



**HAL**  
open science

# Applications à la théorie quantique des champs d'une solution exacte de certaines équations linéaires opératorielles

A. Visconti

► **To cite this version:**

A. Visconti. Applications à la théorie quantique des champs d'une solution exacte de certaines équations linéaires opératorielles. *Journal de Physique et le Radium*, 1955, 16 (1), pp.1-15. 10.1051/jphys-rad:019550016010100 . jpa-00235085

**HAL Id: jpa-00235085**

**<https://hal.science/jpa-00235085>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

## LE RADIUM

### APPLICATIONS A LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS D'UNE SOLUTION EXACTE DE CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES OPÉRATORIELLES

Par A. VISCONTI <sup>(1)</sup>,

The Physical Laboratories. The University Manchester.

**Sommaire.** — On étudie dans les premiers paragraphes un certain nombre de propriétés des équations linéaires dans l'espace de Hilbert : définition et propriétés de la résolvante, principes variationnels, etc. Chacun de ces paragraphes comporte des applications à des problèmes quantiques.

On obtient ensuite une solution du type de Fredholm qu'on applique, en traitant, au problème de la diffusion des particules par un champ extérieur. Enfin cette méthode est généralisée et mise en connection avec certaines méthodes de sommation de séries divergentes; puis elle est appliquée à l'étude de la convergence de la matrice  $S$  en théorie quantique des champs.

**Introduction.** — Une partie de ce travail est consacrée au développement d'une Note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences [17c] sur une solution des équations linéaires dans l'espace de Hilbert et sur certaines applications à des questions de renormalisation. Il nous a paru utile de placer les développements de cette Note dans un cadre plus complet en étudiant d'une façon systématique ces équations, tout en ayant constamment en vue les applications possibles à la Mécanique quantique.

Nous étudions dans les quatre premiers paragraphes les questions suivantes : définition de la résolvante, principes variationnels, transformations de contact, étude d'une solution (solution de la largeur de raie) dans un système de référence particulier. La théorie générale exposée dans chacun de ces paragraphes est illustrée par des applications à des problèmes de Mécanique quantique.

La suite de ce travail s'occupe essentiellement de l'étude d'une solution du type de Fredholm : c'est-à-dire d'une solution se présentant sous la forme du quotient de deux séries de puissances du paramètre. Un paragraphe est consacré à la propriété connue, mais généralement peu utilisée, des équations linéaires de l'espace de Hilbert de posséder une solution unique, mais pouvant être définie au moyen de coefficients numériques arbitraires dans

une certaine mesure. Puis transformant l'équation linéaire opératorielle considérée en un système infini d'équations algébriques du premier degré, nous obtenons une solution (très analogue à celle que Fredholm a donnée pour les équations intégrales) dans laquelle ces coefficients numériques prennent, des valeurs bien déterminées données en fonction des traces de l'opérateur noyau  $\mathcal{K}$ . Les formules ainsi obtenues s'appliquent, en particulier, aux équations intégrales à noyau nombre- $c$  : elles se réduisent dans ce cas aux formules de Plemeij [13]. Enfin nous étudions dans les trois paragraphes suivants : la transformation de Cayley de la résolvante qui permet d'obtenir des approximations unitaires; le problème de la diffusion d'une particule par un champ extérieur donné et enfin l'équation linéaire homogène et sa solution. Le problème de la diffusion d'une particule ayant été déjà étudié par Abdus Salam et P. T. Matthews <sup>(2)</sup> [2], nous nous sommes limité à quelques considérations sur la normalisation des probabilités, telle qu'elle a été faite par R. P. Feynman [4] au moyen des diagrammes boucles (closed loops).

Le dixième paragraphe est consacré à une application plus poussée de la méthode des coefficients indéterminés : nous obtenons ainsi des conditions

<sup>(1)</sup> Chargé de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, Institut H. Poincaré, Paris.

<sup>(2)</sup> Notre étude est, en fait, indépendante de celle de ces auteurs dont nous ignorons les travaux au moment de la rédaction de la Note [17c].

d'existence et d'unicité de la solution au moyen de conditions de sommabilité de Nörlund de la série des approximations successives. Puis la méthode ainsi élaborée est appliquée à l'étude de la convergence de la matrice  $S^{(3)}$ . Les procédés de renormalisation ont pour but, comme il est bien connu, de rendre finis tous les termes du développement de la matrice  $S$  en série de puissances de la constante de couplage; ces procédés n'ont donc d'énoncé précis que dans le cadre du calcul de l'opérateur  $S(t)$  [équ. (11.1) de ce travail] par approximations successives. Lorsque tous les termes de cette série ont été ainsi rendus finis, la série elle-même peut être convergente ou divergente. Si la convergence résout entièrement le problème, on ne peut pas dire que la divergence de cette série exclut automatiquement l'existence d'une solution : elle peut tout aussi bien indiquer que, pour la valeur utilisée de la constante de couplage, le développement employé cesse d'être adéquat. Le critère que nous proposons peut précisément permettre de délimiter les types de divergences de la série des approximations successives en lui donnant comme somme, au sens de Nörlund, la solution de l'équation à résoudre. Ce critère semble donc mieux adapté à la théorie quantique des champs que certains critères classiques : il peut, en effet, paraître quelque peu artificiel de chercher à donner des conditions portant sur le noyau de l'équation intégrale de départ [noyau  $H(t)$  de l'équation (11.1)] quand chacun des termes de la série des approximations successives doit être modifié tellement profondément par la suite.

Finalement, il s'agit de décider si les séries divergentes qu'on rencontre en théorie quantique des champs peuvent ou non définir une solution suivant la méthode proposée. Il est malheureusement très difficile de donner des résultats définitifs : ces résultats dépendent, en effet, du comportement des diverses approximations successives qui — même pour le cas de l'électromagnétisme — est très mal connu. Néanmoins nous basant sur certains travaux [8], [12], [16] portant sur des modèles quantiques simples, nous pouvons conclure que certainement dans les cas envisagés, probablement pour l'électromagnétisme, la série de la matrice  $S$  est toujours divergente. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous étudions l'application d'autres méthodes de sommation, en reliant ces méthodes au caractère asymptotique de la série des approximations successives.

Les conclusions de ce dernier paragraphe, comme aussi celles de la remarque qui le suit, ne prétendent

(\*) J. Hamilton [6] a directement étudié, par une méthode très différente de la nôtre, l'équation de l'opérateur  $S(t)$  [équ. (11.1) de ce travail]. Nos conclusions au total concordent avec les siennes. Nous tenons à le remercier pour des remarques qui nous ont été utiles pour la mise au point des paragraphes 10 et 11.

pas être exhaustives, mais tendent à définir les directions possibles suivant lesquelles on pourrait espérer trouver des solutions.

### 1. Généralités sur les équations linéaires.

**La résolvente.** — Considérons l'équation linéaire opératorielle :

$$U = U_0 + \lambda \mathcal{K} U \quad (1.1a)$$

ou bien :

$$U = U_0 + \lambda U \mathcal{K}; \quad (1.1b)$$

$U_0$  et  $\mathcal{K}$  (opérateur noyau) sont des opérateurs connus,  $U$  l'opérateur inconnu et  $\lambda$  un paramètre réel ou complexe. Les opérateurs — en vue des applications à la Mécanique quantique — appartiennent à l'espace de Hilbert. L'existence et l'unicité de la solution seront caractérisés plus loin (cf. § 11) à partir du type de divergence de la série des approximations successives. Pour l'instant, nous nous intéresserons à certains résultats indépendants des développements en séries. On peut définir un opérateur résolvant  $\mathcal{R}(\lambda)$  tel que :

$$U = [1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)] U_0, \quad (1.2a)$$

$$U = U_0 [1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)]. \quad (1.2b)$$

Il est facile de vérifier en portant (1.2) dans (1.1) ou (1.1) dans (1.2) que  $\mathcal{R}$  satisfait aux deux équations :

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{K} + \lambda \mathcal{K} \mathcal{R}(\lambda), \quad (1.3)$$

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{K} + \lambda \mathcal{R}(\lambda) \mathcal{K}, \quad (1.4)$$

d'où l'on déduit

$$[\mathcal{R}(\lambda), \mathcal{K}] = 0. \quad (1.5)$$

La résolution de (1.1) est donc ramenée au calcul d'un opérateur ne dépendant plus que du noyau  $\mathcal{K}$  et non de  $U_0$ . De plus, dans tous les cas où  $1 - \lambda \mathcal{K}$  admet un inverse, on a

$$1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda) = (1 - \lambda \mathcal{K})^{-1}. \quad (1.6)$$

En fait, le problème à étudier en Mécanique quantique est plus compliqué par suite de l'intervention d'un second paramètre  $E$  que l'on peut le plus souvent identifier à l'énergie totale. L'équation (1.1) doit être remplacée par

$$U(\lambda, E) = U_0(E) + \lambda \mathcal{K}(E) U(\lambda, E) \quad (1.7)$$

de telle sorte que les valeurs propres de  $\lambda$  (constante de couplage) sont fonction de  $E$  et qu'inversement à un choix donné de  $\lambda$  correspond une suite de valeurs de  $E$  qui sont valeurs propres.

Par exemple, si l'on considère un système quantique d'hamiltonien total

$$g H(t) = H_1(t) + g H_2(t),$$

l'opérateur d'évolution  $\mathcal{U}(t, t_0)$  du système est régi par le système d'équations [17 c]

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_1(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t H_1(t') \mathcal{U}_1(t', t_0) dt', \\ \mathcal{U}(t, t_0) &= \mathcal{U}_1(t, t_0) \\ &\quad - i g \int_{t_0}^t \mathcal{U}_1(t, t') H_2(t') \mathcal{U}(t', t_0) dt', \end{aligned} \right\} (1.8)$$

les opérateurs noyaux sont dans ce cas les opérateurs intégraux

$$- i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \{ \}$$

et

$$- i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{U}_1(t, t') H_2(t') \{ \}.$$

Dans un formalisme de matrice  $S$  [17 b],  $t_0$  est renvoyé à  $-\infty$  et en prenant la transformée de Fourier par rapport au paramètre  $t$ , on est amené à considérer :

$$u(E, g) = 2\pi \delta_+(E - H_0) - 2i\pi \delta_+(E - H_0) H' u(E, g), \quad (1.9)$$

Les lettres minuscules représentent les opérateurs transformés de Fourier et on a supposé que l'hamiltonien  $H_0$  des particules libres et celui d'interaction  $H'$  sont indépendants de  $t$ . Dans ce cas l'opérateur noyau est un opérateur usuel

$$- 2i\pi \delta(E - H_0) H'$$

et la position des points singuliers de  $u(E, g)$  dépend des deux paramètres  $g$  et  $E$ , ce qui complique évidemment la structure du spectre des valeurs propres.

A titre de deuxième exemple, nous pouvons considérer l'équation régissant l'opérateur d'évolution  $\mathcal{U}(a, b; t, t_0)$  de deux particules  $a, b$  interagissant par un potentiel  $H'(t)$ . Si l'on considère la solution de l'équation [17 a]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) &= \mathcal{U}_0(t^a - t_0^a) \mathcal{U}_0(t^b - t_0^b) \\ &\quad - i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau^a \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau^b \mathcal{U}_0(t^a - \tau^a) \mathcal{U}_0(t^b - \tau^b) \\ &\quad \times H_1(\tau^a, \tau^b) \mathcal{U}(\tau^a, \tau^b; t_0^a, t_0^b), \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec

$$H_1(t^a, t^b) = H'(t^a) \delta(t^a - t^b). \quad (1.11)$$

On peut voir que l'on a

$$\lim_{\substack{t^a = t^b = t \\ t_0^a = t_0^b = t_0}} \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) = \mathcal{U}(a, b; t, t_0). \quad (1.12)$$

L'opérateur noyau est dans ce cas l'opérateur intégral

$$\begin{aligned} &- i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau^a \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau^b \mathcal{U}_0(t^a - \tau^a) \\ &\quad \times \mathcal{U}_0(t^b - \tau^b) H_1(\tau^a, \tau^b) \{ \} \end{aligned}$$

portant sur les deux variables  $\tau_a$  et  $\tau_b$ . Si l'on se place en représentation  $x$  et si l'on représente par  $K(3, 4; 1, 2)$ ,  $K_+^a$ ,  $K_+^b$  les noyaux des opérateurs intégraux correspondant à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}_0$  [ $K_+$  correspond à l'interprétation de Feynmann des antiparticules et permet de considérer des limites infinies dans l'équation (1.13)], on obtient une équation formellement identique à celle de Bethe-Salpeter :

$$\begin{aligned} &K(3, 4; 1, 2) \\ &= K_+^a(3, 1) K_+^b(4, 2) \\ &\quad + i \int K_+^a(3, 5) K_+^b(4, 6) G(5, 6; 7, 8) K(7, 8, 1, 2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

les intégrations sont faites sur les variables deux fois répétées et

$$G(5, 6; 7, 8) = H'(5) \delta(5, 7) \delta(6, 8). \quad (1.14)$$

Il est évident que l'interprétation de l'équation (1.14) et de l'expression généralisée de  $G$  par la théorie quantique des champs reste un problème délicat.

**2. Principes variationnels pour  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{R}$ .** — Considérons l'opérateur  $\Omega$  défini comme suit

$$\Omega = \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U) - \mathcal{K}U. \quad (2.1)$$

En faisant varier indépendamment  $U$  et  $\mathcal{R}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \Delta\mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U) \\ &\quad + (\mathcal{R} - \lambda \mathcal{R} \mathcal{K} - \mathcal{K}) \Delta U. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Écrivant que la variation  $\Delta\Omega$  est nulle quelles que soient les variations arbitraires  $\Delta\mathcal{R}$  et  $\Delta U$ , on obtient l'équation (1.1), sa résolvante (1.4) et la relation

$$\Omega_{st} = - \mathcal{K}U. \quad (2.3)$$

l'indice st signifiant « stationnaire ». Dans le cadre de la Mécanique quantique, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega(t, t_0) &= \int_{t_0}^t dt' \left\{ \mathcal{R}(t, t') \right. \\ &\quad \times \left[ \mathcal{U}(t' - t_0) - \mathcal{U}_0(t' - t_0) \right. \\ &\quad \left. \left. + i g \int_{t_0}^{t'} \mathcal{U}_0(t' - \tau) H'(\tau) \mathcal{U}(\tau, t_0) d\tau \right] \right. \\ &\quad \left. - i g \mathcal{U}_0(t - t') H'(t') \mathcal{U}(t', t_0) \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

et il est facile de vérifier que les éléments de matrice de  $\Omega$  stationnaire donnent directement les amplitudes de transition [17 b].

Il est intéressant d'obtenir des principes variationnels portant sur des nombres- $c$  et non des opérateurs. Supposons d'abord que la trace de l'opérateur  $\Omega$  existe

$$\Omega \equiv \text{Tr} \Omega \equiv \sum_n \langle n | \Omega | n \rangle, \quad (2.5)$$

on a alors

$$\omega = \text{Tr} \{ \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U) - \mathcal{K}U \}. \quad (2.6)$$

Écrivons la variation  $\Delta\omega$  en explicitant la trace, on a

$$\begin{aligned} \Delta\omega = & \sum_{n, n'} \langle n | \Delta\mathcal{R} | n' \rangle \langle n' | U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U | n \rangle \\ & + \sum_{n, n'} \langle n | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R}\mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle \langle n' | \Delta U | n \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les nombres  $c \langle n | \Delta\mathcal{R} | n' \rangle$  et  $\langle n | \Delta U | n' \rangle$  peuvent être arbitrairement choisis de sorte que par un raisonnement courant en calcul des variations, on conclut

$$\left. \begin{aligned} \langle n' | U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U | n \rangle &= 0, \\ \langle n | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R}\mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$\langle n' |$  et  $|n\rangle$  sont des vecteurs quelconques d'un système orthogonal complet, on a donc bien (1.1) et (1.4).

Supposons en second lieu que  $\omega$  soit divergent :  $\langle I |$  et  $|o\rangle$  étant deux vecteurs tels que  $\langle I | \Omega | o \rangle$ , a un sens (état final et initial en Mécanique quantique), considérons le nombre

$$\begin{aligned} T_{10} &= \langle I | \Omega | o \rangle \\ &= \langle I | \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U) - \mathcal{K}U | o \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

d'où la variation

$$\begin{aligned} \Delta T_{10} &= \sum_n \langle I | \Delta\mathcal{R} | n \rangle \langle n | U - U_0 - \lambda \mathcal{K}U | o \rangle \\ &+ \sum_{n'} \langle I | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R}\mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle \langle n' | \Delta U | o \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Posons alors

$$U_0 | o \rangle = | \Psi_0 \rangle, \quad U_0 | o \rangle = | \Psi \rangle \quad (2.11)$$

( $\Phi$  et  $\Phi_0$  représentent évidemment les vecteurs d'état du système total et des particules libres en Mécanique quantique), on obtient les équations :

$$\left. \begin{aligned} | \Psi \rangle &= | \Psi_0 \rangle + \lambda \mathcal{K} | \Psi \rangle, \\ \langle I | \mathcal{R} &= \langle I | \mathcal{K} + \lambda \langle I | \mathcal{K}\mathcal{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Ces équations sont moins générales que les équations (1.1) et (1.4), car elles intéressent uniquement des vecteurs bien déterminés de l'espace de Hilbert. Pour les applications à la Mécanique quantique, on se reportera à l'article déjà cité [17 b) où ce problème est étudié de façon assez détaillée.

**3. Les transformations de contact de l'équation linéaire.** — L'équation (1.1) est covariante pour toute transformation canonique

$$U = S^{-1} U' S$$

et devient

$$U' = S U_0 S^{-1} + \lambda (S \mathcal{K} S^{-1}) U'. \quad (3.4)$$

Les exemples de ce type de transformation sont nombreux en Mécanique quantique, par exemple la représentation d'interaction fait correspondre à  $\mathcal{U}(t, t_0)$

$$\mathcal{U}^{\text{int}}(t, t_0) = \mathcal{U}_0^{-1}(t) \mathcal{U}(t, t_0) \mathcal{U}_0(t_0). \quad (3.2)$$

Il est, peut-être utile de noter que la forme opératorielle (1.11) de l'équation de Bethe-Salpeter prend une forme simple dans une représentation d'interaction généralisée. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\text{int}}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \\ = \mathcal{U}_0^{-1}(t^a) \mathcal{U}_0^{-1}(t^b) \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \mathcal{U}_0(t^a) \mathcal{U}_0(t^b), \end{aligned} \quad (3.3)$$

on voit immédiatement que  $\mathcal{U}^{\text{int}}$  satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\text{int}}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \\ = 1 - i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau_a \\ \times \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau_b H_1^{\text{int}}(\tau_a, \tau_b) \mathcal{U}^{\text{int}}(\tau_a, \tau_b; t_0^a, t_0^b), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} H_1^{\text{int}}(t^a, t^b) \\ = \mathcal{U}_0^{-1}(t^a) \mathcal{U}_0^{-1}(t^b) H_1(t^a, t^b) \mathcal{U}_0(t^a) \mathcal{U}_0(t^b), \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'intérêt de ces transformations réside en partie dans le fait qu'elles permettent de simplifier le noyau d'une équation opératorielle lorsqu'il est somme de deux noyau

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \quad (3.6)$$

et que la solution  $U_1$  de l'équation relative au noyau  $\mathcal{K}_1$  est connue

$$U_1 = 1 + \lambda \mathcal{K}_1 U_1. \quad (3.7)$$

Considérons la solution de (1.1) par approximations successives : à l'intérieur du domaine de convergence de cette série et à l'extérieur de ce domaine par prolongement analytique de la fonction  $U$  de  $\lambda$ , on a

$$\begin{aligned} U &= (1 - \lambda \mathcal{K}_1 - \lambda \mathcal{K}_2)^{-1} U_0 \\ &= [(1 - \lambda \mathcal{K}_1)(1 - \lambda(1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} \mathcal{K}_2)]^{-1} U_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

et par application du théorème sur l'inverse d'un produit

$$U = [1 - \lambda(1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} \mathcal{K}_2]^{-1} (1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} U_0. \quad (3.9)$$

On transforme (3.9) d'après l'expression (3.7) de  $U_1$

$$U = (1 - \lambda U_1 \mathcal{K}_2)^{-1} U_1 U_0, \quad (3.10)$$

de sorte que finalement on obtient

$$U = U_1 U_0 + \lambda U_1 \mathcal{K}_2 U, \quad (3.11)$$

équation qui par multiplication gauche et droite respectivement par  $U_1^{-1}$  et  $U_1$  donne l'équation du transformé canonique;

$$U' = U_1^{-1} U U_1.$$

Les applications de cette transformation sont nom-

breuses; considérons comme premier exemple l'équation de l'opérateur d'évolution d'un système d'hamiltonien;  $H_1(t) + H_2(t)$ , cet opérateur obéit à l'équation

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t [H_1(t') + H_2(t')] \mathcal{U}(t', t_0) dt' \quad (3.12)$$

qui peut se mettre sous la forme du système d'équations intégrales (1.8) par application des formules (3.7) et (3.11).

Considérons comme deuxième exemple le cas où l'hamiltonien est celui de l'électromagnétisme, on a

$$\begin{aligned} H_1(t) + H_2(t) \\ = -ie \int \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu \Psi(\mathbf{x}, t) A_\mu(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \\ - c^2 \delta m \int \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Définissons l'opérateur  $V(t, t_0)$  solution de l'équation

$$\begin{aligned} V(t, t_0) = 1 - \delta m c^2 \\ \times \int_{t_0}^t dt' \int \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t') \Psi(\mathbf{x}, t') d^3\mathbf{x} V(t', t_0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

alors l'opérateur du système matière plus rayonnement obéit à l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, t_0) = V(t, t_0) - ie \int_{t_0}^t dt' V(t, t') \\ \times \int \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t') \gamma_\mu \Psi(\mathbf{x}, t') A_\mu(\mathbf{x}, t') d^3\mathbf{x} U(t', t_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

La transformation unitaire (3.1) engendrée par  $V(t)$ , tel que

$$V(t, t_0) = V(t) V^{-1}(t_0).$$

inclut dans l'opérateur d'évolution la correction de masse : résultat classique démontré par Schwinger de façon plus compliquée.

**4. Une solution pour un système d'axes particulier : la solution du type d'amortissement.** — On peut se proposer de chercher une solution de la forme :

$$U = (1 + \rho) \Lambda, \quad (4.1)$$

avec  $\Lambda$  différent de  $U_0$ . Il est facile de prévoir qu'on n'obtiendra ce faisant aucun avantage, sauf dans le cas très particulier où l'on spécifie que le système orthonormal complet choisi comme base est celui des vecteurs propres de  $U_0$ . On a alors une solution, qui bien qu'elle ne soit définie que pour ce seul système de référence, permet d'obtenir en Mécanique quantique la solution de la « damping theory » sous la forme, par exemple, que lui ont donné Arnous et Zienau [1]. Le choix de ce système de référence permet de décomposer chaque opérateur  $A$  en deux opérateurs : le premier n'ayant

que des éléments diagonaux  $A_d$ , le deuxième des éléments non diagonaux  $A_{n \neq d}$

$$A = A_d + A_{n \neq d}. \quad (4.2)$$

Nous allons faire les hypothèses de départ (que nos calculs confirmeront) :  $\Lambda$  est un opérateur diagonal alors que  $\rho$  est un opérateur non diagonal.

Bien qu'il soit plus expéditif de porter directement (4.1) dans l'équation (1.1), nous allons rattacher, cette solution à la résolvante (1.3) et (1.4) pour des raisons d'unité d'exposition.

Utilisant (1.2), on a

$$U = U_0 + \lambda \mathcal{R} U_0 = U_0 + \lambda \mathcal{R}_d U_0 + \lambda \mathcal{R}_{n \neq d} U_0$$

identifiant avec (4.1), il vient

$$\Lambda = (1 + \lambda \mathcal{R}_d) U_0, \quad (4.3a)$$

$$\rho \Lambda = \lambda \mathcal{R}_{n \neq d} U_0, \quad (4.3b)$$

d'où

$$\rho = \frac{\lambda \mathcal{R}_{n \neq d}}{1 + \lambda \mathcal{R}_d}. \quad (4.4)$$

Ces expressions résolvent en effet le problème, mais on peut voir qu'en Mécanique quantique elles conduisent à des formes indéterminées et qu'il est utile d'exprimer  $\Lambda$  en fonction de  $\rho$  et  $\rho$  en fonction de  $\mathcal{K}$ . Pour cela nous décomposons l'équation de la résolvante (1.3) en deux

$$\mathcal{R}_d = \mathcal{K}_d + \lambda \mathcal{K}_d \mathcal{R}_d + \lambda (\mathcal{K}_{n \neq d} \mathcal{R}_{n \neq d})_d, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{R}_{n \neq d} = \mathcal{K}_{n \neq d} + \lambda \mathcal{K}_d \mathcal{R}_{n \neq d} + \lambda \mathcal{K}_{n \neq d} \mathcal{R}_d + \lambda (\mathcal{K}_{n \neq d} \mathcal{R}_{n \neq d})_{n \neq d}. \quad (4.6)$$

Tirons  $\mathcal{R}_d$  de (4.5) en utilisant le fait que  $1 - \lambda \mathcal{K}_d$  est diagonal, donc possède un inverse, et portons cette expression dans (4.3 a)

$$\Lambda = [1 + \lambda^2 (\mathcal{K}_{n \neq d} \mathcal{R}_{n \neq d})_d] \frac{U_0}{1 - \lambda \mathcal{K}_d}. \quad (4.7)$$

Si nous introduisons dans (4.7) l'expression de  $\mathcal{R}_{n \neq d} = \lambda^{-1} \rho \Lambda U_0^{-1}$  tirée de (4.3 b), nous obtenons une équation en  $\Lambda$

$$\Lambda = U_0 + \lambda (\mathcal{K} + \mathcal{K}_{n \neq d} \rho)_d \Lambda \quad (4.8)$$

qui se résout immédiatement puisque tous les opérateurs sont diagonaux

$$\Lambda = \frac{U_0}{1 + \lambda [\mathcal{K} + \mathcal{K}_{n \neq d} \rho]_d}. \quad (4.9)$$

En introduisant  $\rho$  dans (4.6), on obtient facilement

$$\rho = \lambda [\mathcal{K} + \mathcal{K}_\rho]_{n \neq d}. \quad (4.10)$$

En Mécanique quantique, l'équation (1.9) donne

$$\begin{aligned} U_0 &= 2\pi \delta_+(E - H_0); \\ \mathcal{K} &= -2i\pi \delta_+(E - H_0) H'; \quad \lambda = g. \end{aligned}$$

Une simple application de la formule (4.9) montre que

$$\Lambda = \frac{2\pi \delta_+(E - H_0)}{1 - 2i\pi g \delta_+(E - H_0) (H' + H' \rho)_d},$$

expression qui peut encore s'écrire

$$\Lambda = \frac{i}{E - H_0 - g(H' + H'\rho)_d}$$

L'opérateur largeur de raie est alors proportionnel à

$$g(H' + H'\rho)_{n,d}$$

On voit enfin que  $\rho$  satisfait à l'équation de Heitler

$$\rho = 2i\pi g\delta_+(E - H_0)(H' + H'\rho)_{n,d}$$

Il n'y a aucune difficulté à retrouver les formules que nous avons précédemment données [17 b] lorsque  $H'$  dépend du temps (4).

### 5. La solution par coefficients indéterminés.

— Revenons à la solution de (1.1) au moyen de la résolvante (1.2). Considérons un opérateur :

$$\mathcal{O}(\lambda) = \sum_0 \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}, \quad (5.1)$$

où les  $\mathcal{O}_n$  sont des opérateurs indépendants de  $\lambda$ , et un nombre  $cD(\lambda)$

$$D(\lambda) = \sum_0 \frac{(-\lambda)^n}{n!} D_n. \quad (5.2)$$

Ces deux séries sont pour l'instant purement formelles. Cherchons à représenter  $\mathcal{R}(\lambda)$  par le quotient de l'opérateur  $\mathcal{O}(\lambda)$  par le nombre  $cD(\lambda)$

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{O}(\lambda)}{D(\lambda)}. \quad (5.3)$$

En portant (5.3) dans l'équation (1.3) de la résolvante, il est facile de voir que l'on obtient la relation de récurrence

$$\mathcal{O}_{n+1} = D_n \mathcal{K} - n \mathcal{K} \mathcal{O}_n \quad (5.4)$$

qui montre que les  $\mathcal{O}_n$  sont univoquement déterminés par le choix des  $D_n$  qui restent arbitraires. Cette même formule permet d'ailleurs d'exprimer  $D_n$  en fonction de  $D_0, \dots$ , et des puissances de 1 à  $n$  de  $\mathcal{K}$  : on trouvera plus loin (6.8) cette expression.

Si donc l'équation (1.1) admet une solution unique dans un certain domaine de  $\lambda$  (les conditions d'unicité seront précises au paragraphe 10) et si l'on peut trouver un ensemble de nombre  $D_n$  tels que (5.1) et (5.2) soient tous deux convergents dans ce domaine de  $\lambda$ , on aura de ce fait déterminé la solution de (1.1).

(4) Pour obtenir les résultats sous la forme donnée par Arnous et Zienau, il faut poser

$$\rho = -2i\pi\delta_+(E - H_0)U,$$

où  $U$  représente l'opérateur défini par ces auteurs : opérateur sans éléments dangereux dans le système des vecteurs propres de  $H_0$ . Nous tenons à remercier E. Arnous pour d'utiles discussions autour de ces questions.

Le cas  $D_0 = D_n = 0$  pour  $n \neq 1$  donne la solution par approximations successives

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_0 \lambda^n \mathcal{K}^{n+1}; \quad (5.5)$$

ce cas montre d'ailleurs qu'il ne suffit pas que l'une des deux séries (dans ce cas celle du dénominateur) soit une série entière pour que l'on ait une solution valant quel que soit : On doit aussi noter que si les séries (5.1), (5.2) et (5.5) sont à la fois toutes convergentes, une simple application du théorème de Cauchy sur la multiplication des séries montre que

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{O}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{D(\lambda)\sum\lambda^n\mathcal{K}^{n+1}}{D(\lambda)} = \sum\lambda^n\mathcal{K}^{n+1}. \quad (5.6)$$

Néanmoins le cas particulièrement intéressant, celui qui peut *a priori* apporter un élargissement dans la définition de la solution de (1.1), est celui où les deux séries (5.1), (5.2) étant divergentes,  $\mathcal{R}(\lambda)$  quotient de deux séries divergentes, possède quand même une limite. Avant d'examiner ce point, nous allons étudier le cas où en utilisant des hypothèses assez restrictives sur  $\mathcal{K}$  : en supposant par exemple que  $\mathcal{K}$  est un opérateur complètement continu, on peut former un opérateur  $\mathcal{R}(\lambda)$  quotient de deux séries convergentes.

6. La solution du type de Fredholm. — La méthode de Volterra et Fredholm [18], pour la solution d'une équation intégrale consiste à remplacer cette équation par un système d'équations algébriques du premier degré, d'écrire explicitement la solution de ce système par la règle de Cramer et de chercher la limite de cette solution lorsque le nombre d'équations de ce système tend vers l'infini. C'est une méthode analogue que nous allons employer et qui permettra de construire la fonction méromorphe en  $\lambda$  solution de (1.1).

Soit un système orthogonal complet  $|n\rangle$  et  $|0\rangle$  un vecteur arbitraire, la solution de (1.1) est ramenée par projection sur les divers vecteurs de ce système à la solution de

$$\sum_{\nu} (\delta_{m\nu} - \lambda \langle m | \mathcal{K} | \nu \rangle \langle \nu | U | 0 \rangle) = \langle m | U_0 | 0 \rangle \quad (6.1)$$

dont la solution est le quotient de deux séries de puissances en  $\lambda$ . Le dénominateur s'écrit, d'après la règle de Cramer, sous la forme d'un déterminant qui admet comme développement de Taylor ([18], p. 223, form. (3) et sq.)

$$\begin{aligned} & \|\delta_{mn} - \lambda \langle m | \mathcal{K} | n \rangle\| \\ &= 1 - \lambda \sum_{N_1} \langle N_1 | \mathcal{K} | N_1 \rangle \\ &+ \frac{(-\lambda)^2}{2!} \sum_{N_1, N_2} \left| \begin{array}{cc} \langle N_1 | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle N_1 | \mathcal{K} | N_2 \rangle \\ \langle N_2 | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle N_2 | \mathcal{K} | N_2 \rangle \end{array} \right| + \dots \\ &= \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} D_n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Il semble d'après cette expression que le dénominateur dépende du choix de la base  $|n\rangle$  : nous allons montrer qu'il est, en fait, indépendant en prouvant que les  $D_n$  sont donnés en fonction des

traces de  $K_1, K^2, \dots$ . Mais auparavant, considérons le numérateur pour l'inconnue  $\langle I | U | 0 \rangle \langle I |$  étant un des vecteurs de la base choisie. Soit  $\langle I | D(\lambda) | 0 \rangle$  ce numérateur, il est toujours donné par la même règle de Cramer [(13, p. 225 et sq.) sous la forme :

$$\langle I | \mathcal{O}(\lambda) | 0 \rangle = \langle I | U_0 | 0 \rangle D(\lambda) + \lambda \left\{ \sum_{N_1} \langle I | \mathcal{K} | N_1 \rangle \langle N_1 | U_0 | 0 \rangle - \lambda \sum_{N_1, N_2} \begin{vmatrix} \langle I | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle I | \mathcal{K} | N_2 \rangle \\ \langle N_1 | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle N_2 | \mathcal{K} | N_2 \rangle \end{vmatrix} \langle N_1 | U_0 | 0 \rangle + \dots \right\} \quad (6.3)$$

en faisant rentrer chacun des facteurs dans la déterminant qu'il multiplie, on a finalement

$$\begin{aligned} \langle I | \mathcal{O}(\lambda) | 0 \rangle &= \langle I | U_0 | 0 \rangle D(\lambda) + \lambda \left\{ \langle I | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle - \lambda \sum_{N_1} \begin{vmatrix} \langle I | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle & \langle I | \mathcal{K} U_0 | N_1 \rangle \\ \langle N_1 | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle & \langle N_1 | \mathcal{K} U_0 | N_1 \rangle \end{vmatrix} + \dots \right\} \\ &= \langle I | U_0 + \lambda \sum_{n=0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ces formules écrites, revenons au dénominateur; on vérifie que chacun des déterminants formant  $D(\lambda)$  est de la forme générale :

$$|B_{N_1}; A_{N_2} \dots A_{N_n}| = \begin{vmatrix} B_{N_1 N_1} & B_{N_1 N_2} & \dots & B_{N_1 N_n} \\ A_{N_2 N_1} & A_{N_2 N_2} & \dots & A_{N_2 N_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N_n N_1} & A_{N_n N_2} & \dots & A_{N_n N_n} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

et que ces déterminants vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \sum_{N_1 \dots N_n} |B_{N_1}; A_{N_2} \dots A_{N_n}| \\ &= \sum_{N_1 \dots N_{n-1}} |A_{N_1} \dots A_{N_{n-1}}| \text{Tr } B \\ &\quad - (n-1) \sum (AB)_{N_1; A_{N_2} \dots A_{N_n}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

avec

$$\text{Tr } A = \sum_{N_1} \langle N_1 | A | N_1 \rangle$$

invariant indépendant du choix du système  $|N\rangle$ . Appliquant cette relation de récurrence aux divers déterminants entrant dans le développement (6.2), on trouve aisément la formule de récurrence

$$D_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \text{Tr } \mathcal{K}^\nu, \quad D_0 = 1 \quad (6.7)$$

Ainsi donc le dénominateur se trouve exprimé en fonction des traces des diverses puissances de  $\mathcal{K}$ . Le calcul du numérateur peut se faire soit par l'application de (5.4) avec le choix (6.7) pour les  $D_n$ , soit encore en formulant pour les  $\mathcal{O}_n$  définis par (6.4) une relation de récurrence analogue à (6.5). L'une

et l'autre méthode conduisent après quelques calculs à (6)

$$\mathcal{O}_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \mathcal{K}^\nu. \quad (6.8)$$

En comparant avec (6.7), on tire :

$$D_n = \text{Tr } \mathcal{O}_n, \quad (6.9)$$

ce qui réduit finalement le calcul à l'évaluation des  $\mathcal{O}_n$  successifs et à leurs traces.

Finalement, dans l'expression de

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{O}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_0 \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}}{\sum_0 \frac{(-\lambda)^n}{n!} D_n}, \quad (6.10)$$

la détermination des  $D_n$  et  $\mathcal{O}_n$  successifs est assurée

(6) Les trois premiers termes de  $\mathcal{O}(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont explicitement donnés par P. M. Morse et H. Feshbach ([10], p. 1023, form. (9 1, 6.1), ouvrage publié postérieurement à [17 c]). Il est d'ailleurs très intéressant de rapprocher le point de vue de ces auteurs du nôtre : M. et F. supposent dès le début que les seuls points singuliers de la solution sont des pôles et ils se proposent de déterminer leur fonction  $\chi(\lambda)$  [qui n'est autre que notre  $D(\lambda)$ ] de telle sorte qu'elle ait pour zéros les pôles de la solution. Cette unique condition laisse une certaine indépendance dans le choix de  $\chi(\lambda)$  : un des choix les plus simples consiste à poser :

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \text{Tr} \{ \mathcal{K} (1 - \lambda \mathcal{K})^{-1} \}.$$

Leur méthode est sensiblement plus compliquée que celle que nous employons et les formules qu'ils obtiennent moins maniables. Remarquons que les pôles à l'encontre des points singuliers essentiels et des points de branchement sont des points d'unicité (singuliers) de la solution.

soit par (6.8) et (6.9), soit par la relation de récurrence (5.4)

$$\omega_{n+1} = \mathcal{K} \text{Tr} \omega_n - n \mathcal{K} \omega_n \quad (6.11)$$

combinée avec (6.9).

Considérons pour donner une première application de ces formules une équation du type de celles que l'on rencontre en théorie des collisions

$$U(t) = U_0(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, t') U(t') dt', \quad (6.12)$$

où  $\mathcal{F}(t, t')$  est un opérateur des paramètres  $t$  et  $t'$  : cette équation est évidemment une équation intégrale essentiellement différente de celles considérées par Fredholm : l'opérateur  $\mathcal{K}$  est dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \}$$

et le calcul des nombres- $c$   $D_n$  se fait par l'intermédiaire des nombres- $c$

$$\text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \} \right\}, \\ \text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \}^{(2)} \right\}, \quad \dots$$

Soit  $\varphi_n$  un système orthogonal complet formant le domaine de définition des opérateurs,  $\delta(t-t')$  représente alors un autre système complet pour les fonctions de variables  $t$  et  $t'$  de telle sorte que l'équation (6.12) est définie dans l'espace sous-tendu par le système orthogonal complet :  $\varphi_n \delta(t-t')$ . Par suite

$$\text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \} \right\} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_n \langle \varphi_n \delta(t-t') \\ \times \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \} \right| \varphi_n \delta(t-t') \rangle \\ = \sum_n \langle \varphi_n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, t) dt \right| \varphi_n \rangle \quad (6.13)$$

et

$$\text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \}^{(2)} \right\} \\ = \sum_n \langle \varphi_n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, \tau_2) \mathcal{F}(\tau_2, t) d\tau_2 dt \right| \varphi_n \rangle.$$

Ces formules permettent le calcul du dénominateur, pour le numérateur on remarquera que chacun des opérateurs  $\omega_n$  est un opérateur intégral

$$\omega_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \}^\nu \quad (6.14)$$

de noyau opératoirel

$$(n-1)! \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt_\nu \dots dt_2 \mathcal{F}(t, t_\nu) \dots \mathcal{F}(t_2, \tau). \quad (6.15)$$

$\omega(\lambda)$  est donc lui-même un opérateur intégral.

On peut aisément vérifier que lorsque  $\mathcal{F}(t, \tau)$  est un nombre- $c$ , la formule (6.12) est alors une équation intégrale usuelle, les formules (6.9), (6.10), (6.11) peuvent se ramener aux formules de Plémelj (13) et [15]). Nous démontrerons enfin au paragraphe 11 que si une ou plusieurs traces sont infinies, les formules obtenues sont valables en remplaçant les traces infinies par des zéros.

**7. Transformation de Cayley de la résolvente.** — Nous allons faire correspondre à l'opérateur  $\mathcal{R}(\lambda)$  un opérateur  $\mathcal{A}$  (qui en Mécanique quantique est l'opérateur réactance de Schwinger) au moyen de la transformation de Cayley

$$1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda) = \frac{1 - \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}{1 + \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}, \quad (7.1)$$

d'où

$$U = \frac{1 - \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}{1 + \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}. \quad (7.2)$$

On sait que cette transformation jouit de la propriété de faire correspondre à l'opérateur hermitien  $\lambda \mathcal{A}$  un opérateur unitaire  $1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)$  et inversement. Elle va nous permettre de résoudre un problème important en Mécanique quantique : obtenir une méthode de perturbations — suivant le schéma de Fredholm — unitaire à chacune de ses approximations. Il convient de remarquer tout d'abord, que s'il est facile de donner des conditions suffisantes pour que la solution de (1.1) soit hermitique (par exemple si  $U_0$  et  $\lambda \mathcal{K}$  sont hermitiens, il suffit :  $[\mathcal{K}, U_0] = 0$ ), le problème de son unitarité est beaucoup plus difficile. Cette unitarité lorsque  $U_0$  est lui-même unitaire s'exprime, comme on peut le voir au moyen de la résolvente

$$(\lambda \mathcal{R})^+ + \lambda \mathcal{R} + |\lambda|^2 \mathcal{R}^+ \mathcal{R} = 0, \quad (7.3)$$

mais cette formule est d'un maniement difficile. En Mécanique quantique le problème est heureusement plus aisé à étudier : on vérifie, par exemple, facilement l'unitarité de  $S(t)$  en représentation d'interaction [éq. (11.1)] en cherchant l'équation différentielle à laquelle cet opérateur obéit. Le problème se complique d'ailleurs quand on considère  $S = S(+\infty)$ . Nous allons donc supposer dans (1.1)  $U$  et  $U_0$  unitaires, il s'ensuit que  $1 + \lambda \mathcal{R}$ , l'est aussi. Considérons la solution (6.10) comme

une solution approchée, c'est-à-dire arrêtons le développement du numérateur et du dénominateur à la puissance  $\lambda^n$  : la solution ainsi obtenue cesse généralement d'être unitaire.

Considérons, d'autre part, l'opérateur  $\mathfrak{A}$ , il satisfait en vertu de sa définition (7.1) à l'équation

$$\mathfrak{A}(\lambda) = i\mathcal{R} - \frac{\lambda}{2}\mathcal{R}\mathfrak{A}. \quad (7.4)$$

Pour  $U$  unitaire,  $\lambda\mathfrak{A}$  est hermitien ainsi que toutes ces itérées de sorte que tirant  $\lambda\mathfrak{A}$  à une approximation quelconque de cette équation et portant dans (7.1), nous aurons obtenu ainsi une solution approchée unitaire. Il est facile de donner le développement de  $\lambda\mathfrak{A}$  en fonction des opérateurs  $\omega_n$  et des nombres  $D_n$ , écrivons

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \alpha_{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} A_n}, \quad (7.5)$$

$\alpha_n$  étant des opérateurs,  $A_n$  des nombres indépendants tous deux de  $\lambda$ . Portant (6.10) et (7.5) en (7.4), on obtient :

$$\alpha(\lambda) D(\lambda) = i\omega(\lambda) A(\lambda) - \frac{\lambda}{2} \omega(\lambda) \alpha(\lambda).$$

Développant chacun des opérateurs suivant les puissances de  $\lambda$  et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de  $\lambda$ , il vient la formule de récurrence assez compliquée

$$\frac{\alpha_{p+1}}{p!} = i \sum_{\nu=0}^p \frac{A_{p-\nu}}{p-\nu!} \frac{\omega_{\nu+1}}{\nu!} + \sum_{\rho=1}^p \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega_{p+1-\rho}}{p-\rho!} - \frac{D_{p+1-\rho}}{p+1-\rho!} \right\} \frac{\alpha_{\rho}}{\rho-1!}, \quad (7.6)$$

les coefficients  $A_n$  demeurent indéterminées, mais assujettis à rendre  $\mathfrak{A}(\lambda)$  convergent. On peut vérifier que dans la mesure où un développement en série de puissances de  $\mathcal{R}(\lambda)$  et de  $\mathfrak{A}(\lambda)$  est possible, c'est-à-dire dans la mesure où l'on peut poser

$$D_0 = A_0 = 1, \quad D_n = A_n = 0 \quad (n \neq 1),$$

les formules se simplifient et donnent

$$\alpha_1 = i\mathcal{K}, \quad \alpha_2 = \frac{i}{2}\mathcal{K}^2, \quad \dots$$

Il est enfin utile de signaler une propriété basée toujours sur l'hermiticité de  $\lambda\mathfrak{A}$ . Écrivons après multiplication par  $\lambda$  l'équation (7.4) ainsi que son adjointe; ajoutons et retranchons les équations ainsi obtenues

$$\lambda\mathfrak{A} = (-\lambda\mathcal{R})_{ah} - \frac{1}{2}(\lambda\mathcal{R})_h\lambda\mathfrak{A},$$

$$(\lambda\mathcal{R})_h = \frac{1}{2}(\lambda\mathcal{R})_{ah}\lambda\mathfrak{A}$$

en remarquant que  $\mathfrak{A}$  commute avec  $\mathcal{R}$  et en désignant comme on le fait habituellement

$$\mathfrak{A}_h = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^+}{2}, \quad \mathfrak{A}_{ah} = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^+}{2i}.$$

Éliminant  $\lambda(\mathcal{R})_h$  entre ces deux équations, on obtient

$$(\lambda\mathfrak{A}) = (-\lambda\mathcal{R})_{ah} - \frac{\lambda}{2}(\lambda\mathcal{R})_{ah}\lambda\mathfrak{A}. \quad (7.7)$$

Cette dernière relation met en évidence une propriété importante de l'opérateur  $\lambda\mathfrak{A}$  : cet opérateur ne dépend que de la partie antihermitienne de l'opérateur  $\lambda\mathcal{R}$ . Cette propriété est utile en théorie de la matrice  $S$  : elle a été signalée par J. Schwinger, S. N. Gupta, etc. et est employée pour simplifier certains calculs de sections efficaces.

**8. Application à la diffusion d'une particule par un champ extérieur donné.** — Ce problème a été étudié de façon très complète par A. Salam et P. T. Matthews [2]. Ils ont envisagé le cas d'un champ de fermions quantifiés en interaction avec un champ extérieur donné dépendant du temps. Ils ont montré en utilisant certains résultats de F. Smithies [15], que pour l'ensemble des champs considérés en Physique — champs différant de 0 dans un domaine fini d'espace-temps — la solution du problème existe et est unique.

Nous ne reviendrons pas sur ce problème, mais nous allons considérer un problème connexe : le problème du vide tel qu'il a été posé par R. P. Feynman dans sa théorie du positon ([4], p. 756) où l'on définit particule et antiparticule suivant que l'on se trouve suivre le cours du temps ou bien le remonter. Soient  $\psi$  le spineur fonction d'ondes du fermion, posons :

$$\alpha(x) = e\gamma_{\mu} A_{\mu}(x)$$

où  $A_{\mu}$  représente le quadrivecteur potentiel du champ extérieur donné. On sait que  $\psi(x)$  satisfait à l'équation intégrale

$$\psi(2) = \psi_0(2) - ie \int K_{+(2,1)} \alpha(1) \psi(1) dV_1, \quad (8.1)$$

$\psi_0(2)$  est la fonction d'ondes du fermion libre,  $K_{+(2,1)}$  une fonction de Green (propagateur) particulière de l'équation d'ondes du fermion libre (la fonction  $S_F$  en notation habituelle),  $dV_1$  un élément de volume spatio-temporel autour du point  $x_1$ . L'opérateur intégral a ici pour expression

$$\mathcal{K} = \int dV_1 K_{+(2,1)} \alpha(1) \{ \}. \quad (8.2)$$

La densité intégrale  $\mathcal{R}(2,1)$  de la résolvante

$$\mathcal{R}(2) = \int dV_1 \mathcal{R}(2,1) \{ \} \quad (8.3)$$

satisfait en vertu de (1.4) à l'équation

$$\mathcal{R}(2, 1) = K_+(2, 1)\mathcal{A}(1) - ie \int K_+(2, 3)\mathcal{A}(3)\mathcal{R}(3, 1) dV_3, \quad (8.4)$$

et donne la solution de (8.1) sous la forme

$$\psi(2) = \psi_0(2) - ie \int \mathcal{R}(2, 1)\psi_0(1) dV_1. \quad (8.5)$$

D'autre part, en vertu des formules (6.8) et (6.10) on a

$$\mathcal{R}(2, 1) = \frac{\sum \frac{(ie)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}(2, 1)}{\sum \frac{(ie)^n}{n!} D_n}, \quad (8.6)$$

avec [cf. (6.15) et (6.16)]

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(2, 1) &= (n-1)! \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ &\times \int dV_{\nu'} \dots dV_1 K_+(2, \nu') \\ &\times \mathcal{A}(\nu') K_+(\nu', \nu'-1) \dots K_+(2', 1') \mathcal{A}(1') \delta(1, 1') \end{aligned} \quad (8.7)$$

et

$$D_n = \text{Tr} \left\{ \int dV_1 \mathcal{O}_n(2, 1) \right\} \quad (8.8)$$

Ainsi donc les termes entrant dans l'expression des nombres  $D_n$  sont formés à l'aide des nombres

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &\equiv \text{Tr } \mathcal{K}^2 \\ &= \int dV_2 dV_1 \text{tr} \{ K_+(2, 1)\mathcal{A}(1)K_+(1, 2)\mathcal{A}(2) \}, \\ \sigma_3 &\equiv \text{Tr } \mathcal{K}^3 \\ &= \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

où le symbole tr indique la trace portant sur l'indice spinoriel des spineurs entrant dans l'intégrant. On peut voir en reprenant textuellement un raisonnement de Feynman ([14], p. 756, note 9) ou bien en ayant recours au théorème de Furry que

$$\text{Tr } \mathcal{K}^{2n+1} = 0. \quad (8.10)$$

De plus les graphes relatifs à chacun des termes (8.9) sont des polygones fermés à  $2n$  sommets, c'est-à-dire représentent  $n$  créations et  $n$  annihilations successives de paires et correspondent à la polarisation du vide. Il convient de remarquer que  $\sigma_2$  correspondant à la boucle formée par deux fermions est infini : cela ne représente qu'une difficulté apparente, il suffit suivant une méthode remontant à Poincaré (cf. § 10, Remarque 2) de le remplacer par 0. En combinant (8.7) et (8.8), on obtient finalement

$$D_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \sigma_\nu$$

qui permet le calcul des  $D_n$  par récurrence à partir

de  $D_0 = 1$ . Dans le cas où, vu la grandeur de la constante de couplage, la série des approximations successives est convergente, on a en vertu de (8.8) :

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \exp \left[ - \text{Tr} \sum \frac{(-ie)^n}{n} \mathcal{K}^n \right] \\ &= \exp \left[ - \sum \frac{(-ie)^n}{n} \sigma_n \right] = \exp -L. \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut être interprétée très simplement en termes de boucles fermées ([4, p. 756] et montre que  $D(\lambda)$ , facteur de renormalisation, donne la probabilité pour que le vide reste vide.

**9. L'équation homogène.** — On sait que lorsque pour  $\lambda = \lambda' : D(\lambda') = 0$ ; l'équation non homogène (1.1) ne peut avoir de solution, nous nous proposons d'étudier pour cette valeur de  $\lambda$  les solutions de l'équation homogène en suivant d'ailleurs que possible la marche classique en théorie des équations intégrales. Considérons la dérivée d'ordre  $N$  de  $D(\lambda)$ . On a en vertu de (6.9)

$$\begin{aligned} \frac{d^N D(\lambda)}{d\lambda^N} &= \text{Tr} \frac{d^N}{d\lambda^N} \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_n \\ &= (-1)^N \text{Tr} \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N} \\ &\equiv (-1)^N \text{Tr } \Delta_N(\lambda) \end{aligned} \quad (9.1)$$

et nous définissons les nouveaux opérateurs

$$\Delta_N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N}. \quad (9.2)$$

On voit en particulier que

$$\text{Tr } \Delta_0(\lambda) = D(\lambda), \quad \Delta_1(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda). \quad (9.3)$$

Considérons, d'autre part,  $\Delta_N(\lambda)$ ; on peut par application de la formule (5.4) le mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta_N(\lambda) &\equiv \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N} \\ &= \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} [\mathcal{K} D_{n+N-1} - (n+N-1)\mathcal{K} \mathcal{O}_{n+N-1}]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Utilisant de nouveau  $D_n = \text{Tr } \mathcal{O}_n$ , on a après quelques calculs simples

$$\Delta_N(\lambda) = \text{Tr} \Delta_{N-1}(\lambda) \cdot \mathcal{K} - (N-1) \mathcal{K} \Delta_{N-1} + \lambda \mathcal{K} \Delta_N. \quad (9.5)$$

Cette dernière formule permet de résoudre l'équation homogène : en effet, soit  $\lambda = \lambda'$  une racine multiple d'ordre  $\alpha$  de  $D(\lambda) = 0$ , alors

$$\left. \frac{d^\alpha}{d\lambda^\alpha} D(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda'} = (-1)^\alpha \text{Tr } \Delta_\alpha(\lambda')$$

n'est pas nul et l'on peut trouver un entier  $0 < m \leq \alpha$  tel que  $\Delta_m(\lambda')$  ne soit pas identiquement nul, alors que  $\Delta_1(\lambda')$ , ...,  $\Delta_{m-1}(\lambda')$  le sont. La relation (9.5) s'écrit alors

$$\Delta_m(\lambda') = \lambda \mathcal{K} \Delta_m(\lambda') \quad (9.6)$$

$\Delta_m(\lambda')$  est donc une solution de l'équation homo-

gène. Signalons pour finir une formule bien connue, si l'on fait  $N = 1$  et si l'on suppose que  $\lambda$  est suffisamment petit pour que la série des approximations successives ait un sens, on peut combiner (9.1) et (5.6) écrire

$$\frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = -\text{Tr } \mathcal{O}(\lambda) = D(\lambda) \text{Tr} \sum \lambda^n \mathcal{K}^{n+1}, \quad (9.7)$$

d'où

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \exp \left[ -\text{Tr} \sum_1 \frac{(\lambda)^n}{n!} \mathcal{K}^n \right] \\ &= \exp [-\text{Tr} \log(1 - \lambda \mathcal{K})]. \end{aligned} \quad (9.8)$$

M. Neumann a appliqué cette théorie à la déduction de l'équation de Bethe-Salpeter [11], nous ne reviendrons pas sur ce point. Pour le calcul par approximations successives des fonctions et valeurs propres, on se reportera à Morse et Feshbach ([10], p. 1018).

**10. Généralisation de la méthode de Fredholm.** — Il est facile de voir que si l'on fait un choix arbitraire des nombres  $c$   $D_n$ , la formule (5.4) permet toujours d'écrire l'opérateur  $\mathcal{O}_n$  sous la forme (6.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n &= (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \mathcal{K}^\nu \\ &= (n-1)! \sum_{\rho=0}^{n-1} (-1)^{n-\rho} \frac{D_\rho}{\rho!} \mathcal{K}^{n-\rho}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

où les  $D_n$ , nombres arbitraires, sont uniquement assujettis à rendre convergents numérateur et dénominateur de  $\mathcal{R}(\lambda)$  qui s'écrit en utilisant (6.10)

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N, N' \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N \lambda^n \sum_0^n (-1)^\rho \frac{D_\rho}{\rho!} \mathcal{K}^{n+1-\rho}}{\sum_0^{N'} (-\lambda)^n \frac{D_n}{n!}}. \quad (10.2)$$

On peut espérer élargir la définition de  $\mathcal{R}(\lambda)$  en prenant  $N = N'$ , ce qui permet d'inclure le cas où numérateur et dénominateur sont divergents quand on les considère séparément, mais ont un rapport fini. Pour avoir des expressions plus compactes, posons

$$d_n = (-\lambda)^n \frac{D_n}{n!} \quad \mathcal{K} = \lambda \mathcal{K}, \quad (10.3)$$

définissons aussi les opérateurs  $s_n$  sommes partielles de la série des approximations successives

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n \lambda^\nu \mathcal{K}^\nu = \sum_{\nu=1}^n \mathcal{K}^\nu.$$

Écrivons alors le numérateur de (10.2) en mettant

en facteur les coefficients  $d_0, d_1, \dots, d_N$ ; il est facile de voir que l'on obtient

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^N d_{N-\nu} s_{\nu+1}}{\sum_0^N d_\nu}. \quad (10.4)$$

ou en prenant les éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{I} | \mathcal{R}(\lambda) | \mathbf{0} \rangle &= \left\{ d_0 \langle \mathbf{I} | s_{N+1} | \mathbf{0} \rangle + d_1 \langle \mathbf{I} | s_N | \mathbf{0} \rangle + \dots \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left\{ + d_N \langle \mathbf{I} | s_1 | \mathbf{0} \rangle \right\}}{d_0 + d_1 + \dots + d_N}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

D'après la définition même des moyennes de Nörlund (\*), on a le théorème

*La somme de Nörlund — quand elle existe — de la série des approximations successives fournit une solution du problème.*

Le problème de l'unicité de la solution de l'équation (1.1) est évidemment lié au problème de la consistance de la méthode de Nörlund : si plusieurs ensembles de nombres  $d_n$  permettent de sommer la série des approximations successives, les sommes ainsi obtenues sont-elles toutes identiques ? Il est bien connu (et nous esquissons une démonstration plus loin) que la consistance de cette méthode est une conséquence de sa régularité, qui est assurée si la sommation peut être faite à l'aide de coefficients satisfaisant aux inégalités [9] :

$$\left| \sum_0^m d_\nu \right| \leq \sum_0^m |d_\nu| \leq H \left| \sum_0^m d_\nu \right| \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (10.6)$$

avec  $H$  indépendant de  $m$  et si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{m-n}}{m} = 0. \quad (10.7)$$

(\*) Rappelons brièvement que, étant donné une série :  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  divergente, de sommes partielles  $S_0, S_1, \dots$  et un ensemble de nombres  $p_0, p_1, \dots$ , on dit que cette série est sommable au sens de Nörlund si :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_N s_0 p_{N-1} s_1 + \dots + p_0 s_N}{p_0 + \dots + p_N}$$

existe. Une méthode de sommation est dite régulière si appliquée à une série convergente, elle permet d'obtenir la somme de cette série. Si, de plus, cette méthode de sommation dépend de certains paramètres arbitraires, elle est dite consistante si la somme qu'elle permet d'obtenir à partir d'une série divergente est indépendante du choix de ces paramètres. Les conditions, de consistance et de régularité de la méthode de Nörlund sont données dans le courant du texte (pour une étude détaillée, cf. [7]). On sait enfin que la méthode de Cesaro, particulièrement bien étudiée, est un cas particulier de la méthode de Nörlund.

Des deux inégalités en (10.6), il est évident que seule celle de droite introduit une restriction sur les  $d_n$ , de plus la deuxième condition (10.7) lorsque  $\Sigma d_\nu$  tend vers l'infini peut être remplacée par

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_m}{\sum_0^m d_\nu} = 0. \quad (10.8)$$

Le lien entre les conditions de régularité et de consistance est assuré par le théorème de Voronoï (la démonstration donnée par L. Hardy dans [7], p. 65, th. 18, doit être légèrement généralisée afin de pouvoir tirer tout le parti possible des conditions (10.6) et (10.7) plus générales que celles qu'il donne). Ce théorème permet de conclure que si la série des approximations successives est sommable par une méthode régulière de Nörlund pour la valeur  $\lambda = \lambda'$  du paramètre : cette série a un rayon de convergence non nul, la fonction qu'elle représente est méromorphe dans un cercle de rayon  $|\lambda'|$  et tend vers la somme de Nörlund lorsque  $\lambda$  s'approche de  $\lambda'$  en restant intérieur à ce cercle; ce dernier point établit précisément la consistance de la méthode. Ce même théorème fait apparaître quand on considère une équation intégrale ordinaire les relations entre la méthode de Fredholm et la solution par sommation : il montre que cette dernière méthode inclut la méthode de Fredholm.

*Remarque 1.* — Revenons à la formule (10.4); il est souvent utile de présenter cette formule comme une pondération de la série des approximations successives : on voit, en effet, que (10.4) peut s'écrire de façon légèrement différente

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{d_0 + \dots + d_N} \times \left[ \lambda \mathcal{K} \sum_0^N d_\nu + \lambda^2 \mathcal{K}^2 \sum_0^{N-1} d_\nu + \dots + \lambda^{N+1} \mathcal{K}^{N+1} d_0 \right]. \quad (10.9)$$

Posons alors

$$\varpi_{p,N}(\lambda) = \frac{d_0 + \dots + d_p}{d_0 + \dots + d_N} = \frac{\sum_0^p \frac{(-\lambda)^\rho}{\rho!} D_\rho}{\sum_0^N \frac{(-\lambda)^\rho}{\rho!} D_\rho}; \quad (10.10)$$

$\varpi_{p,N}(\lambda)$  sont des fonctions rationnelles de  $\lambda$  dont le degré  $p$  du numérateur est inférieur ou égal au degré  $N$  du dénominateur. La résolvante se met sous la forme

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^N \varpi_{N-\nu,N}(\lambda) \lambda^{\nu+1} \mathcal{K}^{\nu+1}. \quad (10.11)$$

Les conditions de régularités (9.6) et (9.7) s'écrivent alors

$$\sum_{l=0}^N |\varpi_{j,N}(\lambda) - \varpi_{j-1,N}(\lambda)| < H \left| \sum_0^N \varpi_{j,N}(\lambda) - \varpi_{j-1,N}(\lambda) \right|, \quad (10.12)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \varpi_{N-n,N}(\lambda) - \varpi_{N-n-1,N}(\lambda) \} = 0. \quad (10.13)$$

*Remarque 2.* — Cette même technique des coefficients indéterminés permet l'élimination des traces infinies (en supposant qu'il n'en existe qu'un nombre fini pour la méthode de Fredholm) et fonde l'extension de la méthode de Poincaré : il suffit, en effet, de remplacer chacune de ces traces par 0.

**11. Application de la méthode de Fredholm généralisée à l'étude de la convergence de la matrice  $S$ .** — Nous considérons le problème de la matrice  $S$  tel qu'il a été posé dans l'introduction. Soit donc un système physique décrit par l'hamiltonien

$$g H(t) = g \int \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (11.1)$$

en représentation d'interaction. La matrice  $S$  sera solution du système

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= 1 - ig \int_{-\infty}^t H(t') S(t') dt', \\ S &= 1 - ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t') S(t') dt'. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Cherchons la solution de la première équation (11.2) à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés,  $\mathcal{K}$  est dans ce cas l'opérateur intégral

$$\mathcal{K} = \int_{-\infty}^t d\tau H(\tau) \{ \quad \};$$

Il en est de même pour les opérateurs  $\mathcal{R}(\lambda)$ ,  $\mathcal{O}(\lambda)$  que nous écrirons  $\mathcal{O}(ig, t)$  et des coefficients  $\mathcal{O}_n(t)$  de  $\mathcal{O}(\lambda)$ . Nous aurons de plus

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - ig \frac{\mathcal{O}(-ig, t)}{\mathcal{O}(-ig)} 1 \\ &= 1 - \frac{ig}{D(-ig)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}(t) 1. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Par, une simple application de la formule (10.1) chacun des coefficients s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{n+1}(t) 1 &= n! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+t} \frac{D_{n-\nu+1}}{n-\nu+1!} \\ &\times \int_{-\infty}^t d\tau_\nu \dots \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_1 H(\tau_\nu) \dots H(\tau_1), \end{aligned} \quad (11.4)$$

portant ces expressions dans la deuxième des équations

tions (11.2), on est amené à calculer les intégrales

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt H(t) \mathcal{O}_{n+1}(t) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} \frac{n!}{n-\nu+1!} D_{n-\nu+1} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t d\tau_{\nu} \dots \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_1 H(t) \dots H(\tau_1) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu+1}}{n-\nu+1!} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{\nu} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 P[H(t) \dots H(\tau_1)], \quad (11.5) \end{aligned}$$

où  $P$  désigne l'opérateur d'ordination chronologique. Considérons pour fixer les idées un problème de diffusion de particules. Les éléments de matrice, des intégrales multiples n'ont de sens que s'ils ont été renormalisés, désignons par

$$\mathfrak{M}_n(k_1, k_0) = \langle I \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \dots d\tau_1 P[H(\tau_n) \dots H(\tau_1)] \right| 0 \rangle, \quad (11.6)$$

toutes renormalisations ayant été faites.  $\mathfrak{M}_n$  est une fonction bien définie des vecteurs impulsion-énergie  $k_0$  et  $k_1$  des particules initiales et finales. En revenant à (11.2), il est facile de voir que l'élément de matrice de l'opérateur  $S$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \langle I \left| S - I + ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right| 0 \rangle \\ &= \frac{1}{D(-ig)} \sum_{n=0}^{\infty} (ig)^{n+2} \sum_{\rho=0}^n (-1)^{n-\rho} \frac{D_{\rho}}{\rho!} \frac{\mathfrak{M}_{n+2-\rho}}{n+2-\rho!} \quad (11.7) \end{aligned}$$

En posant comme au paragraphe précédent

$$d_n = (ig)^n \frac{D_n}{n!}, \quad M_n = (-ig)^n \frac{\mathfrak{M}_n}{n!}, \quad s_n = \sum_2^n M_{\nu},$$

on peut facilement mettre (11.7) sous la forme

$$\begin{aligned} & \langle I \left| S - I + ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right| 0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d_0 s_{N+2} + d_1 s_{N+1} + \dots + d_N s_2}{d_0 + \dots + d_N}, \quad (11.8) \end{aligned}$$

d'où le théorème :

*Si le développement en série de puissances de  $g$  de  $S$  renormalisée est, pour une certaine valeur de  $g$ , sommable au sens de Nördlund, la somme ainsi obtenue est une solution du problème.*

Nous arrivons ainsi au cœur du problème qu'il faut résoudre : déterminer dans quelle mesure cette méthode peut permettre de sommer les séries de la théorie quantique des champs. En d'autres termes, il s'agit de caractériser par des conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité au sens de Nördlund les séries auxquelles nous serons amené

à nous intéresser. Une condition nécessaire se déduit immédiatement du théorème de Voronoï énoncé à la fin du paragraphe précédent : si la série des puissances de  $g$  de l'opérateur  $S$  est sommable par une méthode régulière pour  $g = g'$ , il faut que cette série ait un rayon de convergence non nul et qu'elle représente une fonction méromorphe dans un cercle de rayon  $g'$ .

Il n'est évidemment pas facile d'étudier directement sur un développement la nature des singularités de la fonction définie par le prolongement analytique de cette série, mais en revanche l'étude de la convergence de ce développement, tout en restant difficile, est possible. Or, nous venons de voir que les seules séries que nous pouvons espérer sommer doivent avoir un rayon de convergence non nul. D'autre part, un certain nombre de travaux récents [8], [12], [16] faits sur un modèle simplifié de champs interagissants (en représentation d'interaction, la densité d'hamiltonien est  $g[\Phi(x)]^2$ ,  $\Phi$  étant un champ de bosons de spin 0) montrent que la série de la matrice  $S$  a un rayon de convergence strictement nul. Si donc ces conclusions pouvaient se transporter à l'électromagnétisme sans aucun correctif, la méthode précédente serait *a priori* totalement inopérante; néanmoins, il convient de remarquer que cette étude n'a pas encore été faite.

*Remarque 1.* — Dans quelques cas particuliers, la formule (11.8) peut permettre des sommations effectives, supposons par exemple que

$$M_n = f(n) A^n \quad (A = \text{const. positive})$$

et que  $f(n)$  satisfasse à une relation de récurrence à  $p$  termes

$$\alpha_0 f(m) + \dots + \alpha_p f(m-p) = 0 \quad (\alpha_j = \text{const.}),$$

ce qui est le cas lorsque  $f(h)$  est un polynôme. On peut voir que le deuxième membre de (11.8) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 f(2) A^2 + [\alpha_0 f(3) + \alpha_1 f(2)] A^3 + \dots \\ + [\alpha_0 f(p-1) + \dots + \alpha_{p-1} f(2)] A^{p-1} \end{array} \right\}}{\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_p A^p}.$$

Un des cas les plus simples auxquels cette méthode peut s'appliquer est la diffusion des mésons scalaires par des nucléons infiniment lourds.

*Remarque 2.* — Par une marche tout à fait analogue à celle qui nous a conduit à la formule (10.11), on peut mettre la solution (11.8) sous la forme d'un développement en série suivant les puissances de la constante de couplage dans lequel chaque terme est pondéré par une fraction rationnelle et cette constante :

$$\varpi_{p,N}(g, D_n) = \frac{\sum_0^p (ig)^{\nu} \frac{D_{\nu}}{\nu!}}{\sum_0^p (ig)^{\nu} \frac{D_{\nu}}{\nu!}},$$

cette fraction doit satisfaire de plus à (10.12) et (10.13).

La solution (11.8) se met sous la forme

$$\begin{aligned} & \langle I \left[ S^{-1} + ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right] 0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^N (-ig)^{\nu+2} \varpi_{N-\nu, N}(g, D_n) \frac{\mathcal{N}_{\nu+2}}{\nu+2!}, \end{aligned}$$

formule qui montre que la solution proposée se déduit de la solution usuelle des perturbations en affectant d'un poids convenable les contributions des graphes de Feynman d'un même ordre.

**12. Application d'autres méthodes de sommation (\*)**. — Il est facile en examinant de plus près la méthode de résolution des équations (11.2) de voir en quoi cette méthode diffère de celle ordinairement utilisée. La première des équations (11.2) est du type de Volterra et l'on sait que pour une classe assez étendue de noyaux [5], elle admet comme solution valant pour toutes les valeurs de  $g$ , la série des approximations successives. D'autre part, les procédés de renormalisation qui interviennent dans le calcul des éléments de matrice modifient profondément la structure des termes de cette série; c'est de cette modification dont nous nous sommes efforcés de tenir compte en introduisant les coefficients indéterminés. Mais ainsi que nous venons de le voir, cette méthode, quelle que soit l'extension qu'on lui donne, est essentiellement une méthode de prolongement analytique pour des fonctions pour lesquelles le point  $g=0$  n'est pas un point singulier.

Si donc la série des perturbations a un rayon de convergence nul, il faut faire appel à d'autres méthodes tenant compte de certaines autres propriétés de la série. Dans le cas particulier de l'électromagnétisme, vu la petitesse de la constante de couplage, cette série peut être envisagée comme un développement asymptotique valant autour de  $g=0$  et ce fait est bien en accord avec le principe de correspondance [14]. On peut donc pour des problèmes de cette classe essayer une autre voie d'attaque en se proposant de trouver une méthode de sommation qui soit (si possible) :

a. Une méthode de prolongement analytique : en effet, supposons que la série des approximations successives admette un prolongement analytique, la fonction définie par ce prolongement est solution de (1.1) en vertu de la permanence des relations fonctionnelles. Cette condition assure donc le raccord entre cette méthode et les résultats des méthodes classiques;

b. Soit une méthode de sommation des séries asymptotiques, ce qui doit assurer la consistance de la méthode.

(\*) On se reportera également à un travail de R. Bellman [3].

On peut au moins essayer de caractériser les directions suivant lesquelles on peut espérer pouvoir donner une réponse même partielle à ces questions; mais en tous cas la réponse définitive devra dépendre du comportement des termes de  $S$ , comportement mal connu actuellement.

Considérons la série divergente de la matrice  $S$  renormalisée

$$\sum (-ig)^n \frac{\mathcal{N}_n(k_1, k_0)}{n!} \quad (12.1)$$

et proposons-nous d'utiliser une méthode de sommation par les moments ([7], p. 81). Comme il est bien connu, on définit un ensemble de nombres

$$\mu_n = \int_0^\infty f(u) u^n du \quad (12.2)$$

de telle sorte que l'expression

$$\sum \frac{(-ig)^n}{n!} \mu_n \frac{\mathcal{N}_n}{\mu_n} = \int_0^\infty du f(u) \sum (ig)^n u^n \frac{\mathcal{N}_n}{\mu_n n!} \quad (12.3)$$

ait un sens et l'on s'efforce en outre, de choisir la fonction  $f(u)$  de telle sorte que la série de (12.3) ait une somme connue (\*).

Cette méthode est effectivement avec certaines restrictions sur les  $\mu_n$  ([7], p. 84) une méthode de prolongement, mais, et c'est là un premier inconvénient, elle ne prolonge pas la série dans tout son domaine d'existence, mais uniquement dans un certain domaine dit de sommabilité dépendant du choix des  $\mu_n$ .

Ainsi donc quand la série de départ a un rayon de convergence différent de 0, la méthode de sommabilité étudiée est consistante, (au moins pour certains décrits par  $g$ ), mais en dehors de ce cas elle perd cette propriété.

Le remède à cette difficulté consiste à tenir compte du caractère asymptotique de la série (11.1) en faisant appel à des théorèmes tels que celui de Watson [19] qui permettent moyennant certaines conditions remplies par les coefficients et le reste de la série de trouver la méthode des moments adéquate qui donne une expression compacte dont (11.1) est le développement asymptotique (\*).

L'application de cette méthode suppose la connais-

(\*) Avec

$$f(u) = \frac{1}{\alpha} e^{-u} \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

on trouve facilement :

$$\int_0^\infty dv e^{-v} \sum \frac{(-ig)^n}{n!} \frac{v^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},$$

$\alpha=1$  correspond à la méthode B\* de Borel.

(\*) Pour donner un énoncé plus précis, écrivons (11.1) sous la forme :

$$\sum_0^N (-ig)^n \frac{\mathcal{N}_n}{n!} + R_N(g).$$

sance de l'ordre de grandeur de la perturbation d'ordre  $n$  : cette expression est mal connue. Indépendamment de ce point, il faut aussi remarquer que ce qui précède n'a de sens que si la constante de couplage, est suffisamment petite, ce qui semble exclure toute application aux théories mésiques.

*Remarque.* — Supposons que nous ayons obtenu une solution pour la valeur  $g = g'$  de la constante de couplage. Nous venons de voir que les seuls points singuliers intérieurs au cercle de rayon  $g'$  ne peuvent être que des pôles. Les solutions à points singuliers essentiels et à points de branchement sont donc exclues et il est facile de voir pourquoi : en ces points la solution prend plus d'une valeur, ce qui contredit au postulat d'unicité de la solution dont nous sommes parti. Cette unicité est étroitement liée à la régularité de la méthode de Nörlund et l'on pourrait certainement étendre la classe des solutions envisagées si l'on cessait de s'astreindre à employer des méthodes de Nörlund régulières, c'est-à-dire si l'on cessait de considérer des solutions univoquement déterminées et indépendantes du choix des  $D_n$ . Si donc, on était à même de fixer pour chaque problème les coefficients  $D_n$ , qui sont essentiellement des poids pour les graphes de Feynman, par des conditions plus physiques indépendamment des conditions de régularité (10. 6), (10. 7), les limites de validité de la solution pourraient être étendues par l'inclusion des points singuliers essentiels et des points de branchement, Il resterait d'ailleurs à résoudre la question difficile de l'unicité (ou du moins du choix de la détermination conve-

nable) de la solution autour des points singuliers. En tous cas, il ne semble pas facile, ou même possible, de déduire cette signification des postulats quantiques de base.

**Conclusions.** — Après l'étude d'un certain nombre de propriétés des équations linéaires dans l'espace de Hilbert et de leurs solutions, nous avons développé à partir du paragraphe 5 des méthodes donnant des solutions exactes de ces équations : ces méthodes utilisent les éléments de matrice de la théorie usuelle des perturbations, mais les assemblent de façon différente en les affectant de coefficients  $D_n$ . Le choix de ces coefficients est déterminé par des considérations de sommabilité au sens de Nörlund et rend inutile le calcul des traces exigées par la méthode généralisée de Fredholm.

L'application de cette méthode à la série des perturbations de la matrice  $S$  montre que, pour certains cas relativement simples, permettant l'étude de la convergence de cette série autour du point  $g = 0$ , l'équation étudiée cesse d'avoir une solution même dans le cadre de la méthode précédente. Il reste le recours au caractère asymptotique de cette série, recours certainement valable pour l'électromagnétisme.

Ce travail commencé à l'Institut Henri Poincaré (Paris) sous la direction de M. le Professeur L. de Broglie a été terminé à Theoretical Physics Department Manchester University sous la direction de M. le Professeur L. Rosenfeld. Je suis heureux de pouvoir leur témoigner ma gratitude pour les avis et encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer. Mes remerciements vont également à M. le Professeur A. Lichnerowicz et à M. le Directeur de Recherches A. Proca pour l'aide qu'à titres divers ils m'ont apportée dans ce travail. Enfin, je tiens aussi à remercier M. l'Assistant-Professeur H. Umezawa pour les nombreuses et amicales discussions que nous avons eues à ce sujet.

Mon séjour à l'Université de Manchester a été rendu possible par une bourse d'échange entre le C.N.R.S. et le British Council.

Manuscrit reçu le 10 avril 1954.

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\left| \frac{\partial \pi_n}{\partial n!} \right| = O(n! \sigma^n),$$

$$|R_N(g)| < O\{(N+1)! \sigma^{N+1} g^{N+1}\} \quad (\sigma = \text{const.}),$$

la fonction génératrice de la série est donnée par la méthode B\* de Borel. Par exemple, si

$$\pi_n = (n!)^2 A^n \quad (A \text{ const.}),$$

la fonction cherchée est :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1 - i g A u} du.$$

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARNOUS E. et ZIENAU E. — *Helv. Phys. Acta*, 1951, **24**, 279.  
 [2] SALAM A. et MATTHEWS P. T. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 590.  
 [3] BELLMAN R. — *Duke Math. J.*, 1950, **17**, 53.  
 [4] FEYNMAN R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 748.  
 [5] GUY R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 1194.  
 [6] HAMILTON J. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1524.  
 [7] HARDY G. H. — *Divergent Series*. Oxford, 1949.  
 [8] HURST C. A. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1952, **48**, 625.  
 [9] MOORE C. — *Convergence factors*.  
 [10] MORSE P. M. et FESHBACH H. — *Methods of Theoretical Physics*. New York, 1953.  
 [11] NEUMANN M. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 129.  
 [12] PETERMAN A. — *Arch. Sc.*, 1953, **6**, 5.  
 [13] PLEMELJ J. — *Mon. Math.*, 1904, **15**, 93.  
 [14] ROSENFELD L. — *Physica*, 1953, **19**, 359.  
 [15] SMITHIES F. — *Duke Math. J.*, 1941, **8**, 107.  
 [16] THIRRING W. — *Helv. Phys. Acta*, 1953, **26**, 33.  
 [17] VISCONTI A. — *Thèse*, Paris, 1953; *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 1951; *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 2489.  
 [18] VOLTERRA V. et PÉRÈS J. — *Théorie générale des fonctionnelles*. Paris, 1936.  
 [19] WATSON G. N. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1912, A, **211**, 279.