



# **La température électronique des cathodes à oxydes. Interprétation des résultats expérimentaux**

H. Dormont

## **► To cite this version:**

H. Dormont. La température électronique des cathodes à oxydes. Interprétation des résultats expérimentaux. Journal de Physique et le Radium, 1951, 12 (7), pp.710-716. <10.1051/jphysrad:01951001207071000>. <jpa-00234462>

**HAL Id: jpa-00234462**

**<https://hal.science/jpa-00234462v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## LA TEMPÉRATURE ÉLECTRONIQUE DES CATHODES A OXYDES INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Par H. DORMONT,

Ancien Élève de l'École Polytechnique  
Ingénieur au Laboratoire d'Électronique et de Physique appliquée.

**Sommaire.** — La loi des courants résiduels

$$I = I_s e^{-\frac{Vq}{kT}},$$

relative à une cathode à température thermodynamique  $T$  placée en face d'une anode portée au potentiel  $-V$ , est expérimentalement vérifiée dans le cas d'une cathode métallique; elle doit être modifiée dans le cas d'une cathode à oxydes.

La présence d'une barrière de potentiel de forme simple à la surface de la cathode permet d'expliquer ce fait, ainsi que l'existence du coefficient numérique  $A$  dans l'équation de Richardson

$$I_s = AT^2 e^{-\frac{A}{kT}}.$$

en bon accord avec l'expérience.

Les résultats théoriques concordent quantitativement avec les résultats expérimentaux, pourvu que l'on choisisse convenablement les dimensions de la barrière.

### I. — Rappel des résultats expérimentaux.

1. Les expériences entreprises pour mesurer la température thermodynamique  $T$  d'une cathode par application de la loi des courants résiduels

$$\text{Log } I = \text{Log } I_s - \frac{Vq}{kT} \quad (1)$$

(où  $I$  est l'intensité du courant résiduel,  $I_s$  le courant de saturation,  $-V$  la tension plaque ( $V$  positif),  $q$  la charge en valeur absolue de l'électron,  $k$  la constante de Boltzmann), ont permis de vérifier cette loi dans le cas des cathodes purement métalliques, mais ont mis en évidence son inexactitude dans le cas de cathodes à oxydes.

M. Champeix <sup>(1)</sup> a montré que pour ces dernières, l'expérience fournit, lorsque  $V$  varie entre 1 et 2 V environ une relation du type

$$\text{Log } I = \text{Log } I_m - \frac{Vq}{k\theta}, \quad (2)$$

où  $\theta$  est supérieur à  $T$ . Quand  $V$  est inférieur à 1 V la relation entre  $\log I$  et  $V$  cesse d'être linéaire; on attribue cet effet à la présence d'une charge d'espace non négligeable; nous verrons que l'interprétation théorique conduit à y superposer une autre cause de divergence. Quand  $V$  est supérieur à 2 V, les mesures cessent d'être assez précises pour que l'on puisse valablement conclure sur la forme de la relation entre  $\log I$  et  $V$ .

<sup>(1)</sup> La température électronique des cathodes à oxydes. *Le Vide*, 1950, **26**, p. 763.

L'expérience ne permet pas de vérifier (2) avec une précision de plus de 5 pour 100 et par suite ne permet pas une mesure précise de  $I_m$  (dont le  $\log$  n'est connu qu'à 5 pour 100 près) et de  $\theta$ .  $I_m$  est de l'ordre de grandeur du courant de saturation;  $\theta$  peut être mesuré avec plus de précision en utilisant la relation différentielle

$$\frac{dI}{d(-V)} = \frac{qI}{k\theta}. \quad (3)$$

La mesure de  $I$  et de  $\frac{dI}{d(-V)} = \frac{1}{\rho}$  ( $\rho$  est la résistance de la diode) montre que le produit  $\rho I$  est constant lorsque  $V$  est compris entre 1 et 2 V environ et permet de connaître  $\theta$  à la précision (2 pour 100 environ) avec laquelle (3) est vérifié; l'écart relatif  $\frac{\theta - T}{T}$  toujours positif, a une valeur

maximum de l'ordre de  $\frac{1}{10}$  et diminue quand la température  $T$  s'élève dans le domaine 900-1200° expérimentalement étudié; il est plus grand pour les cathodes activées que pour celles qui ne l'ont pas été.

Le paramètre  $\theta$  est appelé « température électronique » de la cathode; il est fonction de  $T$  et dans le domaine étudié est donné par  $\theta = \sigma T + \tau$  où  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux constantes et où  $\sigma < 1$ .

2. Il est bien connu que le courant de saturation  $I_s$  d'une cathode thermoionique peut être convenablement représenté par

$$I_s = A \frac{4\pi m q k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{A}{kT}} \quad (4)$$

( $m$  est la masse de l'électron,  $V$ , le potentiel d'extraction,  $h$  la constante de Planck). L'expérience fournit pour le coefficient  $\alpha$  qui devrait être égal à 1 si la loi de Richardson était valable, une valeur de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Il s'agit, dans cette étude, d'expliquer l'existence d'une température  $\theta$  différente de  $T$ , ainsi que celle du coefficient  $\alpha$  et de rendre compte de l'ordre de grandeur des valeurs mesurées pour  $\theta$ ,  $I_m$  et  $\alpha$ .

## II. — Hypothèse de la barrière de potentiel.

1. Le fait que la température  $\theta$  soit supérieure à la température  $T$  montre qu'il y a enrichissement du faisceau émergeant de la cathode en électrons rapides. On a proposé d'expliquer cet enrichissement, ainsi que l'existence du coefficient  $\alpha$  par la présence, à la sortie de la cathode, d'une barrière de potentiel de forme plus ou moins compliquée et donnant lieu à un effet de « tunnel ». Dans une telle barrière, le potentiel  $V$  est uniquement fonction de la coordonnée  $z$  (l'axe des  $z$  est normal à la surface de la cathode);  $V$  est nul dans le métal;  $V = -a$  ( $a$  constante positive) hors de la cathode; dans la zone de raccordement  $V = V(z)$ . L'effet de ce potentiel se traduit par l'existence d'un coefficient de transmission  $\mathfrak{E}$  fonction uniquement de la composante  $V_z$  parallèle à  $Oz$  de la vitesse de l'électron incident.

Cette hypothèse permet de déduire des résultats expérimentaux des renseignements sur le coefficient de transmission  $\mathfrak{E}$ .

2. Les électrons libres sont répartis dans le métal suivant la loi de Fermi :

$$dN = \frac{A}{1 + e^{\frac{\mu - W_m}{kT}}} dV_x dV_y dV_z, \quad (5)$$

avec

$$W = \frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2),$$

$dN$  est le nombre d'électrons par unité de volume ayant pour composantes de vitesse  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  à  $dV_x$ ,  $dV_y$  et  $dV_z$  près;  $A$  est une constante universelle  $A = 3 \left( \frac{m}{h} \right)^3$ .  $W_m$  dépend du nombre  $N$  d'électrons libres par unité de volume et de la température; en fait,  $W_m$  varie très peu en fonction de  $T$  (moins de 10 pour 100 lorsque  $T$  passe de 0 à 1000°) et l'on peut sans inconvénients le supposer indépendant de  $T$ ;  $W_m$  est alors une caractéristique du métal dont la valeur est de l'ordre de 9 eV (cas du tungstène).

Le nombre d'électrons de vitesse donnée qui frappent par unité de temps l'unité de surface de

cathode et réussissent à franchir la barrière de potentiel est

$$\frac{AV_z \mathfrak{E}(V_z) dV_x dV_y dV_z}{1 + e^{\frac{W - W_m}{kT}}}, \quad (6)$$

ces électrons perdent, à la traversée de la barrière, l'énergie  $qa$  au détriment de leur vitesse le long de  $Oz$

$$V_z'^2 = V_z^2 - \frac{2qa}{m}. \quad (7)$$

Le nombre d'électrons sortant avec la vitesse  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  est donc, par unité de temps et de surface de cathode

$$\frac{AV_z \mathfrak{E} \left( \sqrt{V_z^2 + \frac{2qa}{m}} \right) dV_x dV_y dV_z}{1 + e^{\frac{\frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z'^2) + qa - W_m}{kT}}}. \quad (8)$$

Si le champ retardateur est créé par une d.d.p.  $u$  entre cathode et anode, les électrons qui atteignent la plaque sont, si l'on néglige l'effet de la charge d'espace, ceux pour lesquels

$$\frac{mV_z^2}{2} > qu, \quad (9)$$

et la densité de courant résiduel est

$$I = qA \int_{\sqrt{\frac{2qu}{m}}}^{\infty} V_z \mathfrak{E} \left( \sqrt{V_z^2 + \frac{2qa}{m}} \right) dV_z \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dV_x dV_y \left[ 1 + e^{\frac{\frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + qa - W_m}{kT}} \right]^{-1} \quad (10)$$

Posant  $2qE = mV_z^2$  ( $qE$  est l'énergie de translation le long de  $Oz$  des électrons émergents) et

$$\mathfrak{E} \left[ \sqrt{\frac{2qa}{m} \left( 1 + \frac{E}{a} \right)} \right] = f \left( \frac{E}{a} \right), \quad (11)$$

(10) devient

$$I = BT \int_u^{\infty} f \left( \frac{E}{a} \right) \text{Log} \left( 1 + e^{-\frac{qE + qa - W_m}{kT}} \right) dE, \quad (12)$$

où  $B = 4\pi k \frac{q^2 m}{h^3}$  est une constante universelle.

Le courant maximum sortant en l'absence de charge d'espace (courant de saturation) est

$$I_s = BT \int_0^{\infty} f \left( \frac{E}{a} \right) \text{Log} \left( 1 + e^{-\frac{qE + qa - W_m}{kT}} \right) dE, \quad (13)$$

$qa - W_m$  est le travail d'extraction qui est de l'ordre de 1 eV pour les cathodes à oxydes;  $\frac{qa - W_m}{kT}$  est donc de l'ordre de 12 à 1000° K et l'exponentielle figurant dans (12) et (13) est extrêmement petite, ce qui permet de remplacer sans erreur appréciable

le log par le premier terme de son développement; on obtient ainsi

$$I = BT e^{-\frac{qa - U_m}{kT}} \int_u^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE, \quad (14)$$

$$I_s = BT e^{-\frac{qa - U_m}{kT}} \int_0^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE. \quad (15)$$

Ces formules seraient obtenues directement par substitution d'une répartition du type Boltzmann à celle de Fermi-Dirac.

3. Les équations (2) et (14) doivent être identiques à la précision près des expériences lorsque  $u$  varie entre 1 et 2 V; il doit en être de même de (3) et de la dérivée de (14), ce qui nécessite que l'on ait à quelques pour-cent près lorsque  $\frac{u}{a}$  est compris entre 0,1 et 0,2 environ ( $a$  est de l'ordre de 10 V dans une cathode à oxydes, puisque  $qa - Wm = 1$  eV et  $Wm = 9$  eV) :

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = \frac{I_m q}{B k \theta T} e^{\frac{qa - U_m}{kT}} e^{\frac{q a \theta}{k \theta T}} \frac{T}{a} \frac{I}{a}, \quad (16)$$

ou

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = \gamma e^{\frac{\mu}{a}}, \quad (17)$$

avec

$$\gamma = \frac{I_m q}{B k \theta T} e^{\frac{qa - U_m}{kT}} = z \frac{I_m T}{J_s \theta} \sim 10^{-}, \quad (18)$$

puisque  $I$  et  $I_m$  sont du même ordre de grandeur.

$$\mu = 1,20 \frac{I}{I_0} \quad \left( \text{en prenant } \frac{\theta - T}{T} = \frac{1}{10} \right). \quad (19)$$

$f$  est, d'après sa définition, liée directement au coefficient de transmission  $\mathfrak{E}$ , l'équation (16) signifie que l'on connaît non seulement l'ordre de grandeur, mais encore l'allure de la variation de  $\mathfrak{E}$  dans un intervalle déterminé : c'est une condition qu'il est nécessaire d'imposer à la barrière de potentiel qui crée  $\mathfrak{E}$ .

Supposons donc qu'une barrière de potentiel nous fournisse un coefficient  $\mathfrak{E}$  conduisant à une fonction  $f$  satisfaisant à la condition (16) avec pour  $\lambda$  et  $\mu$  les ordres de grandeur requis; on pourra écrire d'après (14)

$$I = BT e^{-\frac{qa - U_m}{kT}} \times \left[ \int_u^{\frac{2a}{10}} f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE + \int_{\frac{2a}{10}}^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE \right], \quad (20)$$

$u$  est compris entre 1 et 2 V, donc entre  $\frac{a}{10}$  et  $\frac{2a}{10}$ . Dans la première intégrale on peut remplacer  $f$  par

sa valeur (16) (exacte à quelques pour-cents près), ce qui donne avec la même précision :

$$I = I_m e^{\frac{qa}{k\theta}} \left( 1 + e^{\frac{qa}{k\theta}} e^{-\frac{2qa}{10k\theta}} \right) + \frac{I_m q}{\lambda k \theta} \int_{\frac{2a}{10}}^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE, \quad (21)$$

ou encore

$$I = I_m e^{-\frac{qa}{k\theta}} \times \left\{ 1 + e^{-\frac{q\left(\frac{2a}{10} - u\right)}{k\theta}} \left[ -1 + \frac{q e^{\frac{2qa}{10k\theta}}}{\lambda k \theta} \int_{\frac{2a}{10}}^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE \right] \right\}, \quad (22)$$

et en posant dans l'intégrale  $\frac{E}{a} = 0,2 + x$ ,

$$I = I_m e^{-\frac{qa}{k\theta}} \times \left\{ 1 + e^{-\frac{q\left(\frac{2a}{10} - u\right)}{k\theta}} \left[ -1 + \frac{q a e^{-\frac{2qa(0,2-x)}{10k\theta T}}}{\lambda k \theta} \int_0^\infty f(0,2+x) e^{\frac{qa}{kT}} dx \right] \right\}; \quad (23)$$

La fonction  $f$ , qui est un coefficient de transmission est continue, et représentable au voisinage de la valeur 0,2 par un développement en série qui reste valable pour  $x$  supérieur à 0,2. Remplaçons l'intégrale par sa valeur asymptotique, ce qui est possible, puisque  $\frac{qa}{kT}$  est grand, il vient alors

$$I = I_m e^{-\frac{qa}{k\theta}} \times \left\{ 1 + e^{-\frac{q\left(\frac{2a}{10} - u\right)}{k\theta}} \left[ -1 + \frac{e^{-\frac{2qa(0,2-x)}{10k\theta T}}}{\lambda \theta} f(0,2) \right] \right\} \quad (24)$$

$f(0,2)$  est donnée par la relation (16) dans laquelle on remplace  $\frac{E}{a}$  par 0,2; en substituant cette valeur (24) devient

$$I = I_m e^{\frac{qa}{k\theta}} \left[ 1 + e^{-\frac{q\left(\frac{2a}{10} - u\right)}{k\theta}} \left( -1 + \frac{T}{\theta} \right) \right], \quad (25)$$

$\frac{T - \theta}{\theta}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{10}$ ; (25) coïncide avec la loi expérimentale (5), avec une précision de l'ordre de grandeur de celle des expériences, si la deuxième exponentielle est de l'ordre de quelques dixièmes au plus, ce qui est vérifié sauf si  $\frac{u}{a}$  se trouve au

voisinage immédiat de 0,2. Cela n'est pas bien gênant puisque la limite supérieure, voisine de 0,2, de l'intervalle dans lequel sont effectuées des mesures ayant une précision suffisante, ne saurait être déterminée d'une façon rigoureuse.

Remarquons que nous avons supposé que l'intégrale figurant dans (23) se confondait avec le premier terme de son développement asymptotique : il en est pratiquement toujours ainsi sauf si  $\left(\frac{E}{a}\right)$  diffère trop rapidement de la forme (16) lorsque  $\frac{E}{a}$  croît à partir de la valeur 0,2. S'il en était ainsi on serait amené à imposer à  $e^{-\frac{q}{k\theta}\left(\frac{2a}{10}-u\right)}$  de demeurer plus petit que la valeur (quelques dixièmes) que nous avons envisagée et par suite à restreindre l'intervalle dans lequel (25) et (5) se confondent (la coïncidence devenant mauvaise lorsque  $\frac{u}{a}$  approche trop près de la valeur 0,2).

Ces résultats montrent que la condition (16) est pratiquement suffisante pour que les faits expérimentaux relatifs à l'existence d'une température électronique de cathode soient expliqués avec un ordre de grandeur correct.

4. Le courant de saturation est donné par (15), qui s'écrit

$$I_s = BT e^{-\frac{q a - W_m}{kT}} \left[ \int_0^a f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE + \int_a^\infty f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE \right]. \quad (26)$$

La condition (16) étant supposée vérifiée, ce qui vient d'être dit au paragraphe 3 s'applique à la deuxième intégrale et l'on peut écrire, compte tenu de (18) :

$$I_s = \frac{I_s q}{\lambda k T} \int_0^a f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE + I_m e^{-\frac{q a}{10 k \theta}}. \quad (27)$$

Puisque  $I_s$  et  $I_m$  sont du même ordre de grandeur,  $I_m e^{-\frac{q a}{10 k \theta}}$  est très petit devant  $I_s$  et l'on doit avoir

$$\int_0^a f\left(\frac{E}{a}\right) e^{-\frac{qE}{kT}} dE = \frac{\lambda k T}{q} = \frac{\lambda k \theta}{q} \frac{I_s}{I_m}, \quad (28)$$

toujours avec une précision de l'ordre de quelques pour-cent.

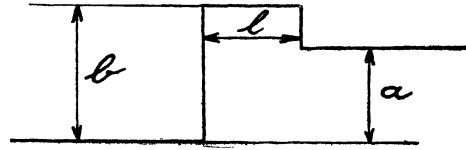
La condition (28) doit s'ajouter à la condition (16) imposée à  $f$  pour que l'explication des faits constatés expérimentalement et rappelés en  $I$  soit valable. Il est impossible de remplacer (28) par une expres-

sion asymptotique, car une telle expression dépend de l'allure de  $f$  au voisinage de zéro et cette allure est précisément inconnue.

5. En résumé l'hypothèse de l'existence d'une barrière de potentiel nous a permis de trouver les conditions que doivent vérifier (avec une approximation de l'ordre de grandeur de la précision des mesures) le coefficient de réflexion. Il n'est pas possible d'en déduire l'allure de la barrière de potentiel : nous allons essayer une barrière de forme simple et montrer qu'elle fournit une représentation approchée de la barrière vraie en vérifiant que (16) et (28) sont satisfaites avec une bonne approximation.

### III. — Essai d'une barrière de forme particulière.

1. La barrière la plus simple donnant lieu simultanément à une perte d'énergie  $qa$  et à un effet de « tunnel » est celle qui a la forme suivante :



(les potentiels vrais qui s'opposent à la sortie des électrons sont évidemment négatifs et valent  $-a$  et  $-b$ ).

Le coefficient de transparence conduit (voir Appendice) à la fonction  $f\left(\frac{E}{a}\right)$  suivante :

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = \frac{4 \sqrt{\frac{E}{a} \left(1 + \frac{E}{a}\right)}}{\left\{ \frac{\xi(\xi-1)}{\xi-1-\frac{E}{a}} \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{2\pi l}{h} \sqrt{2 m q a \left(\xi-1-\frac{E}{a}\right)} \right] \right\} + 2 \sqrt{\frac{E}{a} \left(1 + \frac{E}{a}\right)} + 1 + \frac{L}{a} \right\}}, \quad (29)$$

où  $\xi = \frac{b}{a} > 1$  est le rapport de la hauteur du « tunnel » à celle de la barrière  $a$  et où  $l$  est la longueur du « tunnel ».

(29) est valable quel que soit  $\frac{E}{a} > 0$ . Si  $\frac{E}{a} > \xi - 1$ , c'est-à-dire si l'énergie de l'électron émergent est supérieure à  $q(b-a)$  ou encore si l'énergie de l'électron incident est supérieure à la hauteur (énergétique) du tunnel, le terme sous le  $\operatorname{sh}$  devient imaginaire pur et le  $\operatorname{sh}^2$  devient le  $\sin^2$  d'une quantité réelle.

La condition (16) montre que lorsque  $\frac{E}{a}$  varie de 0,1 à 0,2  $f$  reste nettement petit devant l'unité, ce qui nous conduit à admettre que le  $\operatorname{sh}^2$  est grand

et que l'on peut sans erreur appréciable remplacer dans cet intervalle la fonction (29) par

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = \frac{16 \sqrt{\frac{E}{a} \left(1 + \frac{E}{a}\right)} \left(\xi - 1 - \frac{E}{a}\right)}{\xi(\xi - 1)} \quad (30)$$

$$\times e^{-\frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} \left(\xi - 1 - \frac{E}{a}\right)}.$$

Pour étudier plus commodément cette fonction, posons

$$10 \frac{E}{a} = 1,5 + x.$$

Il vient en substituant

$$f = \frac{16}{\xi(\xi - 1)} \sqrt{\frac{3 \times 1,15}{20}} \times \sqrt{\left(1 + \frac{2x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{11,5}\right)} \left(\xi - 1,15 - \frac{x}{10}\right)$$

$$\times e^{-\frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} \left(\xi - 1,15 - \frac{x}{10}\right)}. \quad (31)$$

En ne conservant que les termes du premier degré dans le développement des radicaux et en comparant ces développements à celui de l'exponentielle limité également à son terme du premier degré, on met (32) sous la forme (33) :

$$f = 8 \sqrt{\frac{3 \times 1,15}{5}} \frac{\xi - 1,15}{\xi(\xi - 1)}$$

$$\times e^{\left(\frac{1}{3} - \frac{0,1}{\xi - 1,15}\right) - \frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} (\xi - 1,15)} \left[1 - \frac{0,1}{2(\xi - 1,15)}\right]. \quad (32)$$

(32) et (33) sont identiques à quelques pour-cent près pourvu que  $\xi - 1,15$  ne soit pas trop petit et que  $\frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} (\xi - 1,15) \frac{1}{3 \cdot 200 (\xi - 1,15)^2}$  soit négligeable devant l'unité : Il suffit pour que nous puissions laisser de côté les termes du deuxième ordre dans les développements qui permettent de passer de (32) à (33) que

$$\left. \begin{aligned} \xi - 1,15 > \frac{1}{5} \text{ environ,} \\ \frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} (\xi - 1,15) \leq 3 \cdot 200 (\xi - 1,15)^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Revenant à la variable  $\frac{E}{a}$  la relation (33) s'écrit

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = 8 \sqrt{\frac{3 \times 1,15}{5}} \frac{\xi - 1,15}{\xi(\xi - 1)}$$

$$\times e^{\frac{0,1}{3} - \frac{1}{\xi - 1,15} - \frac{4\pi l}{h} \sqrt{2mqa} (\xi - 1,15)} \left[1 + \frac{0}{2(\xi - 1,15)}\right]$$

$$\times e^{\left[\frac{10}{3} - \frac{1}{\xi - 1,15} + \frac{2\pi l}{h} \sqrt{2mqa} (\xi - 1,15) \frac{1}{\xi - 1,15}\right] \frac{E}{a}}. \quad (35)$$

Cette équation fournit une fonction de  $\frac{E}{a}$  qui possède avec une précision acceptable, la forme (16). L'identification des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  conduit à

deux équations qui déterminent  $\xi$  et  $\frac{2\pi l}{h} \sqrt{2mqa}$ . On ne peut les résoudre qu'approximativement et l'on constate que l'on a pour solution

$$\left. \begin{aligned} \xi - 1,15 &\neq \frac{1}{5}, \\ \frac{2\pi l}{h} \sqrt{2mqa} &\neq 2,6. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Moyennant ces valeurs les conditions (34) sont vérifiées, l'hypothèse faite sur la confusion du sh et de l'exponentielle l'est également et (35) devient

$$f\left(\frac{E}{a}\right) \sim 4 e^{-6,8} e^{-12 \frac{E}{a}} \sim 4 \cdot 10^{-6,1} e^{-12 \frac{E}{a}} \quad (37)$$

(37) est en bonne concordance avec (18) et (19).

Ce résultat montre que la barrière proposée permet de satisfaire la condition (16), qui est la plus importante des deux relations que nous devons vérifier.

La condition (28) ne soulève pas de difficultés, comme le montre un raisonnement qualitatif simple : si  $f$  avait la forme (17) munie des valeurs (18) pour ses coefficients, dans l'intervalle  $0 - 0,1$  comme elle l'a, d'après ce que nous venons de voir, dans l'intervalle  $0,1 - 0,2$ , l'intégrale figurant dans (28) aurait pour valeur  $\frac{\lambda k_0}{q}$  et (28) serait satisfait moyennant  $I_m = I$ . La présence du terme en  $\sqrt{\frac{E}{a}}$  fait tendre la fonction  $f$  vers zéro, lorsque  $\frac{E}{a}$  tend vers zéro, et diminue la valeur de l'intégrale (28) qui se trouve ainsi égale à  $\frac{\lambda k_0}{q}$  multiplié par un facteur  $r$  inférieur à 1. Il est encore possible de satisfaire (28) en supposant que  $\frac{I_m}{I}$  est égal à ce facteur  $r$ . Autrement dit l'indétermination de la quantité  $\frac{I_m}{I}$  permet de l'ajuster de façon que (28) soit vérifiée. La seule réserve est que  $I_m$  et  $I$ , soient du même ordre de grandeur (ce que nous avons déjà supposé et que l'expérience confirme), c'est-à-dire que  $r$  ne soit pas trop petit. On se rend compte assez facilement que cette condition est vérifiée : la différence entre la valeur de  $f$  fournie par (17) et la forme réelle provient essentiellement du terme  $\sqrt{\frac{E}{a}}$  la fonction vraie tend donc vers zéro avec une tangente verticale et se raccorde à la fonction (17) au point  $0,1$ ; l'aire sous la courbe n'est donc pas profondément modifiée. Un calcul plus précis sur lequel nous n'insisterons pas confirme ce résultat et montre que  $r$  est de l'ordre de  $0,8$ .

Puisque  $f\left(\frac{E}{a}\right)$  tend vers zéro lorsque  $E$  tend vers zéro, l'enrichissement du faisceau émergeant de la cathode en électrons très lents est plus faible que la loi (17) ne le laisserait supposer : il y a là une raison théorique [qui se superpose à l'effet de

charge d'espace dont nous avons déjà parlé en I (§ 1)] pour que l'expérience ne permette pas de trouver, pour les très faibles valeurs de  $u$ , une loi des courants résiduels de la forme (2).

2. Revenons aux formules (36), elles nous permettent de préciser l'ordre de grandeur de la barrière de potentiel : nous savons déjà que  $a$  est voisin de 10 V, il résulte de la valeur de  $\xi$  que  $b$  est voisin de 13,5 V. La longueur  $l$  du tunnel vaut

$$l = \frac{2,6h}{2\pi} \sqrt{\frac{5}{2mq a}} \approx 2,7 \text{ Å.} \quad (38)$$

C'est une valeur qui est de l'ordre de grandeur des dimensions atomiques, ce qui est tout à fait vraisemblable.

3. Nous avons signalé en I (§ 1) que  $\theta$  variait avec  $T$  suivant la loi

$$\theta = \sigma T + \tau, \quad (39)$$

où  $\sigma < 1$ . La relation (39) n'est valable expérimentalement que si  $T'$  varie entre 900 et 1200° K; posons donc

$$\theta = T_0 + \theta', \quad T = T_0 + T', \quad (40)$$

où  $T_0 = 1000^\circ \text{ K}$ , de façon à ramener l'origine des axes de coordonnées  $T'$ ,  $\theta'$  dans la région où se font les expériences. Il vient alors, si l'on se borne au premier terme du développement du dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{\theta - T}{\theta T} &= \frac{\theta' - T'}{(T_0 + \theta')(T_0 + T')} \\ &= \frac{\theta' - T'}{T_0^2} \left( 1 - \frac{T_0}{\theta'} - \frac{T'}{T_0} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Compte tenu de (39), qui s'écrit également  $\theta' = \sigma T' + \tau'$ , il vient, en se bornant toujours aux termes du premier degré :

$$\frac{\theta - T}{\theta T} = \frac{\tau'}{T_0^2} \left( 1 - \frac{\tau'}{T_0} \right) \left[ 1 - \frac{2\sigma\tau' + T_0(1-\sigma)}{\tau(T_0 - \tau')} T' \right]. \quad (42)$$

Le coefficient de  $T'$  ne peut être nul, puisque les quantités  $\sigma$ ,  $\tau'$ ,  $T_0$  sont positives et puisque  $\sigma < 1$ ; la quantité  $\frac{\theta - T}{\theta T}$  varie donc avec la température; elle diminue quand celle-ci s'élève. En nous reportant à (16) et (17) nous constatons que  $\frac{\mu}{a}$  varie en fonction de  $T$  comme  $\frac{\theta - T}{\theta T}$ ; il en résulte que la barrière de potentiel doit être modifiée par une variation de température, car la quantité  $\frac{\mu}{a}$  a été [voir équat. (35)] trouvée égale à

$$\frac{\mu}{a} = \frac{10}{3a} - \frac{1}{b - 1,15a} + \frac{2\pi l}{h} \sqrt{\frac{2mq}{b - 1,15a}}. \quad (43)$$

La valeur de  $\frac{\mu}{a}$  est d'ailleurs très voisine

de  $\frac{2\pi l}{h} \sqrt{\frac{2mq}{b - 1,15a}}$  les autres termes figurant dans (43) restant faibles devant ce dernier. La variation de  $\theta$  en fonction de  $T$  nous conduit donc à penser que la quantité

$$\frac{l}{\sqrt{b - 1,15a}} \quad (44)$$

diminue lorsque la température s'élève. Les trois paramètres  $a$ ,  $b$  et  $l$  varient sans doute simultanément et l'on ne peut rien affirmer de certain sur leurs variations propres en fonction de la température. Cependant, si l'on admet que la barrière de potentiel est due à une couche double adsorbée à la surface de la cathode, il est raisonnable de penser que la largeur  $l$  de la barrière diminue quand la température augmente, puisque la distance moyenne entre les atomes décroît quand l'agitation thermique croît.

### Conclusion.

En parlant des résultats expérimentaux précités, nous avons montré que :

L'existence d'une température électronique des cathodes à oxydes supérieure à leur température thermodynamique, peut s'expliquer par la présence, à la surface de la cathode, d'une barrière de potentiel du type « à crête »; la largeur de cette barrière, supposée rectangulaire, serait d'environ 2,7 Å, et sa hauteur au-dessus du potentiel dans le métal, de l'ordre de 13,5 V, soit environ 4,5 V au-dessus du niveau de Fermi.

### APPENDICE.

#### Démonstration de la formule (29).

L'équation de Schrödinger s'écrit par un électron d'énergie  $\mathcal{E}$

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E} + qU)\psi = 0, \quad (45)$$

la barrière de potentiel proposée en III (§ 1) correspond à la fonction  $U$  suivante :

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 & \text{si } z < 0, \\ U &= -l & \text{si } 0 < z < l, \\ U &= -a & \text{si } z > l, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

et l'équation (45) devient

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \mathcal{E}\psi &= 0 & \text{si } z < 0, \\ \Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E} - qb)\psi &= 0 & \text{si } 0 < z < l, \\ \Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E} - qa)\psi &= 0 & \text{si } z > l. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Dans cette équation, l'énergie  $\mathcal{E}$  est l'énergie totale (cinétique et potentielle) de l'électron; puisque

$\mathcal{E} = 0$  si  $z < 0$ ,  $\mathcal{E}$  représente l'énergie cinétique de l'électron incident, l'énergie cinétique de l'électron émergent est alors

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - qa. \quad (48)$$

Nous nous intéressons à un faisceau d'électrons tombant sur la barrière de potentiel. Un tel faisceau doit être représenté à l'infini par des ondes planes : pour  $z$  infini négatif on peut avoir deux ondes se propageant en sens inverse, car la réflexion sur la barrière est possible (le point  $z = -\infty$  est une source, mais rien ne l'empêche d'être également un puits), par contre, pour  $z$  infini positif on ne peut avoir qu'une onde plane (ce point est un puits nécessairement); comme les solutions élémentaires de (47) sont précisément des ondes planes, ce sont elles qui sont les solutions intéressantes. La solution  $\psi$  peut donc s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \text{si } z < 0 : \\ \psi_I &= e^{-i(\nu_1 z + \mu_1 x + \nu_1 z)} + A e^{-i(\nu_1 z + \mu_1 x + \nu_1 z)} \\ &\quad \left( \text{avec } \nu_1 > 0 \text{ et } \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \mathcal{E} \right), \\ \text{si } 0 < z < l : \\ \psi_{II} &= B_1 e^{-i(\nu_2 z + \mu_2 x + \nu_2 z)} + B_2 e^{-i(\nu_2 z + \mu_2 x + \nu_2 z)} \\ &\quad \left[ \text{avec } \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E} - qb) \right], \\ \text{si } z > l : \\ \psi_{III} &= C e^{-i(\nu_3 z + \mu_3 x + \nu_3 z)} \\ &\quad \left[ \text{avec } \nu_3 > 0 \text{ et } \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E} - qa) \right], \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

le raccord de ces solutions pour  $z = 0$  et  $z = l$  impose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad (50)$$

[ce qui permet de mettre partout en facteur le terme  $e^{-i(\lambda_1 x + \mu_1 x)}$ ] et

$$1 + A = B_1 + B_2, \quad B_1 e^{-i\nu_2 l} + B_2 e^{-i\nu_2 l} = C e^{-i\nu_3 l}. \quad (51)$$

Le raccord des dérivées normales (dérivées par rapport à  $z$ ) impose

$$\left. \begin{aligned} i\nu_1(A - 1) &= i\nu_2(B_2 - B_1), \\ i\nu_2(B_2 e^{-i\nu_2 l} - B_1 e^{-i\nu_2 l}) &= -i\nu_3 C e^{-i\nu_3 l}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$\mathcal{E}$  représente l'énergie cinétique totale de l'électron incident. Si l'on appelle  $\mathcal{E}_1$  son énergie cinétique de translation le long de  $z$  et  $\mathcal{E}'_1$  l'énergie cinétique de translation le long de  $z$  de l'électron émergent, les dernières équations (49) (celles qui sont entre parenthèses) s'écrivent, compte tenu, de (50)

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \mathcal{E}_1, \quad \nu_2^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E}_1 - qb), \\ \nu_3^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E}_1 - qa) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ou encore

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} (\mathcal{E}'_1 + qa), \quad \nu_2^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} [\mathcal{E}'_1 - q(b-a)], \\ \nu_3^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \mathcal{E}'_1. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Supposons que  $\mathcal{E}'_1$  soit inférieur à  $q(b-a)$  c'est-à-dire que  $\mathcal{E}_1$  soit inférieur à  $qb$ ,  $\nu_2^2$  est négatif et  $\nu_2$  est imaginaire pur : nous poserons  $i\nu_2 = \nu'_2$ , ce qui donne

$$\nu_2^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} [q(b-a) - \mathcal{E}'_1]. \quad (55)$$

Le système d'équations (51), (52) peut être résolu en  $A, B_1, B_2, C$ , il fournit les amplitudes des ondes correspondantes, lorsque l'onde incidente a l'amplitude 1; en particulier  $A$  est l'amplitude de l'onde réfléchie,  $C$  celle de l'onde transmise.  $AA^*$  est donc le coefficient de réflexion et  $1 - AA^*$  le coefficient de transmission.  $CC^*$  n'est pas tout à fait égal au coefficient de transmission car l'onde transmise n'a pas la même longueur d'onde que l'onde incidente, l'égalité du flux entrant et du flux sortant montre que

$$\nu_1(1 - AA^*) = \nu_3 CC^*, \quad (56)$$

et par suite le coefficient de transmission  $\mathfrak{T}$  est égal à  $\frac{\nu_3 CC^*}{\nu_1}$  on vérifie aisément en résolvant (51), (52) que (56) est effectivement vérifié et que, tous calculs faits  $\mathfrak{T} = 1 - AA^*$  est donné par

$$\mathfrak{T} = \frac{4\nu_1\nu_3}{(\nu_2^2 + \nu_1^2 + \nu_3^2 + \frac{\nu_1^2\nu_3^2}{\nu_2^2}) \text{sh}^2 \nu'_2 l + \nu_1^2 + \nu_3^2 + 2\nu_1\nu_3}, \quad (57)$$

en remplaçant les  $\nu$  par leurs valeurs (54) et (55), on obtient

$$\mathfrak{T} = \frac{4\sqrt{\mathcal{E}'_1(\mathcal{E}'_1 + qa)}}{\left\{ \frac{q^2 b(b-a)}{q(b-a) - \mathcal{E}'_1} \text{sh}^2 \left\{ \frac{2\pi l}{h} \sqrt{2m[q(b-a) - \mathcal{E}'_1]} \right\} + 2\mathcal{E}'_1 + qa + 2\sqrt{\mathcal{E}'_1(\mathcal{E}'_1 + qa)} \right\}}. \quad (58)$$

Si l'on exprime  $\mathcal{E}'_1$  en électrons volts en posant  $\mathcal{E}'_1 = qE$  et si l'on fait systématiquement apparaître le rapport  $\frac{E}{a}$  dans (58), on obtient la valeur de  $\mathfrak{T}$

en fonction de  $\frac{E}{a}$  ou  $E$  est, en électrovolts, l'énergie de translation le long de  $z$  des électrons émergents. Si l'on se reporte à l'équation (11) on constate que c'est précisément la définition de la fonction  $f$ . On a donc, en posant  $\frac{b}{a} = \xi$  :

$$f\left(\frac{E}{a}\right) = \frac{4\sqrt{\frac{E}{a}\left(1 + \frac{E}{a}\right)}}{\left\{ \frac{\xi(\xi - 1)}{\xi - 1 - \frac{E}{a}} \text{sh}^2 \left[ \frac{2\pi l}{h} \sqrt{2mq a \left(\xi - 1 - \frac{E}{a}\right)} \right] + \frac{E}{a} + 1 + 2\sqrt{\frac{E}{a}\left(1 + \frac{E}{a}\right)} \right\}}, \quad (59)$$

la relation (59) est identique à la relation (29) qu'il s'agissait d'établir.