



**HAL**  
open science

# **Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés - III. L'opérateur de collision dans le cas du gaz de Lorentz imparfait**

Michel Bayet, Jean-Loup Delcroix, Jean-François Denisse

► **To cite this version:**

Michel Bayet, Jean-Loup Delcroix, Jean-François Denisse. Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés - III. L'opérateur de collision dans le cas du gaz de Lorentz imparfait. *Journal de Physique et le Radium*, 1956, 17 (11), pp.923-930. 10.1051/jphysrad:019560017011092300 . jpa-00235582

**HAL Id: jpa-00235582**

**<https://hal.science/jpa-00235582v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÉORIE CINÉTIQUE DES PLASMAS HOMOGÈNES FAIBLEMENT IONISÉS

## III. L'opérateur de collision dans le cas du gaz de Lorentz imparfait.

Par MICHEL BAYET,

Faculté des Sciences, Toulouse.

JEAN-LOUP DELCROIX,

École Normale Supérieure, Laboratoire de Physique, Paris.

et JEAN-FRANÇOIS DENISSE,

Observatoire de Paris, Section d'Astrophysique.

**Sommaire.** — On poursuit l'étude entreprise précédemment [1], [2], en tenant compte, au premier ordre en  $m/M$ , des échanges d'énergie entre les électrons et les molécules (modèle du « gaz de Lorentz imparfait »).

Les nouveaux termes ainsi introduits ont une action négligeable sur la relaxation des anisotropies, mais déterminent la forme de la partie isotrope de la fonction de distribution des vitesses électroniques  $f(v)$ . On définit alors les fonctions propres du nouvel opérateur de collision  $J(f)$  relatif à une fonction isotrope, et on donne la méthode de calcul de ces fonctions et des valeurs propres associées.

L'application de ces résultats à l'étude de la partie isotrope de la fonction  $f$  fait l'objet de l'article IV.

**I. Généralités.** — Dans deux articles précédents, [1], [2], nous avons développé de façon approfondie une théorie des plasmas homogènes faiblement ionisés, basée sur le modèle dit du gaz de Lorentz parfait. Dans ce modèle, on suppose que la masse  $m$  des électrons est infiniment petite devant la masse  $M$  des molécules, et, de ce fait, on néglige tous les termes contenant le rapport  $\frac{m}{M}$ .

On néglige notamment les échanges d'énergie entre les électrons et les molécules lors des chocs élastiques. Dans ces conditions, si un champ électrique fournit chaque seconde aux électrons une énergie  $P$ , le gaz d'électrons va s'échauffer continuellement puisqu'on n'a prévu aucun mécanisme de perte d'énergie, et il est donc impossible d'atteindre un état d'équilibre. Il est certain que ceci est contraire à l'expérience. De plus, il résulte de cette théorie qu'au bout d'un certain temps, la fonction de distribution des vitesses électroniques est profondément modifiée de sorte qu'on ne peut plus considérer l'action du champ électrique comme une perturbation faible et que la méthode de résolution de l'équation de Boltzmann que nous avons utilisée tombe en défaut.

En fait, les électrons perdent de l'énergie : par choc élastique sur les molécules de gaz ; par choc inélastique avec excitation ou ionisation de ces molécules ; par rayonnement électromagnétique.

Il est certain que c'est le premier de ces trois phénomènes qui est le plus important si l'on se borne à l'étude des gaz pas trop chauds (10 000 °K par exemple). C'est d'ailleurs le moins difficile à étudier de façon quantitative ; en effet, l'influence des chocs élastiques peut être décrite sans faire

intervenir d'autre propriété particulière du gaz considéré que la masse de ses molécules et la loi de force électron-molécule.

C'est pourquoi, dans ce troisième article, nous étudierons de façon approfondie les phénomènes dus aux chocs élastiques en négligeant les autres causes de perte d'énergie. Cette étude sera faite de façon classique en supposant que l'interaction électron-molécule est décrite par une loi de force centrale. Le but de cette théorie est essentiellement de répondre aux deux questions suivantes :

1) Les chocs élastiques sont-ils toujours suffisants pour permettre un état d'équilibre quelles que soient la loi de force considérée et l'intensité du champ électrique appliqué ?

2) Quand il y a équilibre, quelles sont les lois que suivent cet équilibre : « Température électronique » d'équilibre ? Fréquences de relaxation ?

## II. Principes généraux de l'étude des chocs élastiques dans le modèle de Lorentz imparfait.

— Le rapport  $\frac{m}{M}$  étant maintenant supposé petit, mais non nul (gaz de Lorentz imparfait), l'intégrale des chocs  $J$  n'a plus les propriétés remarquablement simples que nous avons trouvées dans le cas du gaz de Lorentz parfait et qui se traduisaient par les formules :

$$J(a) = 0 \quad (1)$$

$$J(aC_{1m}) = -a v_1 C_{1m} \quad (2)$$

$$J(aS_{1m}) = -a v_1 S_{1m} \quad (3)$$

$a$  étant une fonction isotrope quelconque de la vitesse.

Nous devons maintenant exprimer cette intégrale au moyen de la formule générale :

$$J(f) = \iiint \iiint (f'F' - fF)g \, p \, dp \, d\varepsilon \, dV. \quad (4)$$

Le calcul nécessite donc la connaissance de la fonction de distribution  $F(\vec{V})$  des vitesses des molécules. Nous supposons que  $F$  est isotrope et maxwellienne à la température  $T$ .

$$F(\vec{V}) = N \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp. \left( -\frac{MV^2}{2kT} \right). \quad (5)$$

Ceci veut dire que le gaz des molécules est pratiquement en équilibre thermodynamique à la température  $T$ , c'est-à-dire que la puissance transmise des électrons aux molécules, puis des molécules à une source extérieure de température  $T$  est relativement faible. Ceci n'impose pas que les électrons soient aussi à la température  $T$  parce que, d'une part, leur nombre est faible; d'autre part, l'échange d'énergie entre les électrons et les molécules se fait mal.

Il est évident que le calcul approché de  $J$ , fait en supposant que  $\frac{m}{M}$  est petit mais non nul, va conduire à des termes correctifs en  $\frac{m}{M}$  dans les formules (1), (2) et (3) et donnera :

$$J(a) = O_1 \left( \frac{m}{M} \right) \quad (6)$$

$$J(aC_{1m}) = -a v_1 C_{1m} \left[ 1 + O_2 \left( \frac{m}{M} \right) \right], \quad l > 0 \quad (7)$$

$$J(aS_{1m}) = -a v_1 S_{1m} \left[ 1 + O_3 \left( \frac{m}{M} \right) \right], \quad l > 0. \quad (8)$$

$O_1, O_2, O_3$  étant trois termes correctifs infiniment petits avec  $\frac{m}{M}$ , on voit que pour les fonctions sphériques anisotropes la correction est faible en valeur relative tandis que pour les fonctions isotropes, elle est fondamentale du fait que pour ces fonctions, on a

$$J(a) = 0 \text{ pour } \frac{m}{M} = 0.$$

Il paraît donc raisonnable, et c'est ce que nous ferons, de négliger  $O_2$  et  $O_3$  et de ne tenir compte que de  $O_1$ . Physiquement, cela revient à admettre que la relaxation des anisotropies s'opère de la même façon, que  $\frac{m}{M}$  soit nul ou simplement très petit, et que la seule modification que nous introduisons concerne l'évolution de la partie isotrope de la fonction de distribution.

L'expression de  $J(a) = O_1$  peut se déduire de la valeur de l'intégrale  $\iiint J(a) \, dV$  donnée par Chapman et Cowling [3] :

On obtient par dérivation :

$$J(a) = \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v_1 v^3 \left( a + \frac{kT}{mv} \frac{\partial a}{\partial v} \right) \right]. \quad (9)$$

En fait, nous donnerons dans une publication ultérieure un calcul plus direct de cette formule. Dans la parenthèse qui y figure, le premier terme existerait seul si les molécules, tout en étant de masse finie étaient immobiles avant le choc, le deuxième terme tient compte de leur agitation thermique.

On peut maintenant former le système d'équations aux dérivées partielles équivalent à l'équation de Boltzmann de la même façon que précédemment mais tout en tenant compte de la formule (9). Si on néglige comme nous l'avons dit les termes correctifs tels que  $O_2$  et  $O_3$ , on voit que les seules équations modifiées sont les équations (28), (40), (68) de nos articles précédents [1], [2], relatives aux termes isotropes qui s'écrivent maintenant :

$$\dot{a}_{00} = J(a_{00}) \quad (10)$$

$$\dot{b}_{00} = J(b_{00}) \quad (11)$$

$$\dot{c}_{00} = D_{00} - 2\omega E_{00} \sin 2\omega t + 2\omega F_{00} \cos 2\omega t + J(c_{00}). \quad (12)$$

Pour étudier ces équations aux dérivées partielles il semble indiqué d'utiliser encore la méthode qui consiste à rechercher les fonctions et les valeurs propres de l'opérateur  $J$ , lequel n'est cette fois défini au moyen de la formule (9) que sur l'espace des fonctions isotropes. Une méthode analogue a d'ailleurs été également indiquée par Holstein [4] à propos de la résolution de l'équation de Boltzmann.

Nous montrerons que dans les cas les plus courants ces fonctions propres forment une suite discrète constituant une base complète et que les valeurs propres correspondantes ( $-\lambda_i$ ) sont toutes négatives sauf la première d'entre elles  $\lambda_0$  qui est nulle; la fonction propre associée à  $\lambda_0$  est la fonction maxwellienne. Par suite, étant donné une distribution isotrope quelconque, on pourra l'analyser en la décomposant suivant la base des fonctions propres, c'est-à-dire en une série comprenant un premier terme maxwellien et une série de fonctions non maxwelliennes. A chacun de ces écarts à la distribution maxwellienne correspond une loi de relaxation en  $e^{-\lambda_i t}$ ; cette méthode permet donc d'étudier l'évolution dans le temps d'une distribution quelconque et de prévoir en l'absence de champ comment elle tend vers la distribution maxwellienne. De façon générale, on montrera que cette évolution dépend fortement de la forme de l'interaction entre les électrons et molécules.

En présence d'un champ électrique, nous développerons chacune des fonctions  $a_{00}, b_{00}, c_{00}, D_{00}, E_{00}$  en série de fonctions propres et nous remplacerons ainsi chacune des équations (10), (11), (12)

par une suite infinie d'équations différentielles ordinaires par rapport au temps. La solution de ce système décrit complètement le comportement de la fonction de distribution des électrons en présence de champ électrique.

**III. Étude du nouvel opérateur  $J$ ; Valeurs propres, fonctions propres.** — L'équation aux valeurs propres du nouvel opérateur de collision s'écrit en appelant  $y$  les fonctions propres et  $-\lambda$  les valeurs propres :

$$J(y) = -\lambda y. \tag{13}$$

Soit d'après (9) :

$$\frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ v_1 v^3 \left( y + \frac{kT}{mv} \frac{dy}{dv} \right) \right] + \lambda y = 0. \tag{14}$$

Pour mettre l'équation sous une forme canonique avec une variable sans dimension, faisons les changements de variable et de paramètre :

$$v = v_0 u \quad v_0^2 = \frac{2kT}{m} \tag{15}$$

$$\lambda = \mu \frac{m}{M}. \tag{16}$$

Il vient :

$$\frac{d}{du} \left[ v_1 u^3 \left( y + \frac{1}{2u} \frac{dy}{du} \right) \right] + \mu u^2 y = 0 \tag{17}$$

ou

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \left( 2u + \frac{2}{u} + \frac{d}{du} \text{Log } v_1 \right) \frac{dy}{du} + \left( 6 + 2u \frac{d}{du} \text{Log } v_1 + \frac{2\mu}{v_1} \right) y = 0. \tag{18}$$

On remarque tout d'abord que la forme de cette équation ne dépend plus que de la fonction  $v_1(u)$  ; elle ne dépend pas de  $\frac{m}{M}$  ; il en résulte que les valeurs propres initiales  $\lambda$  sont proportionnelles à  $\frac{m}{M}$ .

Ceci dit, pour définir des fonctions propres et des valeurs propres, il nous faut imposer à  $y$  dans (18) des conditions aux limites surabondantes. L'intervalle d'intégration s'étendant de  $u = 0$  à  $u = \infty$  qui sont deux points singuliers, la discussion dépendra essentiellement de la forme que prendra la fonction  $v_1(u)$  pour  $u \rightarrow 0$  et  $u \rightarrow \infty$  ; on sait [5] que si on admet entre les électrons et les molécules une loi de force centrale en  $\frac{1}{r^s}$  depuis  $r = 0$  jusqu'à  $r \rightarrow \infty$ , on trouve une expression de  $v_1$  :

$$v_1 = v_0 u^n \tag{19}$$

$v_0$  étant une constante et l'exposant  $n$  dépendant de  $s$  selon la relation

$$n = \frac{s-5}{s-1} \tag{20}$$

les valeurs correspondantes remarquables de  $n$  et  $s$  sont représentées dans le tableau I :

TABLEAU I

$s$	1	2	3	5	$+\infty$
$n$	$-\infty$	-3	-1	0	1

En fait, on ne peut pas admettre que la loi de force ait une expression aussi simple dans tout le domaine de  $r = 0$  à  $r = \infty$  et il en résulte une expression de  $v_1$  en fonction de  $u$  certainement plus complexe que celle représentée par la formule (19).

Pour analyser d'un peu plus près les phénomènes de façon générale, on peut énoncer les deux règles suivantes :

I) L'EXPRESSION DE  $v_1$  AU VOISINAGE DE  $u = 0$  est déterminée par la forme de la force d'interaction à très grande distance.

Cette règle tombe en défaut dans le seul cas où la force d'interaction est constamment attractive (interaction électrons-ions positifs par exemple) ; elle est satisfaite dans tous les autres cas car les électrons de faible vitesse ne pénètrent jamais dans les régions de potentiel même faiblement répulsif.

II) L'EXPRESSION DE  $v_1$  AU VOISINAGE DE  $u = \infty$  se détermine par la forme de la force d'interaction à très courte distance sauf quand la force d'interaction à grande distance dérive d'un potentiel coulombien ou d'un potentiel à variation encore plus lente ( $s \leq 2$ ). Cette proposition est démontrée en appendice.

Dans le cas de l'interaction à grande distance, la force électron-molécule est en général due au dipôle induit et correspond à  $s = 5$ . On pourrait aussi envisager le cas  $s = 3$  (molécules ayant un moment permanent). Mais on doit exclure le cas  $s \leq 2$  (en particulier molécules ionisées) ; nous référant au tableau de correspondance entre  $n$  et  $p$  nous ferons l'hypothèse générale au voisinage de  $u = 0$

$$v_1 \sim v_0' u^{n'} \text{ quand } u \rightarrow 0 \text{ avec } -3 < n' \leq 0. \tag{21}$$

Le cas de l'interaction à courte distance est plus difficile à étudier de façon générale ; c'est d'ailleurs la région où une théorie purement classique est en défaut ; on sait toutefois que dans cette région la force est à variation rapide ; nous reportant à nouveau au tableau de correspondance entre  $n$  et  $p$ , nous ferons alors une deuxième hypothèse :

$$v_1 \sim v_0'' u^{n''} \text{ quand } u \rightarrow \infty \text{ avec } 0 \leq n'' \leq 1. \tag{22}$$

\*  
\* \*

Nous pouvons maintenant étudier les deux points singuliers de l'équation (18). Tout d'abord au voisinage de  $u = 0$ , nous pouvons écrire (18) sous la forme :

$$\frac{d^2y}{du^2} + P \frac{dy}{du} + Qy = 0 \tag{23}$$

avec

$$P = \frac{n' + 2}{u} + 2u$$

$$Q = 6 + 2n' + \frac{2\mu}{v_0 u^{n'}}$$

Nous pouvons dans  $Q$  négliger le terme  $\frac{2\mu}{v_0 u^{n'}}$  devant  $6 + 2n'$  sauf quand  $n' = 0$ ; ceci est d'ailleurs mathématiquement nécessaire car quand  $n'$  n'est pas entier, ce terme introduit de graves complications analytiques. En effet,  $Q$  n'est alors pas développable en série au voisinage de  $u = 0$ ; remplaçons donc  $Q$  par l'expression approchée :

$$Q = 6 + 2n' \text{ pour } -3 < n' < 0.$$

Quand  $n' = 0$ , nous garderons l'expression complète de  $Q$ .

Dans les deux cas, nous sommes amenés à discuter une singularité régulière par la méthode de Fuchs; l'équation aux indices est :

$$r^2 + (n' + 1)r = 0$$

dont les racines sont :

$$r' = 0, \quad r'' = -(n' + 1).$$

Il convient de faire une discussion suivant les valeurs de  $n'$ .

Cette discussion étant fastidieuse, nous la résumerons dans le tableau II avec les notations suivantes :

$r_I$  plus grande racine de l'équation aux indices,  
 $r_{II}$  plus petite racine de l'équation aux indices,  
 $y_I = u^{r_I}(a_0 + a_1u + \dots)$  intégrale de (23) correspondant à  $r_I$ ,  
 $y_{II}$  deuxième intégrale de (23) indépendante de  $y_I$ ; on sait que quand  $r_I - r_{II}$  n'est pas entier,  $y_{II}$  s'obtient à partir de  $r_{II}$  de même la façon que  $y_I$ ; tandis que si  $r_I - r_{II}$  est entier, on obtient en général  $y_{II}$  par une méthode de variation des constantes à partir de  $y_I$  sous la forme

$$y_{II} = y_I \int \frac{e^{-\int P du}}{y_I^2} du. \tag{24}$$

Nous désignerons enfin par  $0(y_I)$  et  $0(y_{II})$  des quantités équivalentes à  $y_I$  et  $y_{II}$  au voisinage de  $u = 0$ .

TABLEAU II

$\frac{n'}{u}$	$\frac{r_I}{u}$	$\frac{r_{II}}{u}$	$\frac{0(y_I)}{u}$	$\frac{0(y_{II})}{u}$
$n' = 0$	0	-1	1	$\frac{1}{u}$
$0 > n' > -1$	0	$-(n' + 1)$	1	$\frac{1}{u^{n'+1}}$
$n' = -1$	0	0	1	Log $u$
$-3 < n' < -1$	$-(n' + 1)$	0	$u^{-(n'+1)}$	1

Nous pouvons résumer ces résultats de la façon suivante :

— pour  $-1 \leq n' \leq 0$

$y_I$  est finie pour  $u = 0$

$y_{II}$  est infinie pour  $u = 0$ ;

— pour  $-3 < n' < -1$

$y_I$  et  $y_{II}$  sont toutes deux finies pour  $u = 0$ .

Pour définir des fonctions propres, nous imposerons donc la condition suivante :

$-1 \leq n' \leq 0$	$y$ reste finie pour $u = 0$
$-3 < n' < -1$	$\frac{dy}{du} = ky$ pour $u = 0$

$k$  constante choisie a priori pour chaque valeur de  $n'$ .

(25)

Dans les deux cas, la condition homogène choisie détermine  $y$  à un facteur près. Il suffira d'imposer une deuxième condition homogène pour  $u = \infty$  pour que les conditions soient surabondantes et définissent des valeurs propres et des fonctions propres.

Étudions donc maintenant ce qui se passe au voisinage de  $u = \infty$  et pour ceci, faisons d'abord le changement de variable :  $u = \frac{1}{t}$  ce qui ramène la singularité à l'origine, l'équation (18) devient :

$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d}{dt} \text{Log } v_1 - \frac{2}{t^3}\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{2\mu}{v_1 t^4} + \frac{6}{t^4} - \frac{2}{t^3} \frac{d}{dt} \text{Log } v_1\right) y = 0$
--

(26)

qu'on peut encore écrire :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P \frac{dy}{dt} + Qy = 0 \tag{27}$$

et compte tenu de l'hypothèse (22), on a :

$P = -\frac{2}{t^3} - \frac{n''}{t}$	(28)
$Q = \frac{6 + 2n''}{t^4} + \frac{2\mu}{v_0 t^{4-n''}}$	

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous remplacerons (27) par une équation approchée en

mettant  $Q$  sous la forme simplifiée

$$Q = \frac{6 + 2n''}{t^4} \quad 1 \geq n'' > 0.$$

Quand  $n'' = 0$ , nous gardons l'expression complète de  $Q$ .

Dans les deux cas,  $P$  est un infiment grand d'ordre  $\frac{1}{t^3}$  et  $Q$  d'ordre  $\frac{1}{t^4}$ ; d'après les règles générales relatives aux singularités des équations différentielles [6], on en conclut que l'une des deux intégrales de (26) est développable en série au voisinage de  $t = 0$  et que l'autre présente en ce point une singularité essentielle; on cherche donc la première solution sous la forme

$$y_I = t^r(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots).$$

En portant cette expression dans l'équation (27) simplifiée, on obtient une équation déterminante pour  $r$ ;  $r$  étant ainsi choisie on peut calculer les coefficients de  $y_I$  de proche en proche; ensuite  $y_{II}$  s'obtient par la formule (24) qui s'écrit ici :

$$y_{II} = y_I \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{t^2} t n''}}{y_I^2} dt. \quad (29)$$

Les résultats obtenus de cette façon sont résumés dans le tableau III :

TABLEAU III

$n''$	$r$	$0(y_I)$	$0(y_{II})$
$n'' = 0$	$\frac{\mu}{v_0} + 3$	$\frac{\mu}{t v_0^{\mu+3}} = \frac{1}{u v_0^{\mu+3}}$	$\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t v_0^{\mu}} = e^{-u^2} u \frac{\mu}{v_0^{\mu}}$
$0 < n'' \leq 1$	$n'' + 3$	$\frac{1}{t n''+3} = \frac{1}{u n''+3}$	$e^{-\frac{1}{t^2}} = e^{-u^2}$

Nous pouvons donc les énoncer de la façon suivante :

Quand  $u \rightarrow \infty$ ,  $y_I$  est équivalent à une certaine puissance de  $u$ ;  $y_{II}$  contient un facteur  $e^{-u^2}$ .

Or, il est facile de voir que des fonctions  $y$  ayant l'allure asymptotique de  $y_I$  ne peuvent être des fonctions de distribution réelles; elles donneraient en effet une valeur infinie à la valeur moyenne d'une certaine puissance de la vitesse. Nous imposerons donc à la fonction  $y$  au voisinage de  $u = \infty$  la condition suivante :

$$\begin{cases} n'' = 0 & y \sim e^{-u^2} u \frac{\mu}{v_0^{\mu}} \text{ quand } u \rightarrow \infty \\ 0 < n'' \leq 1 & y \sim e^{-u^2} \text{ quand } u \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (30)$$

\* \*

En conclusion, les fonctions propres et les valeurs propres sont définies par les conditions (25) et (30). Nous allons maintenant énoncer quelques règles générales les concernant :

1) La fonction  $y_0 = e^{-u^2}$  est toujours fonction propre avec la valeur propre zéro. — En effet, on peut voir que  $y_0$  est intégrale de l'équation (17) si on fait  $\mu = 0$  et par ailleurs  $y_0$  satisfait évidemment aux conditions (30) (en y faisant  $\mu = 0$ ) et (25) (en choisissant  $k = 0$  quand  $-3 < n' < -1$ ).

2) Toutes les autres valeurs propres sont positives. — En effet, on peut ramener l'équation aux valeurs propres (17) à une équation de Sturm-Liouville en y faisant le changement de fonction

$$y = \psi e^{-u^2} \quad (31)$$

il vient :

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{v_1 u^2}{2} e^{-u^2} \frac{d\psi}{du} \right] + \mu u^2 e^{-u^2} \psi = 0. \quad (32)$$

La fonction  $\psi_0 = 1$  qui correspond à  $y_0$  est fonction propre avec la valeur propre  $\mu_0 = 0$ ; elle ne possède aucun zéro dans l'intervalle de variation  $0 \dots \dots \dots + \infty$ ; il en résulte d'après les propriétés générales des équations de Sturm-Liouville [7] que  $\mu_0$  est la plus petite des valeurs propres; autrement dit, toutes les autres valeurs propres  $\mu_1$  sont positives.

3) Les valeurs propres forment un spectre discontinu. — Pour le voir, nous transformons l'équation (32) en une équation de Schrödinger à une dimension en faisant un nouveau changement de fonction et de variable en posant :

$$\psi = \left(\frac{v_1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} u^{-1} e^{\frac{u^2}{2}} \Phi \quad (33)$$

$$x = \int_0^u \left(\frac{v_1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} du. \quad (34)$$

On obtient après un calcul assez long mais direct que nous ne reproduisons pas :

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + [\mu - V] \Phi = 0 \quad (35)$$

avec

$$V = - \frac{\frac{d}{du} \left\{ \frac{v_1}{2} u^2 e^{-u^2} \frac{d}{du} \left[ \left(\frac{v_1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} u^{-1} e^{\frac{u^2}{2}} \right] \right\}}{\left(\frac{v_1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} (e^{-\frac{u^2}{2}})} \quad (36)$$

(35) est une équation de Schrödinger à une dimension (1);  $V$  est l'énergie potentielle de la particule correspondante. Pour discuter la nature du spectre, il nous faut connaître le comportement asymptotique de  $V$ . Pour l'obtenir, nous pouvons d'abord développer (36), il vient :

(1) Le changement de variable transformant l'équation de Sturm-Liouville en équation de Schrödinger à une dimension est indiqué par Morse et Feshbach (*loc. cit.*, p. 730) mais l'expression du potentiel que donnent ces auteurs est inexacte, ce qu'il nous prie de signaler.

$$V = -\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \cdot \left[ -\frac{1}{4} d \frac{\text{Log } \nu_1}{du} - \frac{1}{u} + u \right]$$

$$\left[ \frac{3}{4} \frac{d \text{Log } \nu_1}{du} + \frac{1}{u} - u + \frac{-\frac{1}{4} \frac{d^2 \text{Log } \nu_1}{du^2} + \frac{1}{u^2} + 1}{-\frac{1}{4} d \frac{\text{Log } \nu_1}{du} - \frac{1}{u} + u} \right]. \quad (37)$$

Quand  $\nu_1$  est de la forme  $\nu_1 = \nu_0 u^n$ , cette formule devient :

$$V = -\frac{\nu_0}{2} u^n \left( -\frac{n+4}{4u} + u \right)$$

$$\left( \frac{3n+4}{4u} - u + \frac{\frac{n}{4u^2} + \frac{1}{u^2} + 1}{-\frac{4u}{n} - \frac{1}{u} + u} \right). \quad (38)$$

Quand  $u \rightarrow \infty$ , cette dernière expression est équivalente à

$$-\frac{\nu_0}{2} u^n u(-u) = \frac{\nu_0}{2} u^{n+2}. \quad (39)$$

Or, nous avons supposé qu'au voisinage de  $u = \infty$ , on avait  $\nu_1 = \nu_0'' u^{n''}$  avec  $0 \leq n'' \leq 1$ .

Donc,  $V$  tend vers l'infini quand  $u$  tend vers l'infini ; dans ces conditions, il ne peut y avoir d'états libres de la particule représentée par l'équation (35) ; tous les états sont des états liés et le spectre des niveaux d'énergie, c'est-à-dire des valeurs propres est discontinu, (c. q. f. d.). On remarquera au passage que  $V$  tendrait vers zéro et que l'on aurait un spectre continu si l'on avait  $n'' < -2$  ; ce serait en particulier le cas si la seule force d'interaction était une force de Coulomb correspondant à  $n'' = -3$  ; peut-être en résulte-t-il que les gaz de Lorentz électrons-ions ont une relaxation de l'échauffement des électrons différente de celle des gaz de Lorentz électrons-molécules neutres ; cependant nous laisserons maintenant de côté ces cas-là pour rester dans le cadre des hypothèses (21) et (22). Les valeurs propres  $\mu_i$  (ou  $\lambda_i$ ) forment alors une suite discrète, ainsi que les fonctions  $y_i$  ; on sait aussi d'après une propriété générale des équations de Sturm-Liouville que la fonction  $y_i$  possède  $i$  zéros dans l'intervalle  $0 \dots \dots + \infty$ .

4) *Les fonctions propres y sont orthogonales entre elles sur l'intervalle  $0 \dots \dots \infty$  avec la fonction poids  $u^2 e^{u^2}$ .* — En effet, on sait que dans l'équation de Sturm-Liouville sous sa forme classique (32), la fonction poids est le coefficient  $r$  de  $\mu \psi$  et que l'on a la relation d'orthogonalité :

$$\int_a^b r \psi_i \psi_j du = 0 \quad i \neq j$$

soit ici

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} \psi_i \psi_j du = 0 \quad i \neq j.$$

Revenons aux fonctions  $y_i$

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} y_i e^{u^2} y_j e^{u^2} du = 0$$

$$\int_0^\infty u^2 e^{u^2} y_i y_j du = 0 \quad i \neq j. \quad (40)$$

c. q. f. d.

5) *La contribution des fonctions propres non maxwelliennes  $y_j$  ( $j \neq 0$ ) à la densité électronique est nulle.* — Il suffit pour le voir de remplacer dans (40)  $y_j$  par  $y_0 = e^{-u^2}$  et il vient

$$\int_0^\infty u^2 y_j du = 0$$

ou

$$\int_0^\infty y_j 4 \pi v^2 dv = 0 \quad \text{c. q. f. d.} \quad (41)$$

6. *Normalisation.* — A cause du résultat précédent, il est inutile de normaliser les fonctions propres ; on peut même remarquer que leur signe n'est pas déterminé par les conditions que nous leur avons imposées. Toutefois, il peut y avoir intérêt à choisir ce signe de façon que l'intégrale d'énergie correspondante  $E_i = \int_0^\infty u^4 y_i du$  soit positive.

7) *La recherche des fonctions propres  $y_i$  et des valeurs propres  $\lambda_i$  correspondant à une loi de choc déterminée  $\nu_1(u)$  est un problème que l'on ne peut en général résoudre que de façon numérique.* Pour terminer, nous indiquerons toutefois *un cas particulier* où on peut mener analytiquement le calcul jusqu'au bout ; c'est *celui où la fréquence  $\nu_1$  est indépendante de la vitesse* :

$$\nu_1 = \text{cste.} \quad (42)$$

L'équation aux valeurs propres (32) se ramène à une équation d'Hermite par le changement de fonction  $\varphi = u\psi$  et on obtient finalement pour les fonctions propres et les valeurs propres associées les expressions :

$$y_i = \frac{e^{-u^2}}{u} H_{2i+1}(u) \quad (43)$$

$$\lambda_i = 2i \left( \frac{m}{M} \nu_1 \right) \quad (44)$$

où  $H_{2i+1}(u)$  est le polynome d'Hermite d'ordre  $2i+1$ .

Les premières fonctions propres ont alors les expressions suivantes :

$$y_0 = 2 e^{-u^2} \quad (45)$$

$$y_1 = 8 e^{-u^2} \left( u^2 - \frac{3}{2} \right) \quad (46)$$

$$y_2 = 32 e^{-u^2} \left( u^4 - 5u^2 + \frac{15}{4} \right). \quad (47)$$

**Appendice : Pour les électrons de grandes vitesses, la fréquence de collision  $\nu_1$  dépend de la forme du potentiel d'interaction à courte distance.** — Supposons que le potentiel d'interaction  $\varphi(r)$  puisse être considéré comme étant à *courte distance* pour toutes les valeurs de  $r$  inférieures à une certaine valeur  $p_1$ .

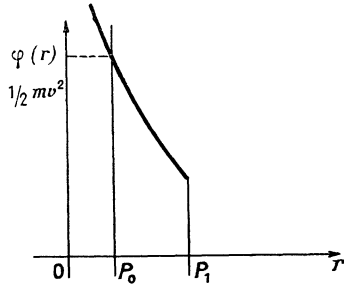


FIG. 1.

Pour un électron de vitesse  $v$ , on peut définir une distance  $p_0$  telle que  $\frac{1}{2} mv^2 = \varphi(p_0)$  et si le potentiel est répulsif pour  $r < p_1$  (fig. A), on peut toujours choisir  $v$  suffisamment grand pour que  $p_0$  soit très inférieur à  $p_1$ .

$\nu_1$  se calcule par la formule :

$$\nu_1 = 2 \pi N v \int_0^\infty (1 - \cos \chi) p \, dp$$

dans laquelle la déviation  $\chi$  est elle-même fonction de  $p$  et  $v$  selon la loi [8] :

$$\chi = \pi - 2p \int_{r_m}^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}mv^2} - \frac{p^2}{r^2}}} \quad (A)$$

$r_m$ , rayon vecteur du sommet de la trajectoire considéré (plus courte distance d'approche) est solution de l'équation :

$$1 - \frac{\varphi(r_m)}{\frac{1}{2}mv^2} - \frac{p^2}{r_m^2} = 0. \quad (B)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 2 \pi N v \int_0^{p_0} (1 - \cos \chi) p \, dp \\ &+ 2 \pi N v \int_{p_0}^{p_1} (1 - \cos \chi) p \, dp + \dots \\ &+ 2 \pi N v \int_{p_1}^\infty 2 \pi N v (1 - \cos \chi) \end{aligned}$$

ou

$$\nu_1 = \nu' + \nu'' + \nu'''.$$

Pour tous les chocs proches qui forment  $\nu'(p < p_0)$ , la déviation  $\chi$  est finie et on peut écrire en ordre de grandeur

$$\nu' \sim \pi N v p_0^2.$$

Pour les chocs lointains, on a de façon générale :

$$\varphi(r_m) \ll \frac{1}{2}mv^2.$$

Soit d'après (B)

$$r_m \sim p$$

ou mieux

$$r_m \sim p \left[ 1 + \frac{\varphi(p)}{mv^2} \right].$$

Calculons l'ordre de grandeur de  $\nu'''$ .

En combinant (A) et (B), on obtient pour la déviation dans un choc quelconque :

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_m}^\infty \frac{r_m \, dr}{r \sqrt{r^2 - r_m^2} \sqrt{1 + \frac{r^2 r_m^2}{p^2} \frac{\varphi(r_m) - \varphi(r)}{(r^2 - r_m^2) \frac{1}{2}mv^2}}}$$

Or pour un choc lointain, dans tout l'intervalle  $r_m, +\infty$  la quantité

$$\frac{r^2 r_m^2}{p^2} \frac{\varphi(r_m) - \varphi(r)}{(r^2 - r_m^2) \frac{1}{2}mv^2}$$

est du même ordre de grandeur que

$$\frac{\varphi(r_m)}{\frac{1}{2}mv^2}$$

donc petite devant 1 ; on a donc pour  $\chi$  l'expression approchée :

$$\begin{aligned} \chi &\# \pi - 2 \int_{r_m}^\infty \frac{r_m \, dr}{r \sqrt{r^2 - r_m^2}} + 2 \int_{r_m}^\infty \frac{r_m^2 r}{p^2} \frac{\varphi(r_m) \varphi(r)}{(r^2 - r_m^2)^{3/2} mv^2} \, dr \\ \chi &\# \pi - \pi + 2 \int_{r_m}^\infty \left[ \frac{\varphi(r_m) - \varphi(r)}{mv^2} \right] \frac{r_m^2 r \, dr}{(r^2 - r_m^2)^{3/2} p^2} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\chi \# \frac{r_m \varphi(r_m)}{p^2 mv^2} \int_{r_m}^\infty \left[ 1 - \frac{\varphi(r)}{\varphi(r_m)} \right] \frac{2r \, dr}{r_m^2 \left( \frac{r^2}{r_m^2} - 1 \right)^{3/2}}$$

De manière générale, on peut voir que l'intégrale ci-dessus est finie et puisque  $\frac{r_m}{p}$  est très voisin de 1, on en conclut que pour les chocs lointains,  $\chi$  est un infiniment petit du même ordre que  $\frac{\varphi(r_m)}{mv^2}$  ; on peut d'ailleurs obtenir une expression plus simple pour  $\chi$  quand au delà de  $r_m$  le potentiel est de la forme :

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^{s-1}}$$

car on a alors

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_m)} = \left( \frac{r}{r_m} \right)^{-s+1}$$



et en faisant le changement de variable :

$$u = \left(\frac{r}{r_m}\right)^2$$

on obtient :

$$\chi \# \frac{r_m^2}{p^2} \frac{\varphi(r_m)}{mv^2} A(s) \quad \# \frac{\varphi(p)}{mv^2} A(s)$$

$$A(s) = \int_1^\infty \frac{1-u^{\frac{1-s}{2}}}{(u-1)^{3/2}} du.$$

L'intégrale  $A(s)$  ne contient plus  $r_m$  ; c'est une fonction de  $s$ , nulle pour  $s = 1$ , positive et croissant indéfiniment avec  $s$  pour  $s > 1$  ; de plus, elle se calcule exactement pour  $s$  entier, et l'on obtient les valeurs suivantes :

$s$	1	2	3	4	5	4	7
$A(s)$	0	2	$\pi$	4	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{15}{8}\pi$

On peut écrire finalement :

$$v''' \sim 2\pi Nv \int_{p_1}^\infty \frac{\chi^2}{2} p dp \sim \pi Nv \left(\frac{A(s)}{mv^2}\right)^2 \int_{p_1}^\infty \varphi(p)^2 p dp \quad (C)$$

avec

$$\varphi(p) = \frac{k}{p^{s-1}}$$

on obtient

$$v''' = \pi Nv \left(\frac{A(s)k}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{2s-4} \frac{1}{p_1^{2s-4}}$$

pour  $s > 2$

et

$$v''' \rightarrow \infty$$

pour  $s \leq 2$  car l'intégrale (C) est alors divergente.

Dans le cas du potentiel coulombien, cette divergence est logarithmique [9].

Dans le cas des potentiels à variation plus rapide que le potentiel coulombien ( $s > 2$ ), on voit que  $v'''$  est fini et peut s'écrire :

$$v''' \sim \pi Nv p_0^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{A(s)k}{2s-4}\right)^2 \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{2s-4} \sim v' \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{2s-4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{A(s)k}{2s-4}\right)^2.$$

Quand  $v \rightarrow \infty$ ,  $\frac{p_0}{p_1} \rightarrow 0$  et  $v''' \ll v'$  ; la contribution des chocs lointains, c'est-à-dire de ceux qui dépendent de la portion de la courbe de potentiel pour laquelle  $r > p_1$ , devient donc négligeable par rapport aux chocs dont la déviation dépend de la forme de la courbe d'interaction à courte distance.

Manuscrit reçu le 15 mai 1956.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAYET (M.), DELCROIX, (J. L.) et DENISSE (J. F.), *Journal de Physique et le Radium*, **15**, 795, 1954.  
 [2] BAYET (M.), DELCROIX, (J. L.) et DENISSE (J. F.), *Journal de Physique et le Radium*, **16**, 274, 1955.  
 [3] CHAPMAN (S.) et COWLING (T. G.), *The Mathematical theory of non uniform gases*, p. 346-350. Cambridge, 1952.  
 [4] HOLSTEIN (T.), *Physical Review*, **70**, 367, 1946.  
 [5] CHAPMAN (S.) et COWLING (T. G.), *loc. cit.*, p. 170-171.  
 [6] MORSE (P. M.) et FESHBACH (M.), *Methods of theoretical Physics*, I, p. 532-534, Mc Graw Hill, New-York, 1953.  
 [7] MORSE (P. M.) et FESHBACH, *loc. cit.* p. 719-725.  
 [8] HIRSCHFELDER (J. O.), CURTISS (C. F.) et BIRD (R. B.), *Molecular theory of Gases and fluids*, p. 50-51, Wiley, New-York, 1954.  
 [9] CHAPMAN (S.) et COWLING (T. G.), *loc. cit.*, p. 177-179.