_l b'_{lm} = -\Omega b_{lm}$$

..

dont les solutions s'écrivent :

$$b_{00} = 0$$

(si à l'instant initial le plasma est isotrope)

$$b_{10} = B_{10} e^{-(v_1/u_4)t}$$

$$- \mathcal{R} \left\{ \frac{1}{i u_4 \omega + v_1} \frac{1}{\text{th } \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh } \chi)} \alpha \cos \Psi e^{i\omega t} \right\}$$

$$b_{11} = B_{11} e^{-(v_1/u_4)t} \cos \left\{ \Psi_{11} - \frac{\Omega}{u_4} t \right\}$$

$$- \mathcal{R} \left\{ \frac{\Omega}{(i\omega u_4 + v_1)^2 + \Omega^2} \frac{\alpha}{\text{th } \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh } \chi)} \sin \Psi e^{i\omega t} \right\}$$

$$b'_{11} = B_{11} e^{-(v_1/u_4)t} \sin \left\{ \Psi_{11} - \frac{\Omega}{u_4} t \right\}$$

$$- \mathcal{R} \left\{ \frac{i\omega u_4 + v_1}{(i\omega u_4 + v_1)^2 + \Omega^2} \frac{\alpha}{\text{th } \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh } \chi)} \sin \Psi e^{i\omega t} \right\}$$

etc .

4. Tenseur de conductivité. — Par définition [3] le vecteur \mathbf{j} , densité de courant, est donné par

$$\mathbf{j} = e \iiint f \mathbf{u} du_1 du_2 du_3, \text{ c'est-à-dire}$$

$$j_x = e \iiint C_{11} f \text{sh}^2 \chi \text{ch } \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$$

$$j_y = e \iiint S_{11} f \text{sh}^2 \chi \text{ch } \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$$

$$j_z = e \iiint C_{10} f \text{sh}^2 \chi \text{ch } \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$$

(En effet $u_x = C_{11}, u_y = S_{11}, u_z = C_{10}$, cf. [1]).

Remplaçant f par $f_0 + f_1$ et intégrant sur une sphère de rayon $R = \text{sh } \chi$, on trouve du fait de l'orthogonalité des fonctions sphériques :

$$\mathbf{j}_x = \frac{4\pi e}{3} \int b_{11} \text{sh}^4 \chi \text{ch} \chi \, d\chi$$

$$\mathbf{j}_y = \frac{4\pi e}{3} \int b'_{11} \text{sh}^4 \chi \text{ch} \chi \, d\chi$$

$$\mathbf{j}_z = \frac{4\pi e}{3} \int b_{10} \text{sh}^4 \chi \text{ch} \chi \, d\chi$$

De même que Bayet, Delcroix, Denisse, nous en déduisons le tenseur de conductivité complexe :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec}$$

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \int_0^\infty \frac{1}{i \text{ch} \chi \omega + v_1} \frac{\text{sh}^4 \chi}{\text{th} \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh} \chi)} \text{ch} \chi \, d\chi$$

$$\sigma_1 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \times \int_0^\infty \frac{i \text{ch} \chi + v_1}{(i \text{ch} \chi \omega + v_1)^2 + \Omega^2} \frac{\text{sh}^4 \chi}{\text{th} \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh} \chi)} \text{ch} \chi \, d\chi$$

$$\sigma_2 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \times \int_0^\infty \frac{\Omega}{(i \text{ch} \chi \omega + v_1)^2 + \Omega^2} \frac{\text{sh}^4 \chi}{\text{th} \chi} \frac{\partial a_{00}}{\partial (\text{sh} \chi)} \text{ch} \chi \, d\chi$$

ce qu'on peut récrire en posant $t = \text{sh } \chi$

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \int_0^\infty \frac{1}{i\omega\sqrt{1+t^2} + v_1} t^3 \sqrt{1+t^2} \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \times \int_0^\infty \frac{i\omega\sqrt{1+t^2} + v_1}{(i\omega\sqrt{1+t^2} + v_1)^2 + \Omega^2} t^3 \sqrt{1+t^2} \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt \\ &= -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \times \int_0^\infty \frac{i\omega\Omega\sqrt{1+t^2}}{(i\omega\sqrt{1+t^2} + v_1)^2 + \Omega^2} t^3 \sqrt{1+t^2} \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Considérons le cas où :

$$\underline{v_1 = 0}$$

alors

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt$$

De même que dans [1] on peut montrer que

$$-\int_0^\infty \frac{4\pi}{3} t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt = n \quad (\text{densité numérique des électrons})$$

et donc

$$\sigma_0 = n \frac{e^2}{m_0} \frac{1}{i\omega}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \int_0^\infty \frac{i\omega(1+t^2)}{-\omega^2(1+t^2) + \Omega^2} t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt \\ &= -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty \frac{(1+t^2)}{1+t^2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

ou :

$$\sigma_1 = -\frac{4\pi e^2}{3m_0} \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty \frac{1+t^2}{t^2 - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}} t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt$$

et :

$$\sigma_2 = +\frac{4\pi e^2}{3m_0} \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty \frac{i\omega\Omega\sqrt{1+t^2}}{t^2 - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}} t^3 \frac{\partial a_{00}}{\partial t} dt$$

On voit sur ces formules que la conductivité suivant le champ magnétique n'est pas modifiée par rapport au cas classique, mais que les conductivités transverses, elles, le sont profondément.

On voit apparaître dans ces termes, en dénominateur, la quantité

$$t^2 - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}$$

dont l'annulation correspond à une vitesse $v^2/c^2 = (\Omega^2 - \omega^2)/\Omega^2$, qui apparaît comme singularité dans les équations du mouvement.

Si $\Omega/\omega > 1$ et si $\partial a_{00}/\partial t$ ne s'annule pas pour $t^2 = (\Omega^2 - \omega^2)/\omega^2$ (ce qui est le cas de la distribution maxwellienne), les quantités σ_1 , σ_2 divergent. Cela est dû au fait que pour les électrons qui ont une vitesse initiale $c\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)/\omega^2}$, les effets du champ électrique ne sont plus petits et par conséquent, au voisinage de cette vitesse critique, le développement de f suivant les puissances de α n'est plus valable.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1960

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAYET (M), DELCROIX (J. L.) et DENISSE (J. F.), *J. Physique Rad*, 1954, **15**, 795
- [2] KEN IIFI OTO, *Prog Theor Phys. Jap*, 1958, **28**, 1-14.
- [3] SYNGE (J. L.), « Relativity, the Special Theory » (North-Holland Publishing Co., Amsterdam), 1956
- [4] SYNGE (J. L.), « Relativistic gas ». (North Holland Publishing Co., Amsterdam), 1957.