



HAL
open science

Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés. II

Michel Bayet, Jean-Loup Delcroix, Jean-François Denisse

► **To cite this version:**

Michel Bayet, Jean-Loup Delcroix, Jean-François Denisse. Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés. II. *Journal de Physique et le Radium*, 1955, 16 (4), pp.274-280. 10.1051/jphys-rad:01955001604027400 . jpa-00235143

HAL Id: jpa-00235143

<https://hal.science/jpa-00235143>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORIE CINÉTIQUE DES PLASMAS HOMOGENES FAIBLEMENT IONISÉS. II.

Par MICHEL BAYET,

Faculté des Sciences de Toulouse,

JEAN-LOUP DELCROIX,

École Normale Supérieure, Paris,

et JEAN-FRANÇOIS DENISSE,

Observatoire de Paris, section d'Astrophysique.

Sommaire. — On poursuit ici l'étude du gaz de Lorentz parfait, commencée dans un article précédent (1). Dans cette deuxième partie, on étudie l'approximation du deuxième ordre de la fonction de distribution, c'est-à-dire les échanges d'énergie entre le champ électrique et le plasma; on obtient alors un terme proportionnel au temps, donc divergent, qui s'interprète comme un échauffement continu du gaz d'électrons, de sorte qu'il n'existe pas d'état stationnaire. Pour terminer, on définit et on calcule le facteur de qualité « Q » du plasma, et l'on donne en Appendice la démonstration des formules utilisées dans la partie I.

5. Calcul de l'approximation du second ordre.

— a. CALCUL DES COEFFICIENTS c_{lm} . — Portons les développements (18) et (19) dans l'équation (16); nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum (\dot{c}_{lm} C_{lm} + \dot{c}'_{lm} S_{lm}) + \sum v_l (c_{lm} C_{lm} + c'_{lm} S_{lm}) \\ & + \Gamma \sum \left(b_{lm} \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} + b'_{lm} \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ & + \frac{\Gamma \mathbf{v}}{v} \left(\frac{\partial b_{lm}}{\partial v} C_{lm} + \frac{\partial b'_{lm}}{\partial v} S_{lm} \right) \\ & = \Omega \sum m (c'_{lm} C_{lm} - c_{lm} S_{lm}). \end{aligned} \quad (62)$$

Nous supposons l'instant t choisi de façon telle que les anisotropies transitoires de la fonction f_1 soient déjà devenues négligeables; à partir de cet instant que nous appellerons t_1 , nous pouvons réécrire (62) sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum (\dot{c}_{lm} C_{lm} + \dot{c}'_{lm} S_{lm}) + \sum v_l (c_{lm} C_{lm} + c'_{lm} S_{lm}) \\ & + \Gamma \left(b_{10} \frac{\partial C_{10}}{\partial \mathbf{v}} + b_{11} \frac{\partial C_{11}}{\partial \mathbf{v}} + b'_{11} \frac{\partial S_{11}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ & + \frac{\Gamma \mathbf{v}}{v} \left(\frac{\partial b_{10}}{\partial v} C_{10} + \frac{\partial b_{11}}{\partial v} C_{11} + \frac{\partial b'_{11}}{\partial v} S_{11} \right) \\ & = \Omega \sum m (c'_{lm} C_{lm} - c_{lm} S_{lm}). \end{aligned} \quad (63)$$

Or on trouve facilement

$$\begin{aligned} & \Gamma \left(b_{10} \frac{\partial C_{10}}{\partial \mathbf{v}} + b_{11} \frac{\partial C_{11}}{\partial \mathbf{v}} + b'_{11} \frac{\partial S_{11}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ & = \Gamma (\cos \psi b_{10} + \sin \psi b'_{11}) C_{00} \end{aligned} \quad (64)$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \Gamma \mathbf{v} C_{10} &= (\Gamma \sin \psi v_y + \Gamma \cos \psi v_z) v_x \\ &= \Gamma \sin \psi \frac{S_{21}}{3} + \Gamma \cos \psi \frac{2C_{20} + v^2 C_{00}}{3}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \mathbf{v} C_{11} &= (\Gamma \sin \psi v_y + \Gamma \cos \psi v_z) v_x \\ &= \Gamma \sin \psi \frac{S_{22}}{6} + \Gamma \cos \psi \frac{C_{21}}{3}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \mathbf{v} S_{11} &= (\Gamma \sin \psi v_y + \Gamma \cos \psi v_z) v_y \\ &= \Gamma \sin \psi \frac{2v^2 C_{00} - 2C_{20} - C_{22}}{6} + \Gamma \cos \psi \frac{S_{21}}{3} \end{aligned} \quad (67)$$

Portons les équations (64), (65), (66) et (67) dans (63), ordonnons par rapport aux fonctions sphériques et annulons le coefficient de chacune d'elles; nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{c}_{00} + \Gamma \cos \omega t \left[\cos \psi \left(b_{10} + \frac{v}{3} \frac{\partial b_{10}}{\partial v} \right) \right. \\ \left. + \sin \psi \left(b'_{11} + \frac{v}{3} \frac{\partial b'_{11}}{\partial v} \right) \right] &= 0 \quad (C_{00}), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\dot{c}_{10} + v_1 c_{10} = 0 \quad (C_{10}), \quad (69)$$

$$\dot{c}_{11} + v_1 c_{11} = \Omega c'_{11} \quad (C_{11}), \quad (70)$$

$$\dot{c}'_{11} + v_1 c'_{11} = -\Omega c_{11} \quad (S_{11}), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{20} + v_2 c_{20} + \Gamma \cos \omega t \\ \times \left(\frac{2 \cos \psi}{3} \frac{1}{v} \frac{\partial b_{10}}{\partial v} - \frac{\sin \psi}{v} \frac{1}{v} \frac{\partial b'_{11}}{\partial v} \right) &= 0 \quad (C_{20}), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\dot{c}_{21} + v_2 c_{21} + \Gamma \cos \omega t \frac{\cos \psi}{3v} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} = \Omega c'_{21} \quad (C_{21}), \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}'_{21} + v_2 c'_{21} + \Gamma \cos \omega t \\ \times \left(\frac{\sin \psi}{3v} \frac{\partial b_{10}}{\partial v} + \frac{\cos \psi}{3v} \frac{\partial b'_{11}}{\partial v} \right) &= -\Omega c_{21} \quad (S_{21}), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\dot{c}_{22} + v_2 c_{22} - \Gamma \cos \omega t \frac{\sin \psi}{6v} \frac{\partial b'_{11}}{\partial v} = 2\Omega c'_{22} \quad (C_{22}), \quad (75)$$

$$\dot{c}'_{22} + v_2 c'_{22} + \Gamma \cos \omega t \frac{\sin \psi}{6v} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} = -2\Omega c_{22} \quad (S_{22}), \quad (76)$$

(1) M. BAYET, J. L. DELCROIX et J. F. DENISSE. *J. Physique Rad.*, 1954, 15, 795.

puis $\dot{c}_{l0} + \nu_l c_{l0} = 0$ $(C_{l0}),$
 $\dot{c}_{lm} + \nu_l c_{lm} = m \Omega c'_{lm}$ $(C'_{lm}),$
 $\dot{c}'_{lm} + \nu_l c'_{lm} = -m \Omega c_{lm}.$ $(S_{lm}),$

On voit que les anisotropies d'ordre 1 et d'ordre supérieur ou égal à 3 n'existent qu'en régime transitoire; puisqu'on a pour l différent de 0 et de 2

$$\left. \begin{aligned} c_{l0} &= K_{l0} e^{-\nu_l t}, \\ c_{lm} &= K_{lm} e^{-\nu_l t} \cos(\chi_{lm} - m \Omega t), \\ c'_{lm} &= K_{lm} e^{-\nu_l t} \sin(\chi_{lm} - m \Omega t). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Enfin, quand on tient compte des expressions des fonctions b trouvées dans le paragraphe 4, on voit que les solutions générales des équations (68) à (76) sont de la forme

$$\left. \begin{aligned} c_{00} &= K_{00} + D_{00} t + E_{00} \cos 2 \omega t + F_{00} \sin 2 \omega t, \quad (78) \\ c_{20} &= K_{20} e^{-\nu_2 t} \\ &\quad + D_{20} + E_{20} \cos 2 \omega t + F_{20} \sin 2 \omega t, \\ c_{21} &= K_{21} e^{-\nu_2 t} \cos(\chi_{21} - \Omega t) \\ &\quad + D_{21} + E_{21} \cos 2 \omega t + F_{21} \sin 2 \omega t, \\ c'_{21} &= K_{21} e^{-\nu_2 t} \sin(\chi_{21} - \Omega t) \\ &\quad + D'_{21} + E'_{21} \cos 2 \omega t + F'_{21} \sin 2 \omega t, \\ c_{22} &= K_{22} e^{-\nu_2 t} \cos(\chi_{22} - 2 \Omega t) \\ &\quad + D_{22} + E_{22} \cos 2 \omega t + F_{22} \sin 2 \omega t, \\ c'_{22} &= K_{22} e^{-\nu_2 t} \sin(\chi_{22} - 2 \Omega t) \\ &\quad + D'_{22} + E'_{22} \cos 2 \omega t + F'_{22} \sin 2 \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

En effet, dans ces formules, les premiers termes des seconds membres représentent la solution générale du système homogène obtenu en négligeant dans les équations (68) à (76) les termes indépendants des fonctions inconnues c_{lm} , c'est-à-dire les termes en Γ : physiquement cette solution correspond à un régime transitoire. On obtient la solution générale du système (68) à (76) en adjoignant à ces premiers termes une solution particulière du système complet. On voit notamment que :

— la fonction de distribution f_2 contient des termes modulés à une fréquence double de celle du champ électrique;

— la partie isotrope de cette fonction contient un terme divergent $D_{00} t$.

Calculons donc à titre d'exemple et étant donné leur importance les coefficients D_{00} , E_{00} et F_{00} , figurant dans la partie isotrope de f_2 ; pour ceci récrivons tout d'abord l'équation (68) sous la forme (*)

$$\dot{c}_{00} + \Gamma \cos \omega t \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^3}{3} (b_{10} \cos \psi + b'_{11} \sin \psi) \right] = 0.$$

Or b_{10} et b'_{11} étant des fonctions sinusoidales du temps, nous pouvons poser

$$b_{10} \cos \psi + b'_{11} \sin \psi = 2R \cos \omega t + 2S \sin \omega t,$$

(*) Dans les équations qui suivent, jusqu'à (104) exclue, lire γ au lieu de Γ .

d'où

$$\dot{c}_{00} + \frac{\Gamma}{3v^2} \left[\frac{d}{dv} (v^3 R)_2 \cos^2 \omega t + \frac{d}{dv} (v^3 S)_2 \sin \omega t \cos \omega t \right] = 0,$$

$$\dot{c}_{00} + \frac{\Gamma}{3v^2} \frac{d}{dv} (v^3 R) + \frac{\Gamma}{3v^2} \frac{d}{dv} (v^3 R) \cos 2 \omega t + \frac{\Gamma}{3v^2} \frac{d}{dv} (v^3 S) \sin 2 \omega t = 0,$$

d'où la relation (79) avec

$$D_{00} = - \frac{\Gamma}{3v^2} \frac{d}{dv} (v^3 R), \quad (80)$$

$$E_{00} = \frac{\Gamma}{6\omega v^2} \frac{d}{dv} (v^3 S), \quad (81)$$

$$F_{00} = - \frac{\Gamma}{6\omega v^2} \frac{d}{dv} (v^3 R). \quad (82)$$

Calculons maintenant R et S ; des formules (47) et (49) nous tirons facilement

$$2R = - \mathcal{R} \left\{ \frac{1}{i\omega + \nu_1} \cos^2 \psi + \frac{i\omega + \nu_1}{(i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} \sin^2 \psi \right\} \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma,$$

$$2R = - \left[\frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} \cos^2 \psi + \frac{\nu_1 (\Omega^2 + \nu_1^2 - \omega^2) + 2\omega^2 \nu_1}{(\Omega^2 + \nu_1^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \nu_1^2} \sin^2 \psi \right] \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma = - \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma,$$

avec

$$\eta = \sin^2 \psi \frac{\Omega^2 (\Omega^2 + \nu_1^2 - 3\omega^2)}{[(\Omega - \omega)^2 + \nu_1^2][(\Omega + \omega)^2 + \nu_1^2]}, \quad (83)$$

d'où, finalement,

$$D_{00} = \frac{\Gamma^2}{6v^2} \frac{d}{dv} \left\{ \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) v^2 \frac{d\alpha_{00}}{dv} \right\}, \quad (84)$$

$$F_{00} = \frac{D_{00}}{2\omega}. \quad (85)$$

Nous avons, de même,

$$2S = - \mathcal{R} \left\{ \frac{i}{i\omega + \nu_1} \cos^2 \psi + \frac{i(i\omega + \nu_1)}{(i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} \sin^2 \psi \right\} \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma$$

$$= - \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_1^2} \cos^2 \psi - \frac{\omega (\Omega^2 - \nu_1^2 - \omega^2)}{[(\Omega - \omega)^2 + \nu_1^2][(\Omega + \omega)^2 + \nu_1^2]} \sin^2 \psi \right\} \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma = - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta') \frac{1}{v} \frac{d\alpha_{00}}{dv} \Gamma,$$

avec

$$\eta' = \sin^2 \psi \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - \omega^2 + 3\nu_1^2)}{[(\Omega - \omega)^2 + \nu_1^2][(\Omega + \omega)^2 + \nu_1^2]}, \quad (86)$$

d'où, finalement,

$$E_{00} = - \frac{\Gamma^2}{12v^2} \frac{d}{dv} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta') v^2 \frac{d\alpha_{00}}{dv} \right\}. \quad (87)$$

Nous poserons enfin $K_{00} + E_{00} = 0$ pour qu'à l'instant $t = 0$ on ait : $c_{00} = 0$.

b. DENSITÉ DES ÉLECTRONS DU PLASMA. — Il est important de vérifier que nous avons bien

$$\iiint (f_0 + f_1 + f_2) \underline{dv} = n.$$

Pour calculer cette intégrale on peut d'abord effectuer l'intégration sur une sphère de rayon v ; dans cette intégration toutes les fonctions sphériques d'ordre $l \geq 1$ donnent un résultat nul de sorte qu'on a en régime permanent

$$\iiint f \underline{dv} = \int_0^\infty [a_{00} + D_{00}t + E_{00}(\cos 2\omega t - 1) + F_{00} \sin 2\omega t] 4\pi v^2 dv.$$

Or on a

$$\int_0^\infty 4\pi v^2 D_{00} dv = \frac{4\pi\Gamma^2}{6} \left[\frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) v^2 \frac{da_{00}}{dv} \right]_0^\infty = 0;$$

en effet, pour qu'à l'instant zéro le nombre d'électrons contenu dans le plasma soit fini, il faut que

$$\int_0^\infty a_{00} 4\pi v^2 dv$$

soit fini, donc que quand v tend vers l'infini, $v^3 a_{00}$ tende vers zéro, d'où l'on déduit facilement que $v^2 \frac{da_{00}}{dv}$ tend aussi vers zéro, nous voyons donc que le terme divergent $D_{00}t$ a une contribution nulle à la densité. Un calcul analogue peut être fait pour E_{00} et F_{00} de sorte que l'on a bien

$$\iiint f \underline{dv} = \int_0^\infty a_{00} 4\pi v^2 dv = n.$$

c. ÉNERGIE DES ÉLECTRONS DU PLASMA. — Calculons maintenant l'intégrale d'énergie

$$W = \iiint f \frac{1}{2} m v^2 \underline{dv}.$$

On montre, comme pour la densité, que les termes isotropes seuls donnent une contribution différente de zéro de sorte que

$$W = \int_0^\infty (a_{00} - E_{00} + D_{00}t + E_{00} \cos 2\omega t + F_{00} \sin 2\omega t) \frac{1}{2} m v^2 4\pi v^2 dv,$$

soit

$$W = W_0 + Pt + \frac{P}{2\omega} \sin 2\omega t + W_1 (\cos 2\omega t - 1), \quad (88)$$

avec

$$W_0 = 2\pi m \int_0^\infty a_{00} v^4 dv, \quad (89)$$

$$P = 2\pi m \int_0^\infty D_{00} v^4 dv, \quad (90)$$

$$W_1 = 2\pi m \int_0^\infty E_{00} v^4 dv. \quad (91)$$

Nous allons montrer que les termes

$$Pt + \frac{P}{2\omega} \sin 2\omega t$$

représentent l'énergie dissipée en chaleur par effet Joule et que $W_1(\cos 2\omega t - 1)$ représente l'énergie réactive; nous pouvons, en effet, partager l'énergie $\mathbf{Ej} dt$ apportée par le champ pendant l'intervalle de temps dt à chaque centimètre cube du plasma en deux parties en écrivant

$$\mathbf{j} = \|\bar{\sigma}\| \mathbf{E} + i\omega \|\bar{k}\| \mathbf{E},$$

les deux tenseurs $\|\bar{\sigma}\|$ et $i\omega \|\bar{k}\|$ étant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du tenseur complexe $\|\sigma\|$; $\|\bar{\sigma}\|$ est donc le tenseur de conductivité réelle et $\|\bar{k}\|$ le tenseur de polarisabilité; nous avons donc en remplaçant $i\omega$ par $\frac{\partial}{\partial t}$ pour revenir aux notations réelles

$$\mathbf{Ej} dt = \|\sigma\| \mathbf{E} \mathbf{E} dt + \|\bar{k}\| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} dt$$

ou, en posant $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t$

$$\mathbf{Ej} dt = \|\sigma\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt - \omega \|\bar{k}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0 \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} dt,$$

soit, en intégrant de l'instant zéro à un instant quelconque,

$$W = W_0 + \frac{\|\bar{\sigma}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0}{2} t + \frac{\|\bar{\sigma}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0}{2} \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\|\bar{k}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0}{4} (\cos 2\omega t - 1). \quad (92)$$

Cette équation a la même forme que (88) et confirme notre interprétation des coefficients P et W_1 ; il reste à vérifier que les expressions (90) et (91) de ces deux coefficients sont bien identiques à celles contenues dans (92), c'est-à-dire que l'on a

$$2\pi m \int_0^\infty D_{00} v^4 dv = \frac{\|\bar{\sigma}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0}{2},$$

$$2\pi m \int_0^\infty E_{00} v^4 dv = \frac{\|\bar{k}\| \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0}{4}.$$

Un calcul simple que nous ne reproduirons pas ici permet effectivement de voir que les expressions trouvées pour D_{00} , E_{00} et pour $\|\sigma\|$ satisfont bien ces relations.

d. VITESSE D'ÉCHAUFFEMENT DU GAZ D'ÉLECTRONS.

— Il sera commode pour caractériser la vitesse d'échauffement du gaz d'électrons de définir une constante de temps τ telle qu'au bout du temps τ l'énergie dissipée en chaleur soit égale à l'énergie initiale W_0 , soit de poser

$$\tau = \frac{W_0}{P}. \quad (93)$$

Cette constante de temps est inversement proportionnelle au carré du champ électrique; à titre d'exemple nous allons la calculer dans le cas particulier où à l'instant initial le gaz d'électrons est en équilibre thermodynamique avec une source de température T ; on a alors

$$W_0 = \frac{3}{2} nkT,$$

$$P = \frac{2\pi m \Gamma^2}{6} \int_0^\infty v^2 \frac{d}{dv} \left\{ \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) v^2 \frac{da_{00}}{dv} \right\} dv,$$

$$P = \frac{\pi m \Gamma^2}{3} \left[\frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) v^3 \frac{da_{00}}{dv} \right]_0^\infty - \frac{2\pi m \Gamma^2}{3} \int_0^\infty \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) v^3 \frac{da_{00}}{dv} dv. \quad (94)$$

Il est facile de voir que le terme tout intégré donne zéro; supposons, de plus, pour terminer le calcul, que ν_1 est indépendant de v ; nous avons alors

$$P = - \frac{2\pi m \Gamma^2}{3} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) \int_0^\infty v^3 \frac{da_{00}}{dv} dv$$

$$= - \frac{2\pi m \Gamma^2}{3} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) \left\{ [v^3 a_{00}]_0^\infty - 3 \int_0^\infty v^2 a_{00} dv \right\},$$

$$P = 2\pi m \Gamma^2 \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta) \frac{n}{4\pi}$$

$$= \frac{nm\Gamma^2}{2} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta), \quad (95)$$

$$\tau = \frac{3kT}{m\Gamma^2} \frac{\omega^2 + \nu_1^2}{\nu_1} \frac{1}{1 - \eta}. \quad (96)$$

Nous pouvons écrire cette formule en posant

$$\omega^2 + \nu_1^2 = \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \quad (97)$$

et en appelant W_E l'énergie acquise du fait du champ électrique pendant un intervalle de temps τ_0 ,

$$W_E = \frac{1}{2} nm(\Gamma\tau_0)^2,$$

d'où, finalement,

$$\tau = \frac{1}{\nu_1} \frac{W_0}{W_E} \frac{4\pi^2}{1 - \eta}. \quad (98)$$

Dans ces mêmes conditions, nous pouvons d'ailleurs expliciter a_{00} et D_{00}

$$a_{00} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

d'où, d'après (84) et (96),

$$D_{00} = \frac{kT}{2m\tau} \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left(v^2 \frac{da_{00}}{dv} \right)$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{kT}{2m\tau} \left[-\frac{m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(3 - \frac{2mv^2}{2kT} \right) \right],$$

soit, en posant $\frac{2kT}{m} = v_0^2$,

$$a_{00} = \frac{n}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{v_0^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}},$$

$$D_{00} = \frac{n}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{v_0^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\tau} \left(\frac{v^2}{v_0^2} - \frac{3}{2} \right) e^{-\frac{v^2}{v_0^2}},$$

$$4\pi v^2 (a_{00} + D_{00} t) dv$$

$$= \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{t}{\tau} \left(\frac{v^2}{v_0^2} - \frac{3}{2} \right) \right] e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} d\left(\frac{v}{v_0}\right). \quad (99)$$

En prenant comme paramètre $\frac{v}{v_0}$ et en négligeant le facteur de normalisation $\frac{4n}{\sqrt{\pi}}$, nous avons représenté sur la figure 5 l'allure de la fonction de distribution (99) depuis l'instant $t=0$ où l'on applique le champ jusqu'à l'instant $t=\tau$; on

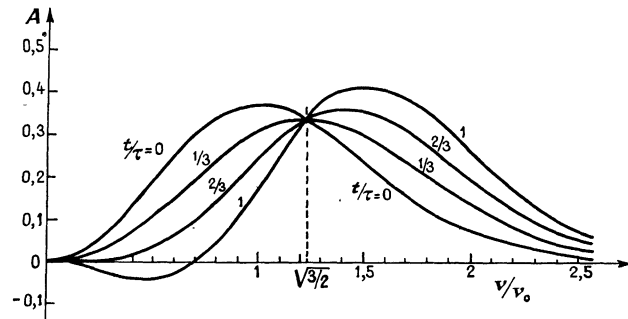


Fig. 5.

$$A = \frac{v^2}{v_0^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{t}{\tau} \left(\frac{v^2}{v_0^2} - \frac{3}{2} \right) \right] e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}.$$

remarque que la vitesse quadratique moyenne $c = \sqrt{\frac{3}{2}} v_0$ de la distribution initiale partage les électrons en deux groupes : ceux de vitesse inférieure à c dont le nombre décroît et ceux de vitesse supérieure à c dont le nombre augmente au contraire de façon que le nombre total d'électrons reste constant comme nous l'avons montré. On voit de plus que pour $t > \frac{2}{3}\tau$ la fonction de distribution est négative pour les faibles valeurs de v ; ceci n'a en fait aucun sens physique; comme nous l'avons annoncé dans la paragraphe 2 [form. (13)] le développement par rapport à Γ n'est pas bien convergent pour les faibles valeurs de v ; le résultat obtenu ici montre simplement que l'approximation d'ordre 2 ne représente correctement la distribution de vitesse des électrons que pendant un temps $t \ll \tau$.

e. FACTEUR DE QUALITÉ Q DU PLASMA. — Nous définissons le facteur Q du plasma par la relation usuelle

$$Q = \frac{\omega \bar{W}}{P} \quad (100)$$

dans laquelle \bar{W} représente la valeur moyenne de l'énergie emmagasinée dans le plasma du fait du champ électrique et P la puissance dissipée en chaleur. Dans \bar{W} nous devons inclure l'énergie propre du champ électrique dans le vide de sorte que nous avons

$$\bar{W} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{16\pi} - W_1 = \frac{\varepsilon_0 m^2}{e^2 16\pi} \Gamma^2 - W_1. \quad (101)$$

Calculons donc W_1 en utilisant les formules (87) et (91); nous obtenons par un calcul analogue à celui fait pour P

$$W_1 = \frac{\pi m \Gamma^2}{3\omega} \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta') v^3 \frac{d\alpha_{00}}{dv} dv. \quad (102)$$

Les formules (94) et (102) permettent de calculer Q dans le cas général où ν_1 est fonction de v ; si l'on suppose que ν_1 est indépendant de v on peut expliciter totalement le résultat car on a alors

$$W_1 = \frac{\pi m \Gamma^2}{3\omega} \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta') \int_0^\infty v^3 \frac{d\alpha_{00}}{dv} dv, \\ W_1 = - \frac{\pi m \Gamma^2}{\omega} \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_1^2} (1 - \eta') \frac{n}{4\pi}. \quad (103)$$

Portons maintenant dans (100) les expressions tirées de (95), (102) et (103); nous obtenons

$$Q = \frac{\varepsilon_0 m^2}{4\pi e^2} \frac{\Gamma^2}{4} \frac{2}{nm\Gamma^2} \frac{(\omega^2 + \nu_1^2)}{\nu_1} \frac{1}{1 - \eta'} \omega + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\nu_1} \frac{1 - \eta'}{1 - \eta'}$$

ou, en introduisant la fréquence des oscillations de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m \varepsilon_0}, \quad (104)$$

$$Q = \frac{\omega}{2\nu_1(1 - \eta')} \left[\frac{\omega^2 + \nu_1^2}{\omega_p^2} + 1 - \eta' \right]. \quad (105)$$

APPENDICE.

1. Calcul de $\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$ et de $\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$. — On a

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x = v^{l-1} \left\{ l \theta_{lm} \cos m \varphi \sin \theta \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos m \varphi \cos \theta \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \sin m \varphi \sin \varphi \right\}, \quad (106)$$

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_y = v^{l-1} \left\{ l \theta_{lm} \cos m \varphi \sin \theta \sin \varphi \right. \\ \left. + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos m \varphi \cos \theta \sin \varphi \right. \\ \left. - \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \sin m \varphi \cos \varphi \right\}, \quad (107)$$

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_z = v^{l-1} \left\{ l \theta_{lm} \cos m \varphi \cos \theta \right. \\ \left. - \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos m \varphi \sin \theta \right\}. \quad (108)$$

Entre les θ_{lm} on a les relations suivantes :

$$\frac{d\theta_{lm}}{d\theta} = m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \theta_{lm} - \theta_{l,m+1}, \quad (109)$$

$$\theta_{l-1,m+1} = (m - l) \sin \theta \theta_{lm} + \cos \theta \theta_{l,m+1}, \quad (110)$$

$$\theta_{lm} = (l + m - 1) \sin \theta \theta_{l-1,m-1} + \cos \theta \theta_{l-1,m}, \quad (111)$$

$$\theta_{l-1,m+1} = \frac{2m \cos \theta}{\sin \theta} \theta_{l-1,m} \\ - (l + m - 1)(l - m) \theta_{l-1,m-1}. \quad (112)$$

Transformons d'abord (106), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x = v^{l-1} \left\{ \cos m \varphi \cos \varphi \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta \right] \right. \\ \left. + \sin m \varphi \sin \varphi \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\},$$

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x \\ = v^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi] \right. \\ \left. \times \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi] \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\} \\ = v^{l-1} \left\{ \frac{A}{2} \cos(m+1)\varphi + \frac{B}{2} \cos(m-1)\varphi \right\}, \quad (113)$$

avec

$$A = \left(l \sin \theta - \frac{m}{\sin \theta} \right) \theta_{lm} + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta,$$

soit, d'après (109),

$$A = (l - m) \sin \theta \theta_{lm} - \cos \theta \theta_{l,m+1}$$

et, d'après (110),

$$A = -\theta_{l-1,m+1}; \quad (114)$$

d'autre part

$$B = \left(l \sin \theta + \frac{m}{\sin \theta} \right) \theta_{lm} + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta \\ = \left[(l - m) \sin \theta + \frac{2m}{\sin \theta} \right] \theta_{lm} - \cos \theta \theta_{l,m+1} \\ = \frac{2m}{\sin \theta} \theta_{lm} - \theta_{l-1,m+1},$$

soit d'après (111) et (112)

$$\left. \begin{aligned} B &= 2m(l + m - 1) \theta_{l-1,m-1} \\ &\quad + (l + m - 1)(l - m) \theta_{l-1,m-1}, \\ B &= (l + m)(l + m - 1) \theta_{l-1,m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

En combinant (113), (114) et (115), nous obtenons donc :

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x = \frac{1}{2} [-C_{l-1,m+1} \\ + (l + m)(l + m - 1) C_{l-1,m-1}]. \quad (116)$$

Transformons maintenant (107), nous obtenons et

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_y = v^{l-1} \left\{ \sin \varphi \cos m \varphi \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \cos \theta \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \right] - \sin m \varphi \cos \varphi \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_y &= v^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [\sin(m+1)\varphi - \sin(m-1)\varphi] \right. \\ &\quad \times \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \cos \theta \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\sin(m+1)\varphi + \sin(m-1)\varphi] \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\} \\ &= v^{l-1} \left\{ \frac{A}{2} \sin(m+1)\varphi - \frac{B}{2} \sin(m-1)\varphi \right\}, \end{aligned}$$

soit, d'après (114) et (115),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_y &= \frac{1}{2} [-S_{l-1, m+1} - (l+m)(l+m-1)S_{l-1, m-1}]. \quad (117) \end{aligned}$$

Enfin, nous avons pour (108)

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z = v^{l-1} \cos m \varphi \{ (l-m) \cos \theta \theta_{lm} + \sin \theta \theta_{l, m+1} \}.$$

Or, d'après (112), on a

$$\begin{aligned} \sin \theta \theta_{l, m+1} &= 2m \cos \theta \theta_{lm} \\ &\quad - (l+m)(l-m+1) \sin \theta \theta_{l, m-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z &= v^{l-1} \cos m \varphi (l+m) \\ &\quad \times \{ \cos \theta \theta_{lm} - (l-m+1) \sin \theta \theta_{l, m-1} \}, \end{aligned}$$

soit, d'après (110),

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z = v^{l-1} \cos m \varphi (l+m) \theta_{l-1, m}$$

ou

$$\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z = (l+m) C_{l-1, m}. \quad (118)$$

On peut refaire tous les calculs que nous venons de faire pour les fonctions S_{lm} ; on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_x &= v^{l-1} \left\{ l \theta_{lm} \sin m \varphi \sin \theta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \sin m \varphi \cos \theta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \cos m \varphi \sin \varphi \right\}, \\ \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_x &= v^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [\sin(m+1)\varphi + \sin(m-1)\varphi] \right. \\ &\quad \times \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\sin(m+1)\varphi - \sin(m-1)\varphi] \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\} \\ &= v^{l-1} \left\{ \frac{A}{2} \sin(m+1)\varphi + \frac{B}{2} \sin(m-1)\varphi \right\}, \\ \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_x &= \frac{1}{2} [-S_{l-1, m+1} \\ &\quad + (l+m)(l+m-1)S_{l-1, m-1}]; \quad (119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_y &= v^{l-1} \left\{ l \theta_{lm} \sin m \varphi \sin \theta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \sin m \varphi \cos \theta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \cos m \varphi \cos \varphi \right\} \\ &= v^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi] \right. \\ &\quad \times \left[l \theta_{lm} \sin \theta + \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \cos \theta \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi] \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \right\} \\ &= v^{l-1} \left\{ -\frac{A}{2} \cos(m+1)\varphi + \frac{B}{2} \cos(m-1)\varphi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_y &= \frac{1}{2} [C_{l-1, m+1} \\ &\quad + (l+m)(l+m-1)C_{l-1, m-1}]; \quad (120) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z = v^{l-1} \sin m \varphi \left[l \theta_{lm} \cos \theta - \frac{d\theta_{lm}}{d\theta} \sin \theta \right],$$

$$\left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}\right)_z = (l+m) S_{l-1, m}. \quad (121)$$

2. Calcul de $\Gamma \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$ et $\Gamma \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$. — Nous avons

$$\Gamma_x = 0,$$

$$\Gamma_y = \Gamma \sin \psi,$$

$$\Gamma_z = \Gamma \cos \psi,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\Gamma \sin \psi}{2} [-S_{l-1, m+1} \\ &\quad - (l+m)(l+m-1)S_{l-1, m-1} \\ &\quad + \Gamma \cos \psi (l+m) C_{l-1, m}], \quad (122) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\Gamma \sin \psi}{2} [C_{l-1, m+1} \\ &\quad + (l+m)(l+m-1)C_{l-1, m-1} \\ &\quad + \Gamma \cos \psi (l+m) S_{l-1, m}]. \quad (123) \end{aligned}$$

3. Calcul de $\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$ et $\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}}$. — Nous avons

$$\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \wedge \mathbf{v} \right) \Omega = \Omega \left[\left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x v_y - \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_y v_x \right],$$

$$\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \Omega v \sin \theta \left[\sin \varphi \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x - \cos \varphi \left(\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_y \right],$$

soit d'après (106) et (107)

$$\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \Omega v^l \sin \theta \frac{m \theta_{lm}}{\sin \theta} \sin m \varphi$$

où

$$\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = m \Omega S_{lm}. \quad (124)$$

Nous avons, de même,

$$\mathbf{v}_\wedge \Omega \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \Omega v \sin \theta \left[\sin \varphi \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_x - \cos \varphi \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} \right)_y \right],$$

d'où

$$\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = -m \boldsymbol{\Omega} C_{lm}. \quad (125)$$

4. Calcul de $J(C_{lm})$ et $J(S_{lm})$. — De manière générale nous appelons $\mathcal{R}\mathbf{v}$ le vecteur déduit de \mathbf{v} par une rotation \mathcal{R} dans l'espace des vitesses. A une fonction de distribution $f(\mathbf{v})$ nous pouvons associer pour chaque rotation \mathcal{R} une fonction Sf telle que

$$Sf(\mathcal{R}\mathbf{v}) \equiv f(\mathbf{v}). \quad (126)$$

Nous définissons ainsi un opérateur de rotations agissant sur l'espace des fonctions f ; nous allons montrer que les opérateurs J et S commutent; on a, en effet,

$$JSf(\mathbf{u}) = \iint [Sf(\mathbf{u}') - Sf(\mathbf{u})] p \, dp \, d\varepsilon,$$

\mathbf{u} étant un vecteur vitesse initiale et \mathbf{u}' le vecteur vitesse finale correspondant, nous pouvons écrire ceci autrement en introduisant les vecteur \mathbf{v} et \mathbf{v}' tels que

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}\mathbf{v} \quad (127)$$

$$\mathbf{u}' = \mathcal{R}\mathbf{v}'. \quad (128)$$

Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{v}' sont les vecteurs vitesses initiales et finales d'une autre catégorie de chocs; en effet, par suite de la symétrie sphérique de la loi de force, si l'on fait subir à la vitesse initiale une certaine rotation \mathcal{R} la vitesse finale subit la même rotation. Dans ces conditions, on peut écrire

$$JSf(\mathbf{u}) = \iint [Sf(\mathcal{R}\mathbf{v}') - Sf(\mathcal{R}\mathbf{v})] p \, dp \, d\varepsilon = Jf(\mathbf{v}).$$

On a, par ailleurs,

$$SJf(\mathbf{u}) = S[Jf(\mathcal{R}\mathbf{v})],$$

soit, d'après (126),

$$SJf(\mathbf{u}) = Jf(\mathbf{v}),$$

d'où, finalement,

$$SJf(\mathbf{u}) = JSf(\mathbf{u}); \quad (129)$$

J commutant avec tous les opérateurs S , commute en particulier avec les opérateurs ρ_x, ρ_y, ρ_z qu'on peut associer aux rotations infinitésimales; donc on peut trouver trois opérateurs J, ρ^2 et ρ_z commutant entre eux : ils ont une base propre commune et complète.

Or ρ^2 et ρ_z agissent seulement sur θ et φ , et si l'on fait abstraction de v , leur base propre commune est bien définie : ce sont les fonctions sphériques

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm} e^{im\varphi};$$

on peut donc écrire

$$J[Y_{lm}(\theta, \varphi)] = \nu_{lm}(v) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (130)$$

dans laquelle on considère v comme un paramètre. Montrons que la valeur propre ν_{lm} ne dépend pas de l'indice m .

Si f est une fonction propre de J avec la valeur propre k , il est facile de voir que Sf l'est aussi

$$Jf = kf$$

entraîne, puisque S et J commutent,

$$JSf = SJf = Skf = kSf.$$

En particulier, on en déduit que toute somme du type

$$\sum_s \lambda_s S_s Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

est fonction propre de J pour la valeur ν_{lm} ; or on sait qu'une telle somme décrit la fonction sphérique générale d'indice l ; autrement dit on peut s'arranger pour que

$$\sum_s \lambda_s S_s Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{l\mu}(\theta, \varphi), \quad \text{avec } \mu \neq m.$$

Cela prouve que

$$J[Y_{l,\mu}(\theta, \varphi)] = \nu_{lm} Y_{l\mu}(\theta, \varphi), \\ \nu_{lm} = \nu_{l\mu}.$$

On peut donc réécrire (130) :

$$JY_{lm}(\theta, \varphi) = -\nu_l(v) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

On en déduit facilement, d'après (10) et (11),

$$J[v^l Y_{lm}] = -\nu_l v^l Y_{lm},$$

puis, par combinaison,

$$J(C_{lm}) = -\nu_l C_{lm}, \quad J(S_{lm}) = -\nu_l S_{lm} \quad (2). \quad (131)$$

(2) Nous remercions notre collègue M. Yves Ayant (Laboratoire de Physique de l'E. N. S.) pour l'aide qu'il nous a apportée dans la mise au point de cette démonstration.