Modèle de particule infinie

M. Hessaby

▶ **To cite this version:**

M. Hessaby. Modèle de particule infinie. Journal de Physique et le Radium, 1957, 18 (5), pp.323-326. 10.1051/jphysrad:01957001805032300 . jpa-00235663

HAL Id: jpa-00235663
https://hal.science/jpa-00235663

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODÈLE DE PARTICULE INFINIE

Par M. HESSABY,

Faculté des Sciences de Tehran.

1. **Le potentiel du champ gravitationnel.** — Nous postulons que le champ gravitationnel est un cas particulier du champ électromagnétique, celui où la densité de charge électrique est nulle en tout point de l'espace [4].

Le champ électromagnétique est donné par un tenseur antisymétrique dérivant d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire, d'après les relations :

$$F_{\mu\nu} = (\partial \Phi^{\mu} / \partial x^{\nu}) - (\partial \Phi^{\nu} / \partial x^{\mu}). \tag{1}$$

Le vecteur charge courant électrique est

$$J^{\mu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}_{\nu} \tag{2}$$

et le tenseur énergie est

$$U^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2\pi}\left(- F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\nu}_{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right). \tag{3}$$

De la relation (3) on tire

$$U^{\nu}_{\mu,\nu} = \frac{1}{2\pi} F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}_{\nu} = 2 F_{\mu\alpha} J^{\alpha}. \tag{4}$$

Par contraction de (3), on obtient aussi

$$U = 0. \tag{5}$$

Puisque par hypothèse, dans le cas du champ gravitationnel, la densité de charge J^{μ} est nulle, nous aurons dans ce cas

$$U^{\nu}_{\mu,\nu} = 0. \tag{6}$$

L'énergie du champ gravitationnel étant donnée par l'expression

$$G^{\nu}_{\mu} = (1/4\pi)\,\eta(- R^{\nu}_{\mu} + (1/2)\, g^{\nu}_{\mu} R) \tag{7}$$

où R^{ν}_{μ} est le tenseur de Riemann-Christoffel et η un coefficient à déterminer.

Nous devons donc identifier G^{ν}_{μ} avec U^{ν}_{μ}. Comme on a $U = 0$, cela entraîne

$$R = 0. \tag{8}$$

Cette relation signifie que l'espace, dans un champ de gravitation pur, est dénué de déformation totale, ou si l'on préfère l'expression usitée, dénué de courbure totale. L'identification de G^{ν}_{μ} à U^{ν}_{μ} nous laisse alors la relation

$$U^{\nu}_{\mu} = (- 1/4\pi)\,\eta R^{\nu}_{\mu}. \tag{9}$$

L'équation (6), $U^{\nu}_{\mu,\nu} = 0$, entraîne donc

$$R^{\mu,\nu}_{\nu} = 0 \tag{10}$$

c'est-à-dire les identités de Bianchi.

Les tableaux des composantes de F^{ν}_{μ}, $F_{\mu\nu}$ et $F^{\mu\nu}$ sont donnés ci-dessous, où on a désigné les diverses composantes par les lettres suivantes :

$$\begin{aligned} &P_1 = F^4_1 = - \partial \Phi^4 / \partial x^1 \quad Q_1 = F^3_1 = - \partial \Phi^3 / \partial x^1 \\ &P_2 = F^4_2 = - \partial \Phi^4 / \partial x^2 \quad Q_2 = F^3_2 = - \partial \Phi^3 / \partial x^2 \\ &P_3 = F^4_3 = - \partial \Phi^3 / \partial x^4. \end{aligned} \tag{11}$$

Par un choix convenable des axes, seule la composante Φ^3 du potentiel vecteur a été retenue. L'élément de ligne a été écrit sous la forme suivante :

$$ds^2 = - A\, dx_1^2 - B\, dx_2^2 - C\, dx_3^2 + D\, dt^2 \tag{12}$$

F^{ν}_{μ}

0	0	$Q_1 = -\dfrac{\partial \Phi^3}{\partial x^1}$	$P_1 = -\dfrac{\partial \Phi^4}{\partial x^1}$
0	0	$Q_2 = -\dfrac{\partial \Phi^3}{\partial x^2}$	$P_2 = -\dfrac{\partial \Phi^4}{\partial x^2}$
$-Q_1$	$-Q_2$	0	$P_3 = -\dfrac{\partial \Phi^3}{\partial x^4}$
$-P_1$	$-P_2$	$-P_3$	0

(13)

$F_{\mu\nu}$

0	0	$-CQ_1$	DP_1
0	0	$-CQ_2$	DP_2
CQ_1	CQ_2	0	$-CP_3$
$-DP_1$	$-DP_2$	CP_3	0

(14)

$F\mu\nu$

0	0	$-\dfrac{Q_1}{A}$	$-\dfrac{P_1}{A}$
0	0	$-\dfrac{Q_2}{B}$	$-\dfrac{P_2}{B}$
$\dfrac{Q_1}{A}$	$\dfrac{Q_2}{B}$	0	$-\dfrac{P_3}{D}$
$\dfrac{P_1}{A}$	$\dfrac{P_2}{B}$	$-\dfrac{P_3}{D}$	0

(15)

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01957001805032300

Pour former le tableau de U_μ^ν nous calculons $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2[-(D/A) P_1^2 - (D/B) P_2^2 - (C/D) P_3^2 + (C/A) Q_1^2 + (C/B) Q_1^2] \quad (16)$$

de sorte que nous obtenons pour U_μ^ν le tableau suivant :

$$2\pi U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{D}{A}P_1^2 - \frac{D}{B}P_2^2 - \frac{C}{D}P_3^2 - \frac{C}{A}Q_1^2 + \frac{C}{B}Q_2^2\right) & -\frac{D}{B}P_1P_2 - \frac{C}{B}Q_1Q_2 & P_1P_3 & \frac{C}{D}P_3Q_2 \\ -\frac{D}{A}P_1P_2 - \frac{C}{A}Q_1Q_2 & \frac{1}{2}\left(-\frac{D}{A}P_1^2 + \frac{D}{B}P_2^2 - \frac{C}{D}P_3^2 + \frac{C}{A}Q_1^2 - \frac{C}{B}Q_2^2\right) & P_2P_3 & -\frac{C}{D}P_3Q_1 \\ \frac{C}{A}P_1P_3 & \frac{C}{B}P_2P_3 & \frac{1}{2}\left(-\frac{D}{A}P_1^2 - \frac{D}{B}P_2^2 + \frac{C}{D}P_3^2 - \frac{C}{A}Q_1^2 - \frac{C}{B}Q_2^2\right) & \frac{C}{A}P_1Q_2 - \frac{C}{B}P_2Q_1 \\ -\frac{C}{A}P_3Q_2 & \frac{C}{B}P_3Q_1 & -\frac{D}{A}P_1Q_2 + \frac{D}{B}P_2Q_1 & \frac{1}{2}\left(\frac{D}{A}P_1^2 + \frac{D}{B}P_2^2 + \frac{C}{D}P_3^2 + \frac{C}{A}Q_1^2 + \frac{C}{B}Q_2^2\right). \end{pmatrix} \quad (17)$$

Pour calculer les valeurs de U_μ^ν dans le cas de la gravitation, nous remarquons que dans l'état statique Φ est indépendant du temps et par suite $P_3 = 0$. Si on suppose d'abord que $\Phi^3 = 0$, et de plus que Φ^4 ne dépende que de r, on obtient en prenant pour coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4 les coordonnées polaires r, θ, φ et le temps t, la relation :

$$U_1^1 = -U_2^2 = -U_3^3 = U_4^4 = (1/4\pi)(D/A) P_1^2 \quad (18)$$

Nous cherchons à déterminer la forme du potentiel de gravitation. Nous remarquons qu'il est défini par la relation (9), $R = 0$, jointe aux égalités (18), qui par suite des identités (9) deviennent

$$R_1^1 = -R_2^2 = -R_3^3 = R_4^4 = -(D/\eta A) P_1^2. \quad (19)$$

Les relations définissant les R_μ^ν étant

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\log\sqrt{-g} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\sqrt{-g} \quad (20)$$

on obtient pour les R_μ^ν, en mettant ds^2 sous la forme

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^\nu dt^2 \quad (21)$$

et en tenant compte des valeurs de $g^{\mu\nu}$ qui sont $g^{11} = -e^{-\lambda}$, $g^{22} = -r^{-2}$, $g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta$, $g^{44} = e^{-\nu}$, les expressions suivantes [6]

$$\begin{aligned} R_1^1 &= e^{-\lambda}[-(1/2)\nu'' + (1/4)\lambda'\nu' - (1/4)\nu'^2 + (\lambda'/r)] \\ R_2^2 &= -(1/r^2)\{e^{-\lambda}[1 + (1/2) r(\nu' - \lambda')] - 1\} \\ R_3^3 &= R_2^2 \\ R_4^4 &= e^{-\lambda}[-(1/2)\nu'' + (1/4)\lambda'\nu' - (1/4)\nu'^2 - \nu'/r], \end{aligned} \quad (22)$$

L'égalité $R_1^1 = R_4^4$ donnée par (19) entraîne ici

$$\lambda' = -\nu'. \quad (23)$$

En portant cette valeur de λ' dans l'expression de R qui est

$$R = R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + R_4^4 \quad (24)$$

on obtient, puisque R est nul

$$R = -e^{-\lambda}\left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{4\nu'}{r} + \frac{2}{r^2}\right) = 0. \quad (25)$$

Nous demandons qu'à l'infini, c'est-à-dire très loin de la particule, l'élément de ligne redevienne galiléen, ce qui exige que pour $r \to \infty$, on ait $e^\lambda \to 1$ et $e^\nu \to c^2$, c'est-à-dire que la solution de (23) est $\lambda = -\nu + 2\log c$. Par suite l'expression (25) devient en posant $e^\nu = c^2\gamma$ et par conséquent $e^\lambda = 1/\gamma$

$$\gamma'' + (4\gamma'/r) + (2(\gamma - 1)/r^2) = 0. \quad (26)$$

Cette équation différentielle a pour solution

$$\gamma = 1 + (C_1/r) + (C_2/r^2) \quad (27)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Nous déterminons C_2 en utilisant l'égalité des deux expressions de R_4^4 données par (19) et (22), qui s'écrivent en remplaçant $e^{-\lambda}$ par γ et ν' par γ'/γ

$$R_4^4 = -(1/\eta)(D/A) P_1^2$$

et
$$R_4^4 = -(1/2)\gamma'' - (\gamma'/r) = -C_2/r^4 \quad (28)$$

et comme $D = e^{\nu} = c^2\gamma$ et $A = e^{\lambda} = 1/\gamma$, on a

$$(1/\eta)\, c^2 \gamma^2 P_1^2 = C^2/r^4. \quad (29)$$

Aux grandes distances, P_1 est newtonien et égal à $-\sqrt{K}m/r^2$, où K est la constante de la gravitation égale à $6{,}67 \times 10^{-8}$, et γ tend vers l'unité ; de plus (27) montre que C_2 a pour dimensions le carré d'une longueur ; or Km/C^2 a les dimensions d'une longueur, donc η doit avoir les dimensions de c^6/K, c'est-à-dire celles d'une force multipliée par le carré d'une vitesse, Fc^2. Nous obtenons donc finalement

$$C_2 = K^2 m^2/c^4 \quad (30)$$

$$\eta = c^6/K \quad (31)$$

$$P_1 = -\sqrt{K}m/8r^2. \quad (32)$$

Pour obtenir la valeur de C_1, nous remarquons que le potentiel Φ^4 dont dérive P_1 est défini par :

$$P_1 = -\,\mathrm{d}\Phi^4/\mathrm{d}r = -\sqrt{K}m/\gamma r^2$$
$$= -\sqrt{K}m/(r^2 + C_1 r + K^2 m^2/c^4)$$

et la solution la plus simple s'obtient pour $C_1 = 2Km/C^2$, donnant

$$P_1 = -\sqrt{K}m/(r + Km/c^2)^2 \quad (33)$$

$$\Phi^4 = -\sqrt{K}m/(r + Km/c^2) \quad (34)$$

$$\gamma = (1 + Km/c^2 r)^2. \quad (35)$$

On remarque que lorsque $r \to 0$ le potentiel tend vers une valeur finie. La valeur numérique de K/C^2 est $0{,}741 \times 10^{-28}$.

2. **Énergie du champ gravitationnel.** — La densité d'énergie du champ gravitationnel est donnée par

$$U^{44} = G^{44} = -(1/4\pi)\,\eta R^{44} = -(1/4\pi)\,\eta g^{44} R_4^4$$
$$= (1/4\pi)\,(c^6/K)\,(1/c^2\gamma)$$
$$\cdot (K^2 m^2/c^4 r^4) = (1/4\pi)\, Km^2/\gamma r^4$$
$$= (1/4\pi)\,[Km^2/r^2(r + Km/c^2)^2]. \quad (36)$$

En intégrant cette densité d'énergie dans l'espace entier, on obtient l'énergie totale d'une particule :

$$W = \iiint G^{44}\,\mathrm{d}v = mc^2. \quad (37)$$

La plus grande partie de l'énergie est concentrée au voisinage du centre de la particule. Pour un neutron par exemple, moins de 10^{-10} de l'énergie se trouve distribuée en dehors de la sphère de rayon 10^{-42} cm.

3. **Champ de torsion.** — Pour trouver la forme du potentiel vecteur Φ^3, nous cherchons dans le tableau (17) donnant l'énergie, les termes de U_4^4 qui correspondent à la torsion ; ce sont $(C/A)\,Q_1^2$ et $(C/B)\,Q_2^2$. En multipliant par g^{44} pour avoir la forme covariante, nous écrivons :

$$T^{44} = (1/4\pi)\,[(CQ_1^2/AD) + (CQ_2^2/BD)] \quad (38)$$
$$= (1/4\pi)\,[r^2 \sin^2\gamma Q_1^2 + \sin^2\gamma\, Q_2^2/(1 + Km/c^2 r)^2].$$

Il faut que les deux termes dans le crochet aient mêmes dimensions ; on peut obtenir ce résultat en prenant pour le potentiel Φ^3 l'expression

$$\Phi^3 = \frac{\beta \cos\theta}{(r + Km/c^2)^2} \quad (39)$$

où β est une constante à déterminer. On a alors pour Q_1 et Q_2

$$Q_1 = -\,\partial\Phi^3/\partial r = 2\beta\cos\theta/(r + Km/c^2)^3 \quad (40)$$

$$Q_2 = -\,\partial\Phi^3/\partial\theta = \beta\sin\theta/(r + Km/c^2)^2 \quad (41)$$

et

$$T^{44} = (1/4\pi)\,[\beta^2 r^2 \sin^2\theta/(r + Km/c^2)^6]$$
$$(4\cos^2\theta + \sin^2\theta). \quad (42)$$

L'énergie comprise dans l'espace entier est

$$\iiint T^{44}\,\mathrm{d}v = (16/75)\,\beta^2/(Km/c^2). \quad (43)$$

On remarque que l'énergie totale due à la torsion est inversement proportionnelle à la masse de la particule, comme ce qui se passe pour le spin.

On remarque dans l'expression (42) de la densité d'énergie, que pour $\theta = 0$, $T^{44} = 0$, c'est-à-dire que tout le long de l'axe de torsion, la densité d'énergie est nulle. Le maximum de la densité se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe de torsion et il y a un maximum de densité en fonction de la distance pour $r = (1/2)\,(Km/c^2)$.

On remarque d'après (43) que β a les dimensions d'une masse magnétique.

4. **Champ électrique.** — Comme le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire, ce potentiel doit faire partie de Φ^4, que nous écrirons maintenant en deux parties :

$$\Phi^4 = \Phi_g^4 + \Phi_e^4 \quad (44)$$

Φ_g^4 désignant le potentiel de gravitation et Φ_e^4 le potentiel électrique. Le champ sera

$$-\,(\mathrm{d}\Phi^4/\mathrm{d}r) = -\,(\mathrm{d}\Phi_g^4/\mathrm{d}r) - (\mathrm{d}\Phi_e^4/\mathrm{d}r) \quad (45)$$

soit

$$P_1 = P + E \quad (46)$$

où $P = -\,\mathrm{d}\Phi_g^4/\mathrm{d}r$ est le champ gravitationnel et $E = -\,\mathrm{d}\Phi_e^4/\mathrm{d}r$ le champ électrique.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de champ gravitationnel, c'est-à-dire que $P = 0$. Pour trouver la forme du champ électrique, nous avons deux conditions qui devront être satisfaites. La première est que la densité de charge électrique intégrée sur l'espace entier donne la charge de la particule ; la deuxième est que la densité d'énergie intégrée sur l'espace entier donne la masse de la particule électrique.

La densité de charge est donnée par

$$J^\mu = (1/4\pi)\, F^{\mu\nu} = (1/4\pi\sqrt{-g})\, \partial(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})/\partial x^\nu \quad (47)$$

ce qui donne

$$J^4 = (1/4\pi r^2)\, \partial(Er^2)/\partial r. \quad (48)$$

L'intégrale étendue à l'espace entier est

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\partial}{\partial r}(Er)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = [Er^2]_0^\infty.$$

La forme

$$E = e/(r + e^2/\alpha)^2 \quad (49)$$

où α est une constante à déterminer, donne pour l'intégrale la valeur e.

La densité d'énergie est $(1/4\pi)\, E^2$, et l'intégrale étendue à l'espace entier a pour valeur $W = \alpha/3$. Comme ceci doit être égal à mc^2, on voit que

$$\alpha = 3mc^2. \quad (50)$$

La longueur $e^2/3mc^2$ est égale à $0{,}94 \times 10^{-13}$ cm.

Si maintenant on considère le cas d'une charge électrique superposée à une masse gravitationnelle M, l'équation (46) donne pour la densité d'énergie

$$U^{44} = (1/4\pi)\,(P_1^2/A) = (1/4\pi)\,\gamma(P + E)^2 = (1/4\pi)\,\gamma(P^2 + 2PE + R^2) \quad (51)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{KM}{c^2 r}\right)^2 \left[\frac{Km^2}{(r + KM/c^2)^4} + 2\frac{\sqrt{K}\, me}{(r + KM/c^2)^2\,(r + e^2/\alpha)^2} + \frac{e^2}{(r + e^2/\alpha)^4}\right].$$

L'intégrale du premier terme dans le crochet donne la masse gravitationnelle M ; celle du troisième terme donne la masse de la charge électrique et est égale à

$$(\alpha/3)\,[1 + (KM\alpha/c^2 e^2) + K^2 M^2 \alpha^2/c^4 e^4]\ ; \quad (52)$$

l'intégrale du second terme du crochet donne l'énergie de liaison de la charge et de la masse gravitationnelle M ; elle est égale à

$$2\sqrt{K}\, M\alpha/e \quad (53)$$

et dépend par suite du signe de la charge. On remarque que la force entre deux charges ne peut dépasser $(e/10^{-13})^2$, même aux distances inférieures à 10^{-13} cm. De même la force entre deux masses gravitationnelles a pour maximum $KM^2/(10^{-52})^2$ même aux distances inférieures à 10^{-52} cm.

5. **Propagation des ondes.** — Dans l'équation des ondes électromagnétiques

$$g^{\alpha\beta}(\Phi_\mu)_{\alpha\beta} = J_\mu - R_\mu^\alpha\, \Phi_\alpha \quad (54)$$

on peut, dans des régions de l'espace éloignées des centres des particules de l'Univers, négliger la densité de charge J_μ. Comme la région considérée est étoffée par les densités de masse réparties de toutes les particules de l'Univers, si une particule M isolée, que nous supposerons pour le moment non chargée se meut dans cette région, le fluide de masse de cette particule, agissant sur le fluide de masse sous-jacent de la région, y produira comme on le démontre [5], des ondes se propageant à la vitesse propre au milieu, qui est ici c.

Si en première approximation, la région est considérée comme galiléenne, $R_\mu^\alpha = 0$, et l'équation des ondes devient simplement

$$\Box\Phi = 0 \quad (55)$$

dont une solution est [1, 2, 3, 4]

$$\Phi = (A/r)\sin\nu(r + ct) \quad (56)$$

où ν est le nombre d'ondes.

Bien que cette solution, remplacée dans l'équation (55) donne l'équation de Schrödinger

$$\Delta\Phi + \nu^2\,\Phi = \Delta\Phi + 4\pi^2 m^2 v^2\,\Phi/h^2 = 0 \quad (57)$$

elle n'est cependant pas suffisante pour deux raisons. D'abord, au voisinage de la particule M, $R_\mu^\alpha \neq 0$, et c'est précisément là que les densités d'énergie sont les plus grandes ; or l'action de l'onde sur la particule, qui est une action dirigeante, dépend des densités d'énergie de l'onde au voisinage de la particule. Pour cette raison nous devrons conserver dans l'équation des ondes (54) le terme $R_\mu^\alpha\,\Phi^\alpha$. D'autre part, l'énergie de l'onde, intégrée dans l'espace entier, devra être égale à l'énergie cinétique de la particule en mouvement ; mais la solution (56) ne suffit pas pour permettre de calculer cette intégrale. Pour ces raisons l'équation d'ondes à résoudre devra être, pour une particule non chargée en mouvement dans une région éloignée des autres particules de l'Univers

$$g^{\alpha\beta}(\Phi_\mu)_{\alpha\beta} = -R_\mu^\alpha\,\Phi_\alpha \quad (58)$$

où R_4^4 est ici égale à $-K^2 M^2/c^4 r^4$ à très peu près, en négligeant la densité d'énergie ambiante devant celle due à la particule M.

Dans le cas où la particule en mouvement est un électron, il faudra évidemment conserver J_μ, qui comporte des dérivées secondes de Φ.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1956.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hessaby (M.), Essai d'interprétation des ondes de de Broglie, Publ. Un. Tehran.

[2] Hessaby (M.), A Strain Theory of Matter, Publ. Un. Tehran.

[3] Hessaby (M.), Report on Conf. Elementary Particles, Cambridge, 1946.

[4] Hessaby (M.), Continuous Particles, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **33**, 6, 189-194.

[5] Lamb, Hydrodynamics, p. 401.

[6] Eddington, Mathematical Theory of Relativity, 1930, p. 82 et 185.