HAL
open science

Piézoélectricité. Calcul des vitesses de propagation

Henri Pailloux

▶ To cite this version:

Henri Pailloux. Piézoélectricité. Calcul des vitesses de propagation. Journal de Physique et le Radium, 1958, 19 (5), pp.523-526. 10.1051/jphysrad:01958001905052300 . jpa-00235881

HAL Id: jpa-00235881
https://hal.science/jpa-00235881v1

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PIÉZOÉLECTRICITÉ
CALCUL DES VITESSES DE PROPAGATION

Par M. HENRI PAILLOUX,
Faculté des Sciences de Caen.

Résumé. — Étude mathématique des variations dans le temps et l'espace des tensions élastiques, des champs électrique et magnétique, de la polarisation dans un milieu piézoélectrique très général, mais homogène, lorsqu'on introduit les équations de Maxwell qui apportent un couplage. Étude des vibrations planes, dont la superposition donne l'état vibratoire le plus général. Calcul des 6 vitesses de propagation, elles ne dépendent que de la direction choisie et non des conditions aux limites. On constate que le couplage piézoélectrique a un effet du second ordre sur la valeur des vitesses, et que pour des coefficients piézoélectriques petits, on peut étudier séparément les oscillations mécaniques et électriques.

Abstract. — A mathematical study of the space and time variations of elastic strains, electric and magnetic fields, and polarization, in a general type of medium, piezoelectric but homogeneous, introducing Maxwell's relations, which give a coupling. Plane waves, whose superposition gives the most general state of vibration, are studied. The six velocities are calculated; they depend only on the direction of propagation, and not on the conditions at the limits. Its appears that the piezoelectric coupling has a second-order effect on the velocities, and that, when piezoelectric coefficients are small, mechanical and electrical oscillations may be studied separately.

L'étude suivante des milieux piézoélectriques, qui tient compte des équations de Maxwell sous des hypothèses assez larges, m'a été suggérée par la lecture des travaux de M. Cotte. J'ai vu là une application pour une méthode de calcul exposée dans d'autres publications.

Les milieux piézoélectriques sont caractérisés par un couplage entre les grandeurs élastiques et les grandeurs électriques. Tout champ électrique produit une déformation élastique, et toute tension élastique fait apparaître une polarisation électrique. Les effets sont supposés linéaires, et entre les composantes Θ_i des tensions, P_α de la polarisation d'une part, et les composantes ξ_i de la déformation et E_α du champ électrique d'autre part, nous admettons les relations

$$\Theta_i = c_{ij}\,\xi_j - K_{\alpha i}\,E_\alpha, \qquad P_\alpha = K_{\alpha i}\,\xi_i + \chi_{\alpha\beta}\,E_\beta.$$

les indices latins varient de 1 à 6, les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3. Les signes de sommations relatifs à un indice répété deux fois sont supprimés. Les $c_{ij} = c_{ji}$ sont les constantes élastiques pour un champ électrique nul, les $K_{\alpha i}$ sont les constantes piézoélectriques, les $\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}$ sont les constantes diélectriques pour une déformation nulle. Les unités sont celles du système Giorgi rationalisé.

Introduisons les opérateurs différentiel X_α, T qui sont les dérivations en x_α et t. Les composantes de la déformation, avec ces notations, peuvent s'écrire

$$\xi_1 = X_1\,u_1, \qquad \xi_2 = X_2\,u_2, \qquad \xi_3 = X_3\,u_3,$$
$$\xi_4 = X_3\,u_2 + X_2\,u_3, \qquad \xi_5 = X_1\,u_3 + X_3\,u_1,$$
$$\xi_6 = X_2\,u_1 + X_1\,u_2$$

en fonction des composantes u_α du déplacement.

Nous en déduisons immédiatement les composantes des tensions :

$$\begin{aligned}\Theta_1 = {} & (c_{11}\,X_1 + c_{16}\,X_2 + c_{15}\,X_3)\,u_1 \\ & + (c_{16}\,X_1 + c_{12}\,X_2 + c_{14}\,X_3)\,u_2 \\ & + (c_{15}\,X_1 + c_{14}\,X_2 + c_{13}\,X_3)\,u_3 \\ & - (K_{1i}\,E_1 + K_{2i}\,E_2 + K_{3i}\,E_3),\end{aligned}$$

et les composantes de la polarisation :

$$\begin{aligned}P_\alpha = {} & (K_{\alpha 1}\,X_1 + K_{\alpha 6}\,X_2 + K_{\alpha 5}\,X_3)\,u_1 \\ & + (K_{\alpha 6}\,X_1 + K_{\alpha 2}\,X_2 + K_{\alpha 4}\,X_3)\,u_2 \\ & + (K_{\alpha 5}\,X_1 + K_{\alpha 4}\,X_2 + K_{\alpha 3}\,X_3)\,u_3 + \chi_{\alpha\beta}\,E_\beta.\end{aligned}$$

Rappelons maintenant les équations de la dynamique des milieux élastiques, en l'absence de forces extérieures (supposées négligeables) :

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_6}{\partial x_2} + \frac{\partial\Theta_5}{\partial x_3}$$
$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial\Theta_6}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\Theta_4}{\partial x_3}$$
$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial\Theta_5}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_4}{\partial x_2} + \frac{\partial\Theta_3}{\partial x_3}.$$

Introduisons dans ces équations les composantes u_α du déplacement et E_α du champ électrique. On parvient alors aux trois équations suivantes qui relient le déplacement au champ électrique :

$$(\Omega_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\rho T^2)\,u_\alpha = L_{\alpha\beta}\,E_\alpha. \qquad \left(\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ 1 \text{ si } \alpha = \beta\end{cases}\right). \tag{I}$$

Les $\Omega_{\alpha\beta}$ sont des polynômes homogènes, du

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01958001905052300

second degré par rapport aux X_α, ayant les valeurs suivantes

$$\Omega_{11} = c_{11} X_1^2 + c_{66} X_2^2 + c_{55} X_3^2 + 2c_{65} X_2 X_3 + 2c_{51} X_3 X_1 + 2c_{16} X_1 X_2$$

$$\Omega_{22} = c_{66} X_1^2 + c_{22} X_2^2 + c_{44} X_3^2 + 2c_{24} X_2 X_3 + 2c_{46} X_3 X_1 + 2c_{62} X_1 X_2$$

$$\Omega_{33} = c_{55} X_1^2 + c_{44} X_2^2 + c_{33} X_3^2 + 2c_{43} X_2 X_3 + 2c_{35} X_3 X_1 + 2c_{54} X_1 X_2$$

$$\Omega_{23} = \Omega_{32} = c_{65} X_1^2 + c_{24} X_2^2 + c_{43} X_3^2 + (c_{23} + c_{44}) X_2 X_3 + (c_{45} + c_{63}) X_3 X_1 + (c_{64} + c_{25}) X_1 X_2$$

$$\Omega_{31} = \Omega_{13} = c_{51} X_1^2 + c_{46} X_2^2 + c_{35} X_3^2 + (c_{45} + c_{36}) X_2 X_3 + (c_{31} + c_{55}) X_3 X_1 + (c_{56} + c_{41}) X_1 X_2$$

$$\Omega_{12} = \Omega_{21} = c_{16} X_1^2 + c_{62} X_2^2 + c_{54} X_3^2 + (c_{64} + c_{25}) X_2 X_3 + (c_{56} + c_{14}) X_3 X_1 + (c_{12} + c_{66}) X_1 X_2.$$

Les $L_{\alpha\beta}$ sont homogènes et du premier degré. Voici leur expression

$$\begin{aligned} L_{11} &= K_{11} X_1 + K_{16} X_2 + K_{15} X_3 \\ L_{21} &= K_{16} X_1 + K_{12} X_2 + K_{14} X_3 \\ L_{31} &= K_{15} X_1 + K_{14} X_2 + K_{13} X_3 \\ L_{12} &= K_{21} X_1 + K_{26} X_2 + K_{25} X_3 \\ L_{22} &= K_{26} X_1 + K_{22} X_2 + K_{24} X_3 \\ L_{32} &= K_{25} X_1 + K_{24} X_2 + K_{23} X_3 \\ L_{13} &= K_{31} X_1 + K_{36} X_2 + K_{35} X_3 \\ L_{23} &= K_{36} X_1 + K_{32} X_2 + K_{34} X_3 \\ L_{33} &= K_{35} X_1 + K_{34} X_2 + K_{33} X_3. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser les équations de Maxwell. Rappelons leur forme vectorielle :

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

avec

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0 [\mu]\ \mathbf{H}.$$

$[\mu]$ désigne le tenseur perméabilité. ε_0 et μ_0 sont deux constantes universelles telles que

$$c = 1/\sqrt{\mu_0\ \varepsilon_0}.$$

La première équation de Maxwell donne en projection sur le premier axe

$$X_2 H_3 - X_3 H_2 = T(\varepsilon_0 E_1 + 4\pi P_1).$$

Or si nous introduisons systématiquement les $L_{\alpha\beta}$, nous avons comme composantes de la polarisation

$$P_\alpha = L_{\alpha\beta} u_\beta + \chi_{\alpha\beta} E_\beta.$$

Nous parvenons ainsi au système (II) :

$$\begin{aligned} X_2 H_3 - X_3 H_2 &= T[4\pi L_{1\alpha} u_\alpha + (\varepsilon_0 \delta_{1\alpha} + 4\pi\chi_{1\alpha}) E_\alpha] \\ X_3 H_1 - X_1 H_3 &= T[4\pi L_{2\alpha} u_\alpha + (\varepsilon_0 \delta_{2\alpha} + 4\pi\chi_{2\alpha}) E_\alpha] \\ X_1 H_2 - X_2 H_1 &= T[4\pi L_{3\alpha} u_\alpha + (\varepsilon_0 \delta_{3\alpha} + 4\pi\chi_{3\alpha}) E_\alpha] \end{aligned} \tag{II}$$

Pour transformer la seconde equation de Maxwell, introduisons $[\nu]$ matrice inverse de $[\mu]$, en admettant qu'elle existe.

L'introduction de $[\nu]$ permet d'écrire

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nu]\ \mathbf{B}.$$

De la seconde équation de Maxwell nous déduisons

$$[\nu]\ \mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -[\nu]\ T\mathbf{B} = -T[\nu]\ \mathbf{B} = -\mu_0 T\mathbf{H}.$$

Cette remarque nous permet d'écrire le système (III) entre **H** et **E**.

$$\begin{aligned} -\mu_0 TH_1 &= (\nu_{12} X_3 - \nu_{13} X_2) E_1 + (\nu_{13} X_1 - \nu_{11} X_3) E_2 + (\nu_{11} X_2 - \nu_{12} X_1) E_3 \\ -\mu_0 TH_2 &= (\nu_{22} X_3 - \nu_{23} C_2) E_1 + (\nu_{23} X_1 - \nu_{21} X_3) E_2 + (\nu_{21} X_2 - \nu_{22} X_1) E_3 \\ -\mu_0 TH_3 &= (\nu_{32} X_3 - \nu_{33} X_2) E_2 + (\nu_{33} X_1 - \nu_{31} X_3) E_2 + (\nu_{31} X_2 - \nu_{32} X_1) E_3. \end{aligned} \tag{III}$$

Reprenons le système (II) après avoir multiplié les deux membres par $\mu_0\ T$, et portons dans ce système les dérivées de TH_α par rapport à x_β dont nous avons besoin, après les avoir tirées du système (III). On parvient alors au système (IV) :

$$4\pi\mu_0 T^2 L_{\alpha\beta} u_\beta + [(\varepsilon_0 \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\chi_{\alpha\beta}) \mu_0 T^2 - \Pi_{\alpha\beta}] E_\beta = 0. \tag{IV}$$

Nous avons employé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \nu_{33} X_2^2 + \nu_{22} X_3^2 - (\nu_{23} + \nu_{32}) X_2 X_3 \\ \Pi_{12} &= -\nu_{21} X_3^2 + \nu_{31} X_2 X_3 + \nu_{23} X_3 X_1 - \nu_{33} X_1 X_2 \\ \Pi_{13} &= -\nu_{31} X_2^2 + \nu_{21} X_2 X_3 - \nu_{22} X_3 X_1 + \nu_{32} X_1 X_2 \\ \Pi_{21} &= -\nu_{12} X_3^2 + \nu_{13} X_2 X_3 + \nu_{32} X_3 X_1 - \nu_{33} X_1 X_2 \\ \Pi_{22} &= \nu_{11} X_3^2 + \nu_{33} X_1^2 - (\nu_{31} + \nu_{13}) X_3 X_1 \\ \Pi_{23} &= -\nu_{32} X_1^2 - \nu_{11} X_2 X_3 + \nu_{12} X_3 X_1 + \nu_{31} X_1 X_2 \\ \Pi_{31} &= -\nu_{13} X_2^2 + \nu_{12} X_2 X_3 - \nu_{22} X_3 X_1 + \nu_{23} X_1 X_2 \\ \Pi_{32} &= -\nu_{23} X_1^2 - \nu_{11} X_2 X_3 + \nu_{21} X_3 X_1 + \nu_{13} X_1 X_2 \\ \Pi_{33} &= \nu_{22} X_1^2 + \nu_{11} X^2 - (\nu_{21} + \nu_{12}) X_1 X_2. \end{aligned}$$

Actuellement, nous disposons des systèmes (I) et (IV) formant 6 équations pour les 6 fonctions inconnues u_α et E_α. Ces 6 quantités étant supposées connues, le système (III) fournit les H_α par une intégration en t. Il s'introduit trois fonctions arbitraires des x_λ que la connaissance de H_α à l'instant initial permet de déterminer. Il en résulte immédiatement la connaissance de **B**, de la polarisation et des tensions. Les deux systèmes d'équations aux dérivées partielles (I) et (IV) étant homogènes et à coefficients constants, nous sommes dans le cas où il existe une propagation par ondes planes ; de plus la vitesse de propagation ne dépend que de la direction choisie. Si on pose en effet,

$$\varphi = \exp\ (a_\alpha x_\alpha + ht),$$

les a_α et h étant des constantes, il existe des systèmes de solutions particulières qui sont de la forme

$$u_\alpha = A_\alpha\,\varphi, \qquad E_\alpha = C_\alpha\,\varphi.$$

Les A_α et C_α sont aussi des constantes. Transportant des valeurs dans les systèmes différentiels, on obtient six relations. Après avoir simplifié par l'exponentielle qui n'est jamais nulle, on constate qu'il suffit, dans le système différentiel dont on est parti, de remplacer les lettres u_α, E_α, X_α, T respectivement par A_α, C_α, a_α, h, et les produits symboliques, par des produits algébriques. Les 6 relations obtenues sont linéaires par rapport aux A_α et C_α, à condition de faire entrer les a_α et h parmi les coefficients. Le système linéaire ainsi obtenu doit admettre des solutions qui ne sont pas toutes identiquement nulles. Le déterminant des coefficients est nécessairement nul. On forme ainsi une relation entre h et les a_α, qui est du sixième degré en h^2. Pour simplifier l'écriture, posons

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}(a_\lambda), \qquad L'_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}(a_\lambda), \qquad \Pi'_{\alpha\beta} = \frac{\Pi_{\alpha\beta}(a_\lambda)}{4\pi\mu_0}.$$

Formons explicitement la relation entre les a_α et h :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc}
\Gamma_{11} - \rho h^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & L'_{11} & L'_{21} & L'_{31} \\
\Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho h^2 & \Gamma_{23} & L'_{12} & L'_{22} & L'_{32} \\
\Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho h^2 & L'_{13} & L'_{23} & L'_{33} \\
\hline
L'_{11}\,h^2 & L'_{12}\,h^2 & L'_{13}\,h^2 & \Pi'_{11} - \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \chi_{11}\right) h^2 & \Pi'_{12} - \chi_{12}\,h^2 & \Pi'_{13} - \chi_{13}\,h^2 \\
L'_{21}\,h^2 & L'_{22}\,h^2 & L'_{23}\,h^2 & \Pi'_{21} - \chi_{21}\,h^2 & \Pi'_{22} - \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \chi_{22}\right) h^2 & \Pi'_{23} - \chi_{23}\,h^2 \\
L'_{31}\,h^2 & L'_{32}\,h^2 & L'_{33}\,h^2 & \Pi'_{31} - \chi_{31}\,h^2 & \Pi'_{32} - \chi_{32}\,h^2 & \Pi'_{33} - \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \chi_{33}\right) h^2
\end{array}\right| = 0.$$

Cette relation est homogène par rapport aux quatre variables. En effet, on peut introduire les rapports des a_α à h de la manière suivante : on divise les trois premières colonnes du déterminant par h^2, les trois dernières colonnes par h, et enfin les trois dernières lignes par h.

On peut remarquer que pour une faible piézoélectricité les $L'_{\alpha\beta}$ sont négligeables, et dans le déterminant précédent ne subsistent plus que le quart gauche supérieur, et le quart droit inférieur. Les oscillations mécaniques et électriques sont découplées. Il en existe trois de chaque sorte. Pour une faible valeur de la piézoélectricité, les valeurs que l'on pourrait ainsi calculer pourraient servir de valeurs de départ pour la résolution de l'équation numérique.

Pour mettre en évidence la vitesse de propagation des ondes planes, considérons un mobile fictif se déplaçant dans la direction des paramètres directeurs a_α, à la vitesse V. Son mouvement est régi par les relations

$$x_\alpha = \pm\, a_\alpha\, Vt/\sqrt{\Sigma\, a_\alpha^2}.$$

Pour l'onde précédemment considérée, la quantité

$$a_\alpha\, x_\alpha + ht = \pm \frac{\Sigma\, a_\alpha^2}{\sqrt{\Sigma\, a_\alpha^2}}\, Vt + ht = (\pm\sqrt{\Sigma\, a_\alpha^2}\, V + h)\, t.$$

Si nous choisissons la vitesse V telle que

$$V = \pm\, h/\sqrt{\Sigma\, a_\alpha^2},$$

nous constatons, qu'au cours du temps, les points atteints successivement par le mobile fictif ont la même amplitude de déplacement ou de champ électrique. Ces deux grandeurs (et bien d'autres) se propagent donc sans déformation à la vitesse V qui vient d'être calculée.

Nous avons remarqué plus haut que l'équation en h^2 était homogène en h et a_α. La vitesse de propagation ne dépend que des rapports mutuels de a_1, a_2, a_3, c'est-à-dire uniquement des cosinus directeurs de la direction de propagation. En définitive, l'équation aux 6 vitesses de propagations (définies au signe près) s'obtient en remplaçant les a_α par les cosinus directeurs de la direction choisie, et h par V.

A partir des ondes planes mises en évidence, le principe de superposition permet d'obtenir tous les modes de vibration possibles.

Dans le cas où la piézoélectricité est petite sans être négligeable, on peut développer l'équation aux vitesses propres suivant la règle de Laplace relativement aux éléments des trois premières colonnes. On voit en particulier que l'erreur commise en remplaçant les $L_{\alpha\beta}$ par zéro est du second ordre en ce qui concerne la valeur des vitesses, car les L figurent au second degré au moins. Un tel développement permet aussi, en conservant les termes du second degré en $L_{\alpha\beta}$, de trouver la correction à apporter aux vitesses calculées pour $L_{\alpha\beta} = 0$.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1958.

BIBLIOGRAPHIE

COTTE (M.), Propagation d'ondes élastiques dans un milieu piézoélectrique. (*C. R. Acad. Sc.*, 1944, **218**, 445.)

COTTE (M.), La mécanique des milieux piézoélectriques. (Actes du Colloque International de Mécanique de Poitiers, 1950. Publications scientiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 261, p. 333-338).

LAVAL (J.), L'élasticité du milieu cristallin. (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 247 à 260 ; 289 à 297 ; et 369 à 380.)

LE CORRE (Y.), La dissymétrie du tenseur des efforts et ses conséquences. (*J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 934 à 940.)

LE CORRE (Y.), Propagation d'une onde acoustique plane dans un cristal piézoélectrique infini. (*J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 1020.)

LE CORRE (Y.), Les coefficients de couplage et les rendements électromécaniques des matériaux piézoélectriques. (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 51 à 59.)

PAILLOUX (H.), Élasticité. (Fascicule CXXXII du Mémorial des Sc. Math., 1955.)

PAILLOUX (H.), Opérateurs symboliques. (Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, 1956, n° 317, 56 à 64.)