



Calcul du régime critique d'une pile cylindrique munie d'un réflecteur

J. Yvon

► To cite this version:

J. Yvon. Calcul du régime critique d'une pile cylindrique munie d'un réflecteur. Journal de Physique et le Radium, 1951, 12 (5), pp.573-579. <10.1051/jphysrad:01951001205057300>. <jpa-00234430>

HAL Id: jpa-00234430

<https://hal.science/jpa-00234430v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

CALCUL DU RÉGIME CRITIQUE D'UNE PILE CYLINDRIQUE MUNIE D'UN RÉFLECTEUR

Par J. YVON

Commissariat à l'Énergie atomique.

Laboratoires du Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses (Seine).

Sommaire. — Le laplacien d'une pile atomique constituée d'un cylindre multiplicateur noyé jusqu'à sa face supérieure dans une masse de graphite est évalué par une méthode de perturbation en profitant de l'hermiticité des opérateurs en cause. Le cas où une paroi mince s'intercale entre le milieu multiplicateur et le réflecteur est traité également, d'une manière moins complète.

1. Généralités. — Un réacteur nucléaire est constitué par un milieu multiplicateur de neutrons entouré d'un réflecteur. Le réflecteur renvoie vers le milieu multiplicateur une partie des neutrons que celui-ci perd par sa surface. Le réflecteur permet ainsi de faire des économies sur les matériaux qui constituent le milieu multiplicateur, soit en quantité, soit en qualité [1]. La fonction, en définitive, du réflecteur est de rendre moins onéreuse la réalisation du régime critique.

Il est assez facile d'estimer l'efficacité du réflecteur dans le cas d'une pile sphérique ou d'une pile cylindrique munie d'un réflecteur latéral seulement. Le cas où le réflecteur couvre toute la surface du cylindre est plus délicat. Ce sont les conditions de continuité aux frontières des différents milieux qui sont embarrassantes. Il en est de même lorsque l'une des bases seulement du cylindre est libre de réflecteur. C'est de ce dernier problème que nous nous occuperons ici, pour fixer les idées.

Le réacteur (ou la pile) que nous envisageons est de la catégorie dite « à neutrons thermiques ». Le réflecteur doit être aussi diffusant que possible, très peu absorbant et disponible en quantités suffisantes : le graphite répond à ces exigences [2].

Pour traiter ce genre de problèmes, il faut jeter du lest du côté de la rigueur : on substitue au milieu multiplicateur, qui est généralement hétérogène, un milieu homogène fictif qui est défini de manière à avoir en moyenne les mêmes propriétés multiplicatrices et diffusantes que le milieu réel [3].

Ici nous raisonnerons uniquement sur le milieu fictif et ne nous occuperons pas de savoir comment les exigences relatives au milieu fictif se traduisent pour le milieu réel équivalent.

On utilise deux images inégalement précises de la réalité [4] : la première constitue la théorie à « un groupe » (il s'agit de groupe de vitesses). Dans la théorie à un groupe tous les neutrons sont supposés avoir la même vitesse : d'une part on attribue aux neutrons thermiques non pas le spectre de vitesses donné par la loi de répartition de Maxwell, mais une vitesse unique, qui est la vitesse la plus probable d'agitation thermique; d'autre part, on néglige le fait que les neutrons, avant de vieillir et de disparaître à des vitesses thermiques, ont une enfance, assez brève heureusement, pendant laquelle leur vitesse est beaucoup plus élevée. La définition du milieu fictif tient compte toutefois dans une certaine mesure des aventures du neutron pendant son enfance. Il reste ensuite à traiter un problème de diffusion thermique, avec multiplication ou absorption, dans deux milieux contigus. Les approximations déjà faites ne justifieraient pas des calculs ultérieurs rigoureux et c'est la théorie élémentaire de la diffusion qui est appliquée à ce problème.

La théorie à « deux groupes » est une amélioration modeste mais appréciable de la théorie précédente. Au lieu de ramener le spectre des vitesses à une valeur unique, la valeur la plus probable, on représente le spectre à l'aide de deux composantes discrètes : on distingue les neutrons thermiques et l'on

attribue à ceux-ci une vitesse unique, la même que ci-dessus, et les neutrons rapides, c'est le second groupe, ramenés eux aussi à une vitesse unique. La valeur exacte adoptée pour cette dernière vitesse n'a pas beaucoup d'importance en définitive, ce qui est heureux, car il serait difficile de la choisir.

Ici la complication de la géométrie nous imposera de nous limiter à la théorie à un groupe.

Le milieu multiplicateur fictif est caractérisé par son « laplacien » et sa section efficace totale pour les neutrons thermiques. Le laplacien d'un milieu multiplicateur est positif. C'est, pour le milieu multiplicateur, la grandeur fondamentale; l'art du constructeur est de lui donner une valeur aussi élevée que possible. Le milieu diffusant est caractérisé par sa longueur de diffusion et sa section efficace totale. Ce sont des données expérimentales. L'inverse du carré de la longueur de diffusion, changé de signe, est le laplacien du réflecteur. Le problème que nous nous posons est d'ajuster la valeur du laplacien multiplicateur et les dimensions de la pile de manière que celle-ci réalise le régime critique : la densité des neutrons est alors stationnaire. La solution du problème fournit en même temps la loi de répartition en densité des neutrons à l'intérieur de la pile, qui est utile pour de nombreuses applications.

La solution obtenue ne peut être utilisée qu'après quelques aménagements : en ce qui concerne le laplacien, une première amélioration serait fournie par la théorie à deux groupes; mais on se contente des renseignements qualitatifs fournis par la théorie à deux groupes dans le cas de géométries plus simples. En ce qui concerne la répartition des neutrons, après avoir tenu compte des indications de la théorie à deux groupes, il faut encore transposer les résultats, obtenus pour le milieu fictif homogène, au milieu réel, qui est généralement hétérogène.

Au delà d'une certaine épaisseur, les couches du réflecteur qui peuvent venir ensuite n'ont plus d'efficacité. Il faut donc limiter celui-ci à une épaisseur raisonnable. Ceci étant supposé réalisé, nous pouvons néanmoins nous permettre, pour notre objet, de le supposer d'une épaisseur infinie : il en résultera que la loi de répartition calculée des neutrons dans les dernières couches du réflecteur ne correspondra pas à la réalité. Une loi plus correcte pour cette région devra être demandée à une étude annexe.

Dans ce qui suit il nous sera commode d'envisager, à côté du régime critique, des régimes convergents ou divergents. Mais ces régimes ne nous intéresseront que comme intermédiaires analytiques et il n'est pas question d'en donner une description physiquement correcte : l'existence des neutrons retardés sera entièrement négligée puisque les délais ne jouent aucun rôle dans l'estimation du régime critique, autrement dit stationnaire.

2. Formalisme. — Nous appliquerons les équations élémentaires de la diffusion. Dans le milieu multiplicateur les neutrons se propagent et se multiplient suivant l'équation

$$3 \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma_t} (\Delta + K^2) n, \quad (1)$$

où Σ_t est la section efficace totale par centimètre cube du milieu multiplicateur et K^2 son laplacien. n est la densité des neutrons. De même, dans le réflecteur,

$$3 \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma_t} \left(\Delta - \frac{1}{L^2} \right) n. \quad (2)$$

Ici L est la longueur de diffusion. En général Σ_t n'a pas la même valeur pour les deux milieux.

A la surface de séparation de deux milieux il faut appliquer les équations de continuité

$$n = \text{const.}, \quad \frac{1}{\Sigma_t} n' = \text{const.}, \quad (3)$$

n' étant la dérivée de n suivant la normale à la surface de séparation. De plus, on se contente de l'approximation qui pose

$$n = 0$$

sur toute surface en contact avec l'air.

En toute rigueur, dans la théorie de la propagation des neutrons qui s'appuie sur l'équation de transfert, c'est la densité de probabilité dans l'espace et en vitesse qui est continue quand on passe d'un milieu au voisin. Dans la théorie élémentaire de la diffusion lorsque Σ_t est constant d'un milieu à l'autre, cela se traduit assez bien par la continuité de n et de ses dérivées spatiales. La situation est moins bonne quand Σ_t est variable, car il conviendrait d'écrire à la fois la continuité de n et [de la dérivée de n pour toute direction, ce qui est incompatible, à moins que n ne varie pas en suivant le plan tangent à la surface de séparation : nos calculs seront d'autant meilleurs que les courants tangentiels seront faibles. Cette condition sera à la vérité assez mal remplie dans les « coins ». Un tel inconvénient n'existe pas pour le problème de la pile sphérique, parce que le courant y est radial.

Avec nos équations et conditions de continuité, l'opérateur O qui s'écrit

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\Sigma_t} (\Delta + K^2) & \text{dans la pile,} \\ \frac{1}{\Sigma_t} \left(\Delta - \frac{1}{L^2} \right) & \text{dans le réflecteur,} \end{array}$$

est un opérateur self-adjoint. Cette propriété est précieuse, car elle entraîne que ses fonctions propres forment une suite orthogonale, d'où l'application de méthodes classiques.

Un régime exponentiel de la pile correspond à l'expression de n en fonction du temps

$$n = n_j \exp\left(\frac{t}{\tau_j}\right)$$

τ_j étant la constante de temps. La suite des valeurs de $g_j = \frac{3}{v\tau_j}$ constitue la suite des valeurs propres de l'opérateur O . Si la pile est légèrement sur-critique, la première valeur propre est positive, c'est la valeur propre « fondamentale », les autres sont négatives. Si la pile est sous-critique, toutes les valeurs propres sont négatives. Enfin, si la pile est juste critique, la valeur propre fondamentale est nulle. En toute rigueur ajoutons qu'il peut bien arriver que la suite des valeurs propres soit continue, à l'exception toutefois à coup sûr de la valeur propre fondamentale, qui est toujours discrète.

Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique, il est aisé d'obtenir directement la solution critique : la solution se formule d'abord dans chaque milieu ; il reste un coefficient arbitraire pour le réflecteur. Les deux conditions de continuité éliminent cet arbitraire et fournissent l'équation déterminante du laplacien. On travaille au fond uniquement le long du rayon vecteur. Dans le problème cylindrique les conditions de continuité interviennent de point en point. L'intuition ne permet pas d'essayer des solutions de structure simple.

3. Traitement rigoureux d'un problème aux données approximatives. — Il est impossible d'écrire simplement la répartition des neutrons pour le problème qui nous intéresse, mais nous pouvons y parvenir avec des données un peu différentes. C'est à partir du problème approximatif ainsi résolu que nous pourrions parvenir par approximation à la solution du problème réel.

Pour fixer les idées nous supposons le cylindre multiplicateur vertical.

La figure représente la pile : la région (1) est la région multiplicatrice.

Nous diviserons le réflecteur en trois régions : (2), (3), (4).

Dans le problème réel ces trois régions sont de même nature et sont caractérisées par les mêmes paramètres :

Σ_2 pour la section efficace totale ;

L pour la longueur de diffusion ;

cependant que le milieu multiplicateur est caractérisé par une section efficace Σ_1 et par un laplacien K^2 , qu'il s'agit de déterminer de manière que la pile soit critique.

Dans le problème approximatif on attribue aux régions (2) et (3) les propriétés du réflecteur réel, mais à la région (4) des propriétés qui seront définies ci-dessous, de manière à rendre aisée l'intégration

du problème et qui en feront un milieu de moins bonne qualité que le réflecteur réel $L_4 < L$, $\Sigma_4 \sim \Sigma_2$.

Quant au milieu multiplicateur, on lui attribue la section efficace Σ_1 réelle et un certain laplacien K_0^2 .

Un régime exponentiel du système approximatif vérifie donc les équations

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K_0^2)n_1 &= \Sigma_1 g n_1, \\ (\Delta - L^{-2})n_2 &= \Sigma_2 g n_2, \\ (\Delta - L^{-2})n_3 &= \Sigma_2 g n_3, \\ (\Delta - L_4^{-2})n_4 &= \Sigma_4 g n_4, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où n_1, n_2, n_3, n_4 sont les expressions de n dans les régions respectives (1), (2), (3), (4).

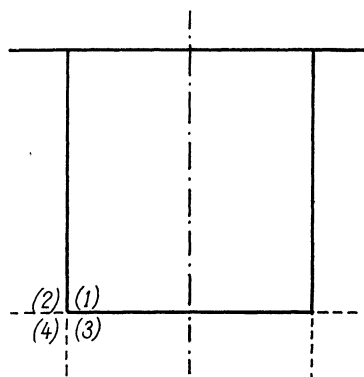


Fig. 1.

Une solution *continue* de ce système d'équations est [5]

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sin \alpha \frac{z}{h} J_0\left(x \frac{r}{R}\right), \\ n_2 &= \frac{J_0(x)}{K_0(y)} \sin \alpha \frac{z}{h} K_0\left(y \frac{r}{R}\right), \\ n_3 &= \sin \alpha \exp\left(-\beta \frac{z-h}{h}\right) J_0\left(x \frac{r}{R}\right), \\ n_4 &= \frac{J_0(x)}{K_0(y)} \sin \alpha \exp\left(-\beta \frac{z-h}{h}\right) K_0\left(y \frac{r}{R}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

R est le rayon de la pile, h sa hauteur. z et r sont les coordonnées cylindriques. L'origine de l'axe des z , qui est dirigé vers le bas, est au niveau supérieur de la pile. Les paramètres α, β, x, y restent à déterminer. Ils doivent d'abord vérifier les relations

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2} + K_0^2 &= \Sigma_1 g, \\ -\frac{\alpha^2}{h^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{1}{L^2} &= \Sigma_2 g, \\ \frac{\beta^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2} - \frac{1}{L^2} &= \Sigma_2 g, \\ \frac{\beta^2}{h^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{1}{L_4^2} &= \Sigma_4 g. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nous nous imposerons que g soit nul. La pile

« approximative » est juste critique, si toutefois le régime correspondant est bien le régime fondamental. On est pratiquement assuré qu'il en est bien ainsi si la solution représentée par n_1, n_2, n_3 et n_4 est partout positive. Ceci impose à α et à x de satisfaire aux inégalités

$$\alpha < \pi, \quad x < 2,408. \quad (4)$$

Combinons maintenant les relations (3). Elles nous permettent d'établir une relation entre K_0 et L_4

$$\frac{1}{L_4^2} = \frac{2}{L^2} + K_0^2. \quad (5)$$

Comme nous l'avions annoncé, L_4 est plus petit que L .

Pour compléter le traitement de la pile approximative il convient d'écrire la relation de continuité entre les dérivées de n suivant la normale le long des surfaces de séparation. Ces conditions doivent être satisfaites point par point : le succès de la méthode provient de ce que la chose est possible moyennant un choix convenable de Σ_4 .

Il vient

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \alpha \cotg \alpha, \\ \frac{\gamma K_1(\gamma)}{K_0(\gamma)} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \frac{x J_1(x)}{J_0(x)}, \\ \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La dernière égalité détermine le Σ_4 de la pile approximative. Σ_2 et Σ_1 sont en général du même ordre de grandeur : Σ_4 est donc peu différent de Σ_2 .

Nous savons déjà que L_4 est plus petit que L : le milieu (4) est donc d'une qualité inférieure à celle du milieu (2), (3), milieu réfléchissant de la pile réelle.

Revenons aux relations (3), que nous n'avons pas encore entièrement exploitées. Combinées avec les deux premières relations (6) elles nous permettront de préciser α, β, x, y et K_0^2 .

Se donnant arbitrairement x on calculera y par

$$\frac{x J_1(x)}{J_0(x)} = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \frac{\gamma K_1(\gamma)}{K_0(\gamma)}, \quad (7)$$

α par

$$\alpha = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} x^2 - \frac{h^2}{L^2}}, \quad (8)$$

puis on déterminera x (et par suite α, β, y) par la condition

$$\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \alpha \cotg \alpha \right)^2 = \frac{h^2}{R^2} x^2 + \frac{h^2}{L^2}. \quad (9)$$

Il faut conduire les essais de manière que α reste inférieur à π et x à 2,408.

Enfin K_0^2 se calcule par la formule

$$K_0^2 = \frac{x^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{h^2}. \quad (10)$$

4. Méthode de perturbation appliquée au calcul de la pile réelle. — La pile approximative diffère de la pile réelle seulement par la qualité du réflecteur, qui occupe une région secondaire parce que située dans les « coins ». On peut songer à calculer la solution du problème posé par la pile réelle par la méthode de perturbation, l'approximation « zéro » étant fournie par la solution relative à la pile approximative. Le problème est plus complexe qu'en mécanique ondulatoire, où la méthode de perturbation est familière, parce qu'il y a ici perturbation non seulement de l'opérateur, mais aussi des conditions de continuité.

Précisons en quoi consiste la perturbation. D'abord pour l'opérateur. O est l'opérateur de la pile approximative, $O + \delta O$ celui de la pile réelle. Cela donne le tableau suivant :

Région.	Pile approximative.	Pile réelle.
(1).....	$O = \frac{1}{\Sigma_1} (\Delta + K_0^2)$	$O + \delta O = \frac{1}{\Sigma_1} (\Delta + K_0^2 + \delta K^2)$
(4).....	$O = \frac{1}{\Sigma_4} \left(\Delta - \frac{1}{L_4^2} \right)$	$O + \delta O = \frac{1}{\Sigma_2} \left(\Delta - \frac{1}{L^2} \right)$
(2), (3)...	$O = \frac{1}{\Sigma_2} \left(\Delta - \frac{1}{L^2} \right)$	$O + \delta O = O.$

$K^2 = K_0^2 + \delta K^2$ est le laplacien cherché.

Au sujet des conditions de continuité, le seul changement concerne le passage entre (2—3) et (4) (n est la solution d'approximation zéro, $n + \delta n$ la solution du problème perturbé).

Pile approximative.	Pile réelle.
$\frac{n'_{2-3}}{\Sigma_2} = \frac{n'_1}{\Sigma_1}$	$(n' + \delta n')_{2-3} = (n' + \delta n')_1. \quad (1)$

L'équation

$$O n = g n,$$

donne par variation, au second ordre près,

$$O \delta n + \delta O n = g \delta n + \delta g n.$$

Multiplions scalairement par la fonction n membre à membre

$$(n, O \delta n) + (n, \delta O n) = g(n, \delta n) + \delta g(n, n).$$

Mais

$$g(n, \delta n) = (O n, \delta n).$$

Ainsi

$$(n, \delta O n) - \delta g(n, n) = (O n, \delta n) - (n, O \delta n). \quad (3)$$

Exprimons le second membre à l'aide de quantités connues. D'abord

$$(O n, \delta n) - (n, O \delta n) = (\Sigma^{-1} \Delta n, \delta n) - (n, \Sigma^{-1} \Delta \delta n), \quad (4)$$

à condition de prendre pour Σ la valeur convenable dans chaque région. On ramène ensuite le second membre à des intégrales de surface sur les surfaces de séparation des différents milieux. Pour la surface qui entoure le milieu (1) le résultat est nul, parce

que n et δn satisfont aux mêmes relations de continuité. Reste la surface qui sépare (4) et (2-3). Il vient

$$(On, \delta n) - (n, O \delta n) = \int dS \left[\frac{1}{\Sigma_2} (\delta n \cdot n'_{2-3} - n \cdot \delta n'_{2-3}) - \frac{1}{\Sigma_4} (\delta n \cdot n'_4 - n \cdot \delta n'_4) \right]. \quad (5)$$

La normale est partout orientée de (2-3) vers (4). Une simplification évidente résulte de la relation (1). Il reste

$$(On, \delta n) - (n, O \delta n) = \int dS \left[-\frac{1}{\Sigma_2} \delta n'_{2-3} + \frac{1}{\Sigma_4} \delta n'_4 \right] n. \quad (6)$$

Éliminons $\delta n'_{2-3}$ à l'aide de (1) et (2). Il vient, n étant continu,

$$(On, \delta n) - (n, O \delta n) = \int dS \left(\frac{1}{\Sigma_4} - \frac{1}{\Sigma_2} \right) (\delta n'_4 + n'_4) n. \quad (7)$$

Mais le terme en $\delta n'_4$ est du second ordre et doit être négligé. Il reste

$$(On, \delta n) - (n, O \delta n) = \left(\frac{1}{\Sigma_4} - \frac{1}{\Sigma_2} \right) \int n n'_4 dS. \quad (8)$$

Finalement, revenant à (3),

$$\delta g(n, n) = (n, \delta On) + \left(\frac{1}{\Sigma_2} - \frac{1}{\Sigma_4} \right) \int n n'_4 dS. \quad (9)$$

Évaluons quelques intégrales. Nous calculons $\int n^2 dV = (n, n)$ en évaluant la contribution des quatre régions :

région (1) :

$$\int n^2 dV = \frac{1}{2} \pi R^2 h \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) [J_0(x)^2 + J_1(x)^2],$$

ou, en désignant par V le volume du milieu multiplicateur

$$\frac{1}{2} V \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) (J_0^2 + J_1^2);$$

région (2) :

$$\int n^2 dV = \frac{1}{2} V \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \left[\left(\frac{K_1(\gamma)}{K_0(\gamma)} \right)^2 - 1 \right] J_0(x)^2;$$

région (3) :

$$\int n^2 dV = \frac{1}{2} V \frac{\sin^2 \alpha}{\beta} (J_0^2 + J_1^2);$$

région (4) :

$$\int n^2 dV = \frac{1}{2} V \frac{\sin^2 \alpha}{\beta} \left(\frac{K_1^2}{K_0^2} - 1 \right) J_0^2.$$

D'autre part évaluons $\int n n'_4 dS$ le long des inter-surfaces (2-4) et (3-4).

Rappelons que

$$n_1 = \frac{J_0(x)}{K_0(\gamma)} \sin \alpha \exp \left(-\beta \frac{z-h}{h} \right) K_0 \left(\gamma \frac{r}{R} \right).$$

Alors, le long de la surface (2-4) :

$$\begin{aligned} n'_4 &= -\frac{\beta}{h} \frac{J_0(x)}{K_0(\gamma)} \sin \alpha K_0 \left(\gamma \frac{r}{R} \right), \\ n n'_4 &= -\frac{\beta}{h} \left(\frac{J_0}{K_0} \sin \alpha \right)^2 K_0^2 \left(\gamma \frac{r}{R} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Le long de la surface (3-4), de même :

$$n n'_4 = -\frac{\gamma}{R} (J_0 \sin \alpha)^2 \frac{K_1}{K_0} \exp -2\beta \frac{z-h}{h}. \quad (11)$$

Alors, sur (2-4) :

$$\int n n'_4 dS = -\frac{V}{h^2} \beta \sin^2 \alpha J_0^2 \left(\frac{K_1^2}{K_0^2} - 1 \right), \quad (12)$$

et sur (3-4) :

$$\int n n'_4 dS = -\frac{V}{R^2} \frac{\gamma}{\beta} \sin^2 \alpha J_0^2 \frac{K_1}{K_0}. \quad (13)$$

Nous sommes outillés pour calculer δg .

5. Calcul final du laplacien. — Nous déterminerons δK^2 de manière que la pile réelle à son tour soit critique. Donc $\delta g = 0$.

La relation (4-9) devient

$$(n, \delta On) + \left(\frac{1}{\Sigma_2} - \frac{1}{\Sigma_4} \right) \int n n'_4 dS = 0. \quad (14)$$

δO est nul dans les régions (2) et (3) et vaut

$$\frac{1}{\Sigma_1} \delta K^2 \quad \text{dans la région (1),}$$

$$\left(\frac{1}{\Sigma_2} - \frac{1}{\Sigma_4} \right) \Delta + \frac{1}{\Sigma_1 L_1^2} - \frac{1}{\Sigma_2 L^2} \quad \text{dans la région (4).}$$

Mais dans cette région $\Delta n = L_1^{-2} n$.

Ainsi

$$\delta O \cdot n = \frac{1}{\Sigma_1} \delta K^2 n \quad \text{dans la région (1),}$$

$$\delta O \cdot n = \frac{1}{\Sigma_2} (L_1^{-2} - L^{-2}) n \quad \text{dans la région (4).}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} (n, \delta On) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma_1} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) (J_0^2 + J_1^2) \delta K^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma_2} \left(K_0^2 + \frac{1}{L^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{\beta} \left(\frac{K_1^2}{K_0^2} - 1 \right) J_0^2. \end{aligned}$$

Finalement la relation (1) devient

$$\begin{aligned} \delta K^2 &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\beta \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)} \frac{1}{1 + \frac{J_1^2}{J_0^2}} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \\ &\times \left\{ \left(K_0^2 + \frac{1}{L^2} \right) \left(\frac{K_1^2}{K_0^2} - 1 \right) \right. \\ &\left. + 2 \left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} - 1 \right) \left[\frac{\beta^2}{h^2} \left(\frac{K_1^2}{K_0^2} - 1 \right) + \frac{\gamma}{R^2} \frac{K_1}{K_0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

6. Estimation de la répartition des neutrons.

— Cette répartition n'a pas besoin d'être connue avec une grande précision. Si l'on constate que δK^2 est petit, on pourra se contenter d'adopter pour la répartition des neutrons dans le milieu multiplicateur, la répartition calculée pour la pile approximative, c'est-à-dire

$$n = \sin \alpha \frac{z}{h} J_0 \left(x \frac{r}{R} \right)$$

Il est intéressant ensuite pour les applications de calculer la densité moyenne (dans le milieu multiplicateur); il vient

$$V \bar{n} = \int_1 n dV,$$

soit

$$\bar{n} = 2 \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} \frac{J_1(x)}{x}.$$

On calcule aussi la densité moyenne le long de l'axe du milieu multiplicateur

$$h \bar{n}(O) = \int n(O) dz,$$

soit

$$\bar{n}(O) = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}.$$

On note que la densité maximum est par convention

$$n_m = 1.$$

7. Exemple numérique. — Les nombres du tableau suivant ont été calculés pour une pile de volume $V = 10 \text{ m}^3$ et différentes valeurs du rapport $\frac{h}{2R}$. On a adopté pour L la valeur $0,4 \text{ m}$ et pour le rapport $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$ la valeur 1 . x , α , β , y sont des nombres sans dimensions. Le laplacien est exprimé en m^{-2} . Il a été exprimé avec un nombre excessif de décimales de manière à mettre en valeur la minime importance de la correction δK^2 .

$\frac{h}{2R} \dots\dots$	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
$x \dots\dots\dots$	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81
$\alpha \dots\dots\dots$	2,68	2,74	2,78	2,82	2,85
$y \dots\dots\dots$	3,80	3,38	3,10	2,81	2,72
$\beta \dots\dots\dots$	5,33	6,43	7,45	8,45	9,35
$K_0^2 \dots\dots$	4,2753	4,0367	3,9623	3,9767	4,0294
$\delta K^2 \dots\dots$	-0,0072	-0,0063	-0,0055	-0,0048	-0,0041
$K^2 \dots\dots$	4,2680	4,0304	3,9568	3,9719	4,0253

Le rapport $\frac{h}{2R}$ optimum correspond au laplacien K^2 minimum : c'est la forme pour laquelle le milieu multiplicateur est le plus pauvre en qualités multiplicatrices. Cette valeur de $\frac{h}{2R}$ est $1,16$. Le laplacien correspondant est $3,95$.

La courbe ci-jointe représente la variation de K^2 en fonction de $\frac{h}{2R}$.

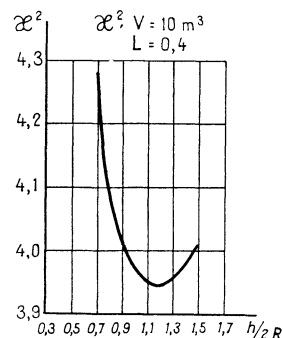


Fig. 2.

Voici d'ailleurs un petit tableau de valeurs optimums pour différentes valeurs du volume et de la longueur de diffusion. Dans chaque cas le premier nombre est le rapport hauteur sur diamètre et le second le laplacien (non corrigé) :

	9 m ³ .	10 m ³ .
0,4 m.	1,16 4,21	1,16 3,96
0,5 m.	1,25 3,95	1,20 3,79

En conséquence, une amélioration du graphite réflecteur qui ferait passer la longueur de diffusion du réflecteur de $0,4$ à $0,5 \text{ m}$, permettrait, la qualité du milieu multiplicateur restant constante, d'économiser le dixième de ce dernier.

8. Effet d'une paroi mince. — Les calculs précédents n'envisagent pas la présence éventuelle d'une paroi mince, modérément absorbante, entre le

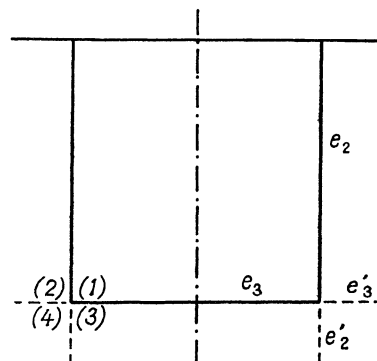


Fig. 3.

multiplicateur et le réflecteur. Dans ce cas le problème est sensiblement plus difficile. Nous pouvons toutefois le résoudre par une méthode analogue à celle des premiers paragraphes, mais avec un achèvement moindre. Nous introduirons encore une pile

approximative, mais, compte tenu de l'expérience apportée par les précédents calculs numériques, nous admettons que la pile approximative représente suffisamment bien la pile réelle pour qu'il ne soit pas nécessaire de procéder à un calcul de perturbation qui serait sans doute embarrassant en raison de la non-hermiticité des problèmes rencontrés maintenant.

Dans la pile approximative la paroi est prolongée par deux feuilles de même nature, l'une d'épaisseur e'_2 prolongeant la virole d'épaisseur e_2 , l'autre horizontale d'épaisseur e'_3 prolongeant le fond d'épaisseur e_3 .

e'_2 sépare la région (3) et la région (4). e'_3 sépare la région (2) et la région (4). Nous allons préciser les épaisseurs à adopter.

Les conditions de continuité sont, pour les densités, la continuité pure et simple. Pour le flux elles sont les suivantes (formules de continuité à travers une lame mince) :

à la limite (1-2) :

$$n'_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} n'_1 + e_2 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{n_1}{L_a^2};$$

à la limite (1-3) :

$$n'_3 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} n'_1 + e_3 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{n_1}{L_a^2};$$

à la limite (2-4) :

$$n'_4 = \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} n'_2 + e'_3 \frac{\Sigma_4}{\Sigma_a} \frac{n_2}{L_a^2};$$

à la limite (3-4) :

$$n'_4 = \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} n'_3 + e'_2 \frac{\Sigma_4}{\Sigma_a} \frac{n_3}{L_a^2}.$$

Σ_a est la section efficace totale du matériau de la paroi, L_a est la longueur de diffusion. On s'arrange pour que les deux dernières conditions s'identifient respectivement aux deux premières, ce qui impose, comme dans le problème précédent,

$$\frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1},$$

et pour les épaisseurs des feuilles postiches :

$$e'_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_4} e_2, \quad e'_3 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_4} e_3,$$

ou, aussi bien :

$$e'_2 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} e_2, \quad e'_3 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} e_3.$$

On voit que dans la pile approximative, par suite de la présence des feuilles postiches, les « coins » sont encore plus abîmés que dans le problème précédent. On continue à prendre pour la région (4) une longueur de diffusion fictive L_4 telle que

$$\frac{1}{L_4^2} = \frac{2}{L^2} + K_0^2.$$

Moyennant les modifications adoptées pour la pile, on peut écrire une solution simple :

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \alpha \frac{\gamma}{h} J_0 \left(x \frac{r}{R} \right), \\ n_2 &= \frac{J_0(x)}{K_0(\gamma)} \sin \alpha \frac{\gamma}{h} K_0 \left(\gamma \frac{r}{R} \right), \\ n_3 &= \sin \alpha \exp - \beta \frac{\gamma - k}{h} J_0 \left(x \frac{r}{R} \right), \\ n_4 &= \frac{J_0(x)}{K_0(\gamma)} \sin \alpha \exp - \beta \frac{\gamma - h}{h} K_0 \left(\gamma \frac{r}{R} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\left. \begin{aligned} K_0^2 &= \frac{x^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{R^2}, \\ \frac{1}{L^2} &= \frac{\gamma^2}{R^2} - \frac{\alpha^2}{h^2} = \frac{\beta^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A quoi il faut ajouter les conditions imposées par les relations de continuités relatives aux flux :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma K_1(\gamma)}{K_0(\gamma)^2} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \frac{x J_1(x)}{J_0(x)} - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{e_2 R}{L_a^2}, \\ \beta &= - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \alpha \cotg \alpha - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{e_3 h}{L_a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A l'aide de la deuxième équation (1) et des équations (2) on détermine par tâtonnements x , γ , α , β . Il faut faire attention que les termes en e_2 et e_3 ne doivent pas être considérés comme des infiniments petits. Puis on calcule le laplacien de la pile approximative, K_0^2 . On peut admettre que le laplacien de la pile réelle en diffère à peu près de la même manière que dans le problème sans paroi, l'excès du laplacien de la pile étant toutefois sans doute un peu plus élevé ici.

Manuscrit reçu le 25 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] PERRIN F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, 1394.
- [2] SMYTH H. D. — *Atomic Energy*, U. S. A., 1945.
- [3] WIGNER E. P. — *The Science and Engineering of Nuclear Power*, Cambridge, U. S. A., 1947, I, 155.
- [4] SOODAK H. et CAMPBELL E. C. — *Elementary Pile Theory*, New-York et Londres, 1950, p. 51.
- [5] J_0 , J_1 , K_0 , K_1 sont des fonctions de Bessel. Consulter : WATSON. — *Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1944.