



HAL
open science

Théorie unitaire affine du champ physique

M. A. Tonnelat

► **To cite this version:**

M. A. Tonnelat. Théorie unitaire affine du champ physique. Journal de Physique et le Radium, 1951, 12 (2), pp.81-88. 10.1051/jphysrad:0195100120208100 . jpa-00234360

HAL Id: jpa-00234360

<https://hal.science/jpa-00234360>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORIE UNITAIRE AFFINE DU CHAMP PHYSIQUE

Par M^{me} M. A. TONNELAT.

Sommaire. — Je suppose qu'une fonction d'action quelconque dépend uniquement des coefficients de connexion de la variété affine par l'intermédiaire des cinq tenseurs du second ordre que l'on peut former par contraction du tenseur de courbure. J'obtiens ainsi une équation qui généralise l'équation fondamentale de la relativité générale. J'en déduis la solution générale rigoureuse, c'est-à-dire l'expression de la connexion affine en fonction des densités résultant des tenseurs de base. Il est alors possible de déterminer les équations rigoureuses des champs.

Introduction. — Les théories unitaires classiques ont pour but d'interpréter les phénomènes gravifiques et électromagnétiques comme des manifestations des propriétés géométriques de l'univers.

Ce but peut être poursuivi dans deux directions différentes :

On peut modifier le nombre des dimensions de l'univers, considérer, par exemple, un univers à cinq dimensions. Cette voie, inaugurée par Kaluza (1921), a été reprise par Einstein dans sa deuxième théorie unitaire (théorie d'Einstein-Mayer). Les théories *projectives* telles que celles de Shouten et de Pauli s'y rattachent en ce sens qu'elles constituent aussi une modification du groupe de transformation de Lorentz. Comme le fait remarquer très justement Einstein, ces tentatives constituent des théories unitaires *au sens fort*, car électromagnétisme et gravitation apparaissent comme deux phénomènes qu'on peut représenter par les composantes d'un même être géométrique. Ils ne peuvent être envisagés indépendamment l'un de l'autre. Il s'agit d'une synthèse analogue à celle qu'a réalisée la Relativité restreinte pour les champs électrique et magnétique.

On peut, au contraire, ne pas modifier le groupe de Lorentz, mais généraliser les hypothèses qui président au transport parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé infiniment petit. Il est possible, en effet, de considérer des variétés à connexion affine plus générales que les variétés riemanniennes :

1. Soit en supposant, avec Weyl, que le transport parallèle d'un vecteur modifie sa longueur. Géométriquement, cela revient à supposer que la variété considérée est douée d'une courbure supplémentaire, dite courbure d'homothétie. Analytiquement on est amené à envisager, à côté des changements de coordonnées et indépendamment de ces derniers, des transformations de jauge. L'ensemble est nécessaire pour déterminer complètement la connexion de l'univers et pour aboutir aux équations générales du champ physique.

2. Soit en supposant que le déplacement parallèle

d'un vecteur ne modifie que sa direction, comme dans la géométrie de Riemann. Toutefois on généralise cette géométrie en postulant que l'univers admet une torsion. Les espaces tordus, introduits par M. Cartan ont été utilisés par M. Eyraud (1926) pour l'édification de théories unitaires, puis par Infeld (1928), enfin par Einstein (1929), qui essaya de construire une théorie unitaire en supposant l'existence d'un parallélisme absolu, c'est-à-dire d'un espace doué de torsion mais sans courbure.

Dans les deux cas, la conservation du groupe de Lorentz implique que le champ électromagnétique et le champ de gravitation doivent être regardés comme des êtres géométriques indépendants, liés seulement par les équations auxquelles ils obéissent. Ils sont « formellement » unifiés. Il s'agit là d'une unification *au sens faible* si l'on désire reprendre la terminologie d'Einstein.

Ici, nous considérerons uniquement ce deuxième type de théorie unitaire et, à l'intérieur de celui-ci, les théories du groupe 2 qui, seules, constituent la généralisation naturelle et immédiate de la Relativité générale.

Dans le cas d'une connexion affine générale, c'est-à-dire dès que l'univers est supposé doué simultanément d'une courbure et d'une torsion, il est extrêmement difficile de mener jusqu'au bout la théorie de façon rigoureuse. Autrement dit, la connexion affine de la variété ne s'exprime pas d'une façon simple en fonction des tenseurs fondamentaux si l'on ne restreint pas arbitrairement le nombre de ces derniers.

Plus précisément, le problème est le suivant : Les équations de la théorie se déduisent d'un principe d'action :

$$\delta \int \alpha \, d\tau = 0$$

appliqué à une fonction α indéterminée, mais qu'on suppose dépendre des coefficients de connexion et de leurs dérivées par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs tenseurs du second rang. La généralisation la plus simple de la Relativité générale consiste à supposer que α dépend, d'ailleurs arbitrairement,

d'un tenseur $R_{\mu\nu}$ qui se déduit du tenseur d'Einstein $\hat{R}_{\mu\nu}$ en remplaçant les symboles de Riemann-Christoffel $\{\overset{\rho}{\mu\nu}\}$ par des coefficients quelconques $\Delta_{\mu\nu}^{\rho}$. On aboutit ainsi à un système de 64 équations linéaires dont la résolution, théoriquement élémentaire, est pratiquement inextricable.

Certains auteurs, partis d'une connexion affine générale, ont tourné la difficulté en supposant que $\bar{\alpha}$ ne dépend pas d'un $R_{\mu\nu}$ ainsi défini (1). Récemment Einstein et Schrödinger ont repris la question en revenant au tenseur $R_{\mu\nu}$. En dépit d'ingénieuses combinaisons, il ne semble pas que le problème théoriquement simple de la détermination de la connexion affine en fonction des champs ait reçu une solution rigoureuse et en même temps exploitable (2). Alors que sa résolution est immédiate en Relativité générale, sa généralisation la plus naturelle semble donc se heurter à de grandes complications. Tout au plus peut-on dire avec Schrödinger que le problème est soluble d'une façon approchée et que l'on peut calculer les coefficients de connexion en fonction des champs avec l'approximation que l'on veut. Mais cette conclusion est loin d'être satisfaisante et constitue un obstacle dès que l'on veut poursuivre effectivement les calculs. Cependant, la théorie semble si naturelle, écrit Einstein, qu'elle justifie de grands efforts. Tel est précisément le but de ce travail (3).

1. Les tenseurs fondamentaux et la connexion affine. — Nous considérons une variété purement affine dont la connexion est définie par les 64 coefficients $\Delta_{\nu\mu}^{\rho}$. Nous distinguons les parties symétrique et antisymétrique de ces coefficients en posant

$$\Delta_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (1)$$

Les $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ étant symétriques et les $\Lambda_{\mu\nu}^{\rho}$ antisymétriques en μ, ν . Les 24 $\Lambda_{\mu\nu}^{\rho}$ sont les composantes du tenseur de torsion de la variété. Avec Einstein, remarquons que les Δ peuvent introduire deux formes de transport parallèle pour un vecteur ξ

$$\left. \begin{aligned} d\xi_+^{\rho} &= -\Delta_{\mu\nu}^{\rho} \xi^{\mu} dx^{\nu}, \\ d\xi_-^{\rho} &= -\Delta_{\nu\mu}^{\rho} \xi^{\mu} dx^{\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

tandis que les Γ définissent sans ambiguïté le transport parallèle habituellement considéré

$$d\xi_0^{\rho} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \xi^{\mu} dx^{\nu}. \quad (3)$$

A l'aide des $\Delta_{\mu\nu}^{\rho}$ on forme le tenseur de courbure

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}(\Delta) = \partial_{\rho} \Delta_{\mu\nu}^{\tau} - \partial_{\nu} \Delta_{\mu\rho}^{\tau} + \Delta_{\lambda\rho}^{\tau} \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} - \Delta_{\mu\rho}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\tau}. \quad (4)$$

(1) A. EINSTEIN, *Ann. of Math.*, 1945, **46**, 578; *The meaning of relativity* (Appendix 2^e édition); E. SCHRÖDINGER, *Proc. of the Roy. In. Acad.*, 1946, **51 A 4**, 42; 1947, **51 A 13**, 163; 1948, **51 A 16**, 295; 1948, **52 A 1**, 1.

(2) Cf. STRAUSS, *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 414.

(3) Cf. M. A. TONNELAT, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, **230**, 182; 1950, **231**, 470, 487, 512.

Mais on peut aussi former un autre tenseur de courbure avec les coefficients transposés

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} = \Delta_{\nu\mu}^{\rho}.$$

On a

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\rho} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\tau} - \partial_{\nu} \tilde{\Delta}_{\rho\mu}^{\tau} + \tilde{\Delta}_{\rho\lambda}^{\tau} \tilde{\Delta}_{\nu\mu}^{\lambda} - \tilde{\Delta}_{\rho\mu}^{\lambda} \tilde{\Delta}_{\lambda\nu}^{\tau}. \quad (5)$$

A partir de chacun de ces tenseurs on peut obtenir deux tenseurs contractés de première et de seconde espèce :

$$\left. \begin{aligned} P_{\mu\nu} &= R\rho_{\mu\nu\rho}(\Delta) \\ &= \partial_{\rho} \Delta_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Delta_{\mu\rho}^{\rho} + \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} \Delta_{\lambda\rho}^{\rho} - \Delta_{\mu\rho}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu\nu} &= R\rho_{\rho\mu\nu}(\Delta) = \partial_{\nu} \Delta_{\rho\mu}^{\rho} - \partial_{\mu} \Delta_{\rho\nu}^{\rho}; \\ Q_{\mu\nu} &= R\rho_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Delta}) \\ &= \partial_{\rho} \tilde{\Delta}_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu} \tilde{\Delta}_{\rho\mu}^{\rho} + \tilde{\Delta}_{\nu\mu}^{\lambda} \tilde{\Delta}_{\rho\lambda}^{\rho} - \tilde{\Delta}_{\rho\mu}^{\lambda} \tilde{\Delta}_{\nu\lambda}^{\rho}, \\ T_{\mu\nu} &= R\rho_{\rho\mu\nu}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\nu} \tilde{\Delta}_{\mu\rho}^{\rho} - \partial_{\mu} \tilde{\Delta}_{\nu\rho}^{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ces tenseurs, joints au tenseur

$$I_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu} \Lambda_{\nu}, \quad (8)$$

constituent donc cinq tenseurs dont peut dépendre *a priori* toute fonction d'action arbitraire. On peut, comme je l'ai montré ailleurs, développer toute la théorie en supposant que la fonction d'action dépend des cinq tenseurs $P_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ et $I_{\mu\nu}$, et trouver, même dans ce cas, la solution des équations fondamentales de la théorie.

Néanmoins, on simplifie beaucoup les calculs sans diminuer notablement l'intérêt des résultats obtenus en adoptant, comme le propose Einstein dans un travail dont je viens de prendre connaissance (4), un principe d'« hermiticité ».

Une expression A est dite hermitienne par rapport à μ et ν si elle ne change pas quand on transforme simultanément μ en ν et $\tilde{\Delta}$ en Δ . On a

$$A_{\mu\nu}(\Delta) = A_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}).$$

Une expression A est antithermitienne en μ, ν si

$$A_{\mu\nu}(\Delta) = -A_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}).$$

Einstein suppose que la fonction d'action dépend des seules combinaisons hermitiennes des tenseurs de base. On est donc conduit à former les combinaisons linéaires

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [P_{\mu\nu}(\Delta) + P_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] \\ &\quad - \frac{1}{4} [S_{\mu\nu}(\Delta) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] \\ &= \partial_{\rho} \Delta_{\mu\nu}^{\rho} - \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Gamma_{\nu} + \partial_{\nu} \Gamma_{\mu}) + \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda} - \Delta_{\mu\rho}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\rho}, \\ H_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu}(\Delta) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\mu} \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu} \Lambda_{\mu}, \\ I_{\mu\nu} &= \Lambda_{\mu} \Lambda_{\nu}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(4) A. EINSTEIN, *The meaning of relativity* (Appendix 2^e édition).

et

$$\left. \begin{aligned} L_{\mu\nu} &= [P_{\mu\nu}(\Delta) - P_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] - \frac{1}{2} [S_{\mu\nu}(\Delta) - S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] \\ &= \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} \Lambda_{\lambda} - \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Lambda_{\nu} + \partial_{\nu} \Lambda_{\mu}), \\ K_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} [S_{\mu\nu}(\Delta) - S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

et à postuler que la fonction d'action dépend des seules combinaisons $R_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$, $I_{\mu\nu}$.

Enfin, avec Einstein, on peut substituer au tenseur la combinaison linéaire suivante

$$U_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{6} H_{\mu\nu} - \frac{1}{12} I_{\mu\nu}, \quad (11)$$

qui reste invariante dans une transformation

$$\Delta_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} + (\delta_{\mu}^{\rho} \varphi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\rho} \varphi_{\mu}). \quad (12)$$

En particulier, si

$$\varphi_{\rho} = -\frac{1}{6} \Lambda_{\rho}, \quad (13)$$

c'est-à-dire si

$$\Delta_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} - \frac{1}{6} (\delta_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu} - \delta_{\nu}^{\rho} \Lambda_{\mu}), \quad \tilde{\Lambda}_{\rho} = 0, \quad (14)$$

le tenseur $U_{\mu\nu}(\Delta) = R_{\mu\nu}(\tilde{\Delta})$ ne dépend pas de Λ_{ρ} . Définissons les densités tensorielles

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial U_{\mu\nu}}, \quad \mathcal{H}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial H_{\mu\nu}}, \quad \mathcal{J}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_{\mu\nu}}, \quad (15)$$

et posons

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (16)$$

$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ et $-\mathcal{F}^{\mu\nu}$ étant les parties symétrique et antisymétrique de $\mathcal{R}^{\mu\nu}$.

Considérons maintenant un tenseur $r_{\mu\nu}$ dont les éléments forment le déterminant r . Désignons par $rr^{\mu\nu}$ le mineur relatif à chaque $r_{\mu\nu}$.

Par définition

$$r_{\mu\sigma} r^{\mu\rho} = r_{\sigma\mu} r^{\rho\mu} = \delta_{\sigma}^{\rho}, \quad (17)$$

$$dr = rr^{\mu\nu} dr_{\mu\nu} = -rr^{\mu\nu} dr^{\mu\nu}. \quad (18)$$

Il résulte de (17)

$$dr^{\mu\nu} = -r^{\mu\lambda} r^{\rho\nu} dr_{\rho\lambda}, \quad dr_{\mu\nu} = -r_{\mu\lambda} r_{\rho\nu} dr^{\rho\lambda}. \quad (19)$$

Les $r^{\mu\nu}$ se rattachent aux densités $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ en choisissant

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \sqrt{-r} r^{\mu\nu}. \quad (20)$$

On en déduit

$$r^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}, \quad (21)$$

en posant

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-r} f^{\mu\nu}, \quad \mathcal{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-r} g^{\mu\nu}. \quad (22)$$

Désignons maintenant par $\gamma_{\mu\nu}$ et par $-\varphi_{\mu\nu}$ les parties symétrique et antisymétrique du tenseur $r_{\mu\nu}$

$$r_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\nu}. \quad (23)$$

Appelons γ et φ les déterminants $|\gamma_{\mu\nu}|$ et $|\varphi_{\mu\nu}|$, $\gamma\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi\varphi^{\mu\nu}$ les mineurs relatifs aux éléments $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$. On a les relations habituelles

$$\gamma_{\mu\sigma} \gamma^{\mu\rho} = \delta_{\sigma}^{\rho}, \quad \varphi_{\mu\sigma} \varphi^{\mu\rho} = \delta_{\sigma}^{\rho}. \quad (24)$$

Le calcul du déterminant r en fonction de γ et de φ conduit aux résultats suivants :

$$r = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma} \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu\sigma} \quad (25)$$

et le mineur $rr^{\mu\nu}$ a l'expression

$$\begin{aligned} rr^{\mu\nu} &= \gamma\gamma^{\mu\nu} - \varphi\varphi^{\mu\nu} - \gamma\gamma^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} \varphi_{\sigma\rho} \\ &+ \gamma\gamma^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\tau\lambda} - \gamma^{\mu\tau} \gamma^{\nu\lambda} \right) \varphi_{\rho\tau} \varphi_{\sigma\lambda}, \end{aligned} \quad (26)$$

dont on déduit, en comparant avec (21),

$$g^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{r} \gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\tau\lambda} - \gamma^{\mu\tau} \gamma^{\nu\lambda} \right) \varphi_{\rho\tau} \varphi_{\sigma\lambda}, \quad (27)$$

$$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{r} \varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{r} \gamma^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} \varphi_{\sigma\rho}. \quad (28)$$

2. Obtention de l'équation fondamentale. —

Cela étant posé, nous devons déduire les équations de la théorie d'un principe variationnel appliqué à la fonction d'action \mathcal{A}

$$\delta \int \mathcal{A} d\tau = 0. \quad (29)$$

Dans une théorie purement affine on suppose que \mathcal{A} , par l'intermédiaire des tenseurs de base, dépend uniquement des coefficients de connexion. On doit donc considérer uniquement les variations des $64 \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\rho}$. Les équations d'Euler

$$\frac{d}{dx^{\sigma}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Delta_{\mu\nu}^{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Delta_{\mu\nu}^{\rho}} = 0, \quad (30)$$

équivalentes à (29), nous conduisent aux relations suivantes entre les densités

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{+-}^{\mu\nu}; \rho &= \frac{1}{6} (\delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{R}^{\lambda\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \mathcal{R}^{\mu\lambda}) \\ &- \frac{1}{3} (\delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{F}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \mathcal{F}^{\mu}) \end{aligned} \quad (31)$$

et

$$\partial_{\sigma} \mathcal{H}^{\sigma\rho} = \mathcal{J}^{\rho\sigma} \Lambda_{\sigma}, \quad (32)$$

en posant

$$\mathcal{F}^{\mu} = \partial_{\rho} \mathcal{F}^{\rho\mu}, \quad (33)$$

et, selon les notations d'Einstein,

$$\mathcal{R}_{+-}^{\mu\nu}; \rho = \partial_{\rho} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Delta_{\sigma\rho}^{\mu} \mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Delta_{\rho\sigma}^{\nu} \mathcal{R}^{\mu\sigma} - \mathcal{R}^{\mu\nu} \Gamma_{\rho}. \quad (34)$$

Si l'on remplace ; ρ par la dérivée covariante ; ρ^* obtenue en substituant dans (34) les coefficients $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho}$ définis par (3), l'équation (31) s'écrit simplement

$$\mathcal{R}_{+-}^{\mu\nu}; \rho^* = -\frac{1}{3} (\delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{F}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \mathcal{F}^{\mu}). \quad (35)$$

Enfin, on peut éliminer complètement le second nombre de (35). Il suffit pour cela d'écrire la dérivée covariante $\mathcal{R}_{+-}^{\mu\nu}$; ρ' à l'aide de coefficients $\Delta_{\mu\nu}^{\rho}$ tels que

$$\left. \begin{aligned} \check{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} &= \Delta_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} r_{\mu\nu} f^{\bar{\rho}} - \frac{1}{6} (\delta_{\mu}^{\rho} r_{\lambda\nu} - \delta_{\nu}^{\rho} r_{\mu\lambda}) f^{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\rho} r_{\nu\lambda} - \delta_{\nu}^{\rho} r_{\mu\lambda}) (f^{\lambda} + f^{\bar{\lambda}}), \\ \Gamma'_{\rho} &= \Gamma_{\rho} + \frac{1}{3} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda} = \frac{1}{2r} \partial_{\rho} r, \\ \Lambda'_{\rho} &= 2r_{\mu\lambda} (f^{\lambda} + f^{\bar{\lambda}}), \end{aligned} \right\} (36)$$

en posant

$$f^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{-r}} \mathcal{F}^{\rho}, \quad f^{\bar{\rho}} = \gamma^{\rho\lambda} \varphi_{\lambda\sigma} f^{\sigma}, \quad (37)$$

l'équation (35) s'écrit simplement

$$\mathcal{R}_{+-}^{\mu\nu}; \rho' = 0. \quad (38)$$

Ainsi les équations de la théorie se scindent en deux groupes dont l'un (35) ne dépend que des $6_0 \check{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho}$ indépendants ($\check{\Lambda}_{\rho} = 0$) et dont l'autre (23) ne dépend que des Λ_{ρ} .

Si l'on écarte la solution triviale $\Lambda_{\rho} = 0$, les équations en divergence (32), jointes à la définition

$$H_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu} \Lambda_{\mu},$$

montrent que $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ vérifie des relations qui diffèrent des équations maxwelliennes par le second membre de (32). Λ_{ρ} joue donc le rôle d'un potentiel du type mésonique.

En ce qui concerne le groupe (38) [ou (34)] son développement en fonction des $\Delta_{\mu\nu}^{\rho}$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Delta_{\sigma\rho}^{\mu} \mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Delta_{\rho\sigma}^{\nu} \mathcal{R}^{\mu\sigma} \\ - \mathcal{R}^{\mu\nu} \Gamma_{\rho} + \frac{1}{6} (\delta_{\rho}^{\nu} \mathcal{R}^{\mu\lambda} - \delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{R}^{\lambda\nu}) \\ = - \frac{1}{3} (\delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{F}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \mathcal{F}^{\mu}). \end{aligned} \quad (39)$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{-r}} r_{\mu\nu}$, on obtient

$$\Gamma_{\rho} = \frac{1}{2r} \partial_{\rho} r - \frac{1}{3} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda}. \quad (40)$$

La substitution dans (39) donne alors simplement

$$r_{+-}^{\mu\nu}; \rho' = - \frac{1}{3} (\delta_{\rho}^{\mu} f^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} f^{\mu}) - \frac{1}{3} r^{\mu\nu} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda} \quad (41)$$

ou, ce qui revient au même,

$$r_{+-}^{\mu\nu}; \rho' = 0. \quad (42)$$

Sous la forme (38) ou (42) les équations fondamentales de la théorie constituent une généralisation simple des équations de la relativité générale

$$g^{\mu\nu}; \rho = 0. \quad (43)$$

Les équations (42) ne sont pas modifiées si l'on change les indices μ et ν l'un dans l'autre et si l'on remplace simultanément $\Delta_{\mu\nu}^{\rho}$ et $r_{\mu\nu}$ par

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} = \Delta_{\nu\mu}^{\rho}, \quad \tilde{r}_{\mu\nu} = r_{\nu\mu}. \quad (44)$$

On constate facilement, en utilisant les définitions (13) et (36), que les conditions

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho} = \Delta_{\nu\mu}^{\rho}, \quad \tilde{r}_{\mu\nu} = r_{\nu\mu} \quad (45)$$

entraînent (44). (On a $\tilde{f}^{\rho} = -f^{\rho}$ et $\tilde{f}^{\bar{\rho}} = f^{\bar{\rho}}$). L'hermiticité des tenseurs de base réalisée dans l'hypothèse (45) est donc bien cohérente avec l'hermiticité de (43) et l'hypothèse (44).

C'est la résolution rigoureuse de la très simple équation (42) qui va maintenant nous occuper.

3. Résolution de l'équation fondamentale et détermination de la connexion affine. — L'équation fondamentale (42) s'écrit

$$r_{+-}^{\mu\nu}; \rho' \equiv \partial_{\rho} r^{\mu\nu} + \Delta_{\sigma\rho}^{\mu} r^{\sigma\nu} + \Delta_{\rho\sigma}^{\nu} r^{\mu\sigma} = 0. \quad (46)$$

Les composantes $r_{\alpha\beta}$ satisfont une équation analogue qu'on obtient en multipliant (46) par $r_{\alpha\nu} r_{\mu\beta}$. On a, d'après (17) et (19),

$$\partial_{\rho} r_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\rho}^{\sigma} r_{\sigma\nu} - \Delta_{\rho\nu}^{\sigma} r_{\mu\sigma} = 0. \quad (47)$$

Scindons (47) en parties symétrique et antisymétrique en μ, ν en utilisant la décomposition (23). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu} - (\gamma_{\sigma\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}) \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{\sigma\mu} \Lambda_{\nu\rho}^{\sigma} + \varphi_{\sigma\nu} \Lambda_{\mu\rho}^{\sigma}) = 0, \end{aligned} \quad (S_1)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\gamma_{\sigma\mu} \Lambda_{\nu\rho}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\nu} \Lambda_{\mu\rho}^{\sigma}) \\ + (\varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}) = 0. \end{aligned} \quad (A_1)$$

Nous allons introduire maintenant les symboles

$$\left. \begin{aligned} [\mu\nu, \rho] &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu}), \\ \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \gamma_{\mu\nu}), \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

et appeler \hat{D} la dérivée covariante qui utilise ces symboles

$$\hat{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \mu\rho \end{array} \right\} \varphi_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \nu\rho \end{array} \right\} \varphi_{\mu\sigma}, \quad (49)$$

avec, par définition,

$$\hat{D}_{\rho} \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (50)$$

Permutons ρ et μ puis ρ et ν dans (S₁) et dans (A₁). On obtient des équations (S₂) et (A₂), puis (S₃) et (A₃). Formons (S₂) + (S₃) - (S₁), ainsi

que (A₂) + (A₃) + (A₁). Il vient

$$2\gamma_{\rho\lambda}u_{\mu\nu}^{\lambda} + (\varphi_{\lambda\mu}\Lambda_{\nu\rho}^{\lambda} - \varphi_{\lambda\nu}\Lambda_{\mu\rho}^{\lambda}) = 0, \quad (S)$$

$$-I_{\mu\nu\rho} + 2\hat{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\rho}\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma} + 2(\varphi_{\sigma\mu}u_{\nu\rho}^{\sigma} - \varphi_{\sigma\nu}u_{\mu\rho}^{\sigma}) = 0, \quad (A)$$

en posant

$$u_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \quad (51)$$

et

$$I_{\mu\nu\rho} = \partial_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\varphi_{\nu\rho}. \quad (52)$$

Notons qu'en formant (A₂) + (A₃) - (A₁) et (S₂) + (S₃) + (S₁), on obtient les équations (A') et (S'), qui sont aussi les conséquences de (A) et de (S),

$$-I_{\mu\nu\rho} + \gamma_{\sigma\rho}\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\nu}\Lambda_{\rho\mu}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\mu}\Lambda_{\nu\rho}^{\sigma} = 0, \quad (A')$$

$$\gamma_{\sigma\rho}u_{\mu\nu}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\nu}u_{\rho\mu}^{\sigma} + \gamma_{\sigma\mu}u_{\nu\rho}^{\sigma} = 0. \quad (S')$$

En multipliant par $\gamma^{\lambda\sigma}$ nous tirons de (S) :

$$2u_{\mu\nu}^{\lambda} = -\gamma^{\lambda\rho}(\varphi_{\sigma\mu}\Lambda_{\nu\rho}^{\sigma} + \varphi_{\sigma\nu}\Lambda_{\mu\rho}^{\sigma}), \quad (53)$$

et, en substituant dans (A), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\rho} - \gamma^{\sigma\lambda}(\varphi_{\sigma\nu}\bar{V}_{\mu\lambda\rho} - \varphi_{\sigma\mu}\bar{V}_{\nu\lambda\rho}) \\ - 2\gamma^{\sigma\lambda}(\varphi_{\sigma\nu}V_{\rho\lambda,\bar{\mu}} - \varphi_{\sigma\mu}V_{\rho\lambda,\bar{\nu}}) \\ + \bar{V}_{\mu\nu,\rho} - V_{\mu\nu,\bar{\rho}} = -2\hat{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu\rho}, \end{aligned} \quad (E)$$

en utilisant les notations

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu\nu,\rho} &= \gamma_{\rho\sigma}\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma}, \\ V_{\mu\nu,\bar{\rho}} &= \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu,\sigma} = \varphi_{\rho\lambda}\Lambda_{\mu\nu}^{\lambda}, \\ V_{\mu\nu,\bar{\rho}} &= \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu,\bar{\sigma}}, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

et

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu\nu\rho} &= V_{\mu\nu,\rho} + V_{\rho\mu,\nu} + V_{\nu\rho,\mu}, \\ \bar{V}_{\mu\nu\rho} &= V_{\mu\nu,\bar{\rho}} + V_{\rho\mu,\bar{\nu}} + V_{\nu\rho,\bar{\mu}}, \\ \bar{\bar{V}}_{\mu\nu\rho} &= V_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}} + V_{\rho\mu,\bar{\bar{\nu}}} + V_{\nu\rho,\bar{\bar{\mu}}}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Les 64 équations (47) peuvent donc être remplacées par les 40 équations (S) qui expriment les coefficients symétriques $u_{\mu\nu}^{\rho}$ en fonction des $\Lambda_{\mu\nu}^{\rho}$ et par les 24 équations (E) qui expriment les coefficients antisymétriques en fonction des champs. Finalement tout se ramène donc à la résolution des 24 équations (E).

Cette résolution étant assez compliquée, nous l'examinerons avec quelque détail. Pour la mener à bien il est utile d'introduire les notations suivantes :

$$V_{\mu\nu,\rho}^* = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} V_{\lambda\sigma,\rho}, \quad (56)$$

$$A_{\rho} = \frac{1}{2} \gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\nu\beta} \varphi_{\mu\nu} V_{\alpha\beta,\rho}, \quad (57)$$

$$B_{\rho} = \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} V_{\mu\nu,\rho}. \quad (58)$$

Nous avons d'autre part

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}. \quad (59)$$

On peut calculer les expressions

$$\gamma^{\alpha\lambda}(\varphi_{\alpha\nu}V_{\rho\lambda,\bar{\mu}} - \varphi_{\alpha\mu}V_{\rho\lambda,\bar{\nu}}), \quad \bar{V}_{\mu\nu\rho} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{V}}_{\mu\nu\rho}$$

qui figurent dans (E) en fonction de $V_{\mu\nu\rho}$, A_{ρ} , B_{ρ} et Λ_{ρ}^{λ} . Après substitution dans (E) et réduction des termes semblables on trouve

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} V_{\mu\nu,\rho}^* + V_{\mu\nu,\bar{\rho}} \\ + \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\rho\eta} (\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} - \varphi_{\alpha\mu} \varphi_{\nu\eta}) V_{\rho\lambda\eta} \\ + 2\varphi_{\mu\nu} A_{\rho} + \sqrt{\varphi} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\alpha\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} B_{\tau} \\ - \left(1 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) V_{\mu\nu\rho} \\ - (\varphi_{\mu\nu} A_{\rho} + \varphi_{\rho\mu} A_{\nu} + \varphi_{\nu\rho} A_{\mu}) \\ + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\tau\sigma} \gamma^{\rho\alpha} \gamma^{\sigma\beta} \varphi_{\alpha\beta} V^{\tau\sigma} \\ - \gamma^{\alpha\lambda} \left[\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \Lambda_{\lambda}^{\alpha} \right. \\ \left. + \varphi_{\lambda\rho} (\varphi_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha}^{\lambda} + \varphi_{\alpha\mu} \Lambda_{\nu}^{\lambda} + \varphi_{\nu\alpha} \Lambda_{\mu}^{\lambda}) \right] \\ = I_{\mu\nu\rho} - 2\hat{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (E')$$

Calculons A_{ρ} , B_{ρ} , $V_{\mu\nu\rho}$ en fonction des quantités connues, c'est-à-dire des champs et de leurs dérivées : L'équation (A') s'écrit encore

$$V_{\mu\nu\rho} = I_{\mu\nu\rho}. \quad (60)$$

D'autre part, la multiplication de (E') par $\frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta}$ nous donne

$$\begin{aligned} A_{\rho} + B_{\rho} - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\rho\eta} \varphi_{\alpha\mu} V_{\rho\lambda\eta} \\ = \frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta} (I_{\rho\eta\rho} - 2\hat{D}_{\rho} \varphi_{\rho\eta}). \end{aligned} \quad (61)$$

Enfin la valeur de B_{ρ} nous est donnée facilement par (A). En multipliant cette équation par $\frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta}$, on trouve en effet

$$B_{\rho} - 2u_{\rho} = \frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta} (I_{\rho\eta\rho} - 2\hat{D}_{\rho} \varphi_{\rho\eta}) \quad (u_{\rho} = u_{\rho\lambda}^{\lambda}), \quad (62)$$

et, par conséquent, en substituant dans (56),

$$A_{\rho} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\mu\nu} \varphi_{\alpha\mu} I_{\lambda\nu\rho} - 2u_{\rho}. \quad (63)$$

Or on a, d'une part,

$$\frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta} (I_{\rho\eta\rho} - 2\hat{D}_{\rho} \varphi_{\rho\eta}) = \partial_{\rho} \text{Log} \frac{\gamma}{\varphi} + \frac{1}{2} \varphi^{\rho\eta} I_{\rho\eta\rho}. \quad (64)$$

D'autre part,

$$u_{\rho} = \Gamma_{\rho}^{\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2r} \partial_{\rho} r - \frac{1}{2\gamma} \partial_{\rho} \gamma = \frac{1}{2} \partial_{\rho} \text{Log} \frac{r}{\gamma}. \quad (65)$$

Il en résulte, d'après (62) et (63),

$$B_{\rho} = \partial_{\rho} \text{Log} \frac{r}{\varphi} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} I_{\mu\nu\rho}, \quad (66)$$

$$A_{\rho} = -\partial_{\rho} \text{Log} \frac{r}{\gamma} + \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\mu\nu} \varphi_{\alpha\mu} I_{\lambda\nu\rho}. \quad (67)$$

Substituons les valeurs (66) et (67) dans (E'). Nous obtenons

$$V_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} V_{\mu\nu,\rho}^* + V_{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\mu\nu,\rho}, \quad (\mathcal{E})$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = & -2\dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu\rho} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} I_{(\mu\nu)\rho}^* \\ & + 2\varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{(\mu\nu)\rho\lambda}^* \varphi^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \text{Log} \frac{r}{\varphi} \\ & - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \text{Log} \frac{r}{\varphi} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{ab} I_{ab\rho} \\ & - \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \text{Log} \frac{r}{\gamma} \\ & + \gamma^{\alpha\lambda} \left[\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \Lambda_\lambda' \right. \\ & \quad \left. + \varphi_{\rho\lambda} (\varphi_{\alpha\nu} \Lambda_\mu' + \varphi_{\mu\alpha} \Lambda_\nu' - \varphi_{\nu\mu} \Lambda_\alpha') \right]. \quad (68) \end{aligned}$$

En multipliant par $\gamma^{\mu\rho}$ on obtient

$$I_{\mu\nu\rho} = \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \text{Log} \frac{r}{\varphi}, \quad (69)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = & -2\dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \text{Log} \frac{\varphi}{\gamma} \\ & + 2\varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{r}{\gamma} - 2 \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \text{Log} \frac{r}{\varphi} \\ & + \gamma^{\alpha\lambda} \left[\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \Lambda_\lambda' \right. \\ & \quad \left. + \varphi_{\rho\lambda} (\varphi_{\alpha\nu} \Lambda_\mu' + \varphi_{\mu\alpha} \Lambda_\nu' + \varphi_{\nu\mu} \Lambda_\alpha') \right]. \quad (70) \end{aligned}$$

Nous avons donc, en définitive, à résoudre l'équation (E) dans laquelle $R_{\mu\nu,\rho}$ est une quantité connue. Formons pour cela $\mathcal{E}_{\mu\nu,\rho}^*$ et $\mathcal{E}_{\mu\nu,\bar{\rho}}$, en tenant compte des relations

$$V_{\mu\nu,\rho}^* = -V_{\mu\nu,\rho} \quad (71)$$

et

$$V_{\mu\nu,\bar{\rho}} = -\frac{\varphi}{\gamma} V_{\mu\nu,\rho} - \frac{1}{\gamma} (r - \gamma - \varphi) V_{\mu\nu,\bar{\rho}}. \quad (72)$$

On obtient

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\rho}^* + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} V_{\mu\nu,\rho} + V_{\mu\nu,\bar{\rho}}^* = R_{\mu\nu,\rho}^* \quad (\mathcal{E}^*) \\ V_{\mu\nu,\bar{\rho}} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} V_{\mu\nu,\bar{\rho}}^* - \frac{\varphi}{\gamma} V_{\mu\nu,\rho} \\ - \frac{1}{\gamma} (r - \gamma - \varphi) V_{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\mu\nu,\bar{\rho}}. \quad (\bar{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

En éliminant $V_{\mu\nu,\bar{\rho}}^*$ et $V_{\mu\nu,\bar{\rho}}$ entre (E), (E*) et ($\bar{\mathcal{E}}$), il vient

$$\begin{aligned} aV_{\mu\nu,\rho} - bV_{\mu\nu,\rho}^* \\ = \left(2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\mu\nu,\rho}^* - R_{\mu\nu,\bar{\rho}}, \quad (\mathcal{E}_1) \end{aligned}$$

en posant

$$a = 2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \quad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right), \quad (73)$$

et en formant $a\mathcal{E}_1 + b\mathcal{E}_1^*$ nous obtenons

$$(a^2 - b^2) V_{\mu\nu,\rho} = aS_{\mu\nu,\rho} + bS_{\mu\nu,\rho}^*, \quad (74)$$

avec

$$S_{\mu\nu,\rho} = \left(2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\mu\nu,\rho}^* - R_{\mu\nu,\bar{\rho}}, \quad (75)$$

(74) détermine la partie antisymétrique des coefficients de connexion. La partie symétrique de ces coefficients est donnée par (53), qui s'écrit encore

$$u_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2} (V_{\mu\rho,\bar{\nu}} + V_{\nu\rho,\bar{\mu}}). \quad (76)$$

Les coefficients de connexion

$$\Lambda_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \gamma^{\rho\lambda} V_{\mu\nu,\lambda} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \gamma^{\rho\lambda} u_{\mu\nu,\lambda}$$

sont donc entièrement déterminés par (68), (74), (75) et (76).

4. Équations des champs. — Dans une théorie métrique, le principe variationnel

$$\delta \int d\tau = 0$$

donne *a priori* et quel que soit α deux sortes de relations : les unes se déduisent de la variation des coefficients de connexion $\Delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, les autres de la variation des $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ considérés comme variables indépendantes.

Dans une théorie purement affine, seules les relations dues aux variations des $\Delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ peuvent être obtenues directement et indépendamment de la forme de α . Les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ sont des fonctions de $\Delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ définies par (15)

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_{\mu\nu}}. \quad (45)$$

Quelle que soit la forme de α cette fonction sera donc du type suivant :

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{R}^{\mu\nu} U_{\mu\nu}, \quad (77)$$

mais seules les variations $\delta U_{\mu\nu}$ sont à considérer. C'est ce que nous avons fait dans ce qui précède. Les variations $\delta \mathcal{R}^{\mu\nu}$ susceptibles de conduire aux équations du champ

$$U_{\mu\nu}(\Delta) = R_{\mu\nu}(\Delta) = 0$$

ne se déduisent pas d'un principe variationnel, puisque les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ ne sont pas des variations indépendantes.

Pour aller plus loin, il faut attribuer à la fonction une forme particulière. Les équations du champ se déduisent alors de la définition (15). Posons, par exemple,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{\lambda} \sqrt{-\hat{R}} \\ [R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}(\hat{\Delta}), \hat{R} = R(\hat{\Delta}) = \det R_{\mu\nu}(\hat{\Delta})], \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

(15) s'écrit alors

$$\lambda \alpha^{\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-\dot{R}}} \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{R}^{\mu\nu}} = \sqrt{-\dot{R}} \dot{R}^{\mu\nu} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (79)$$

$$(\dot{R}^{\mu\nu} = \min \dot{R}^{\mu\nu}),$$

c'est-à-dire

$$\dot{R}^{\mu\nu} = \lambda r^{\mu\nu}. \quad (80)$$

En posant comme en (20)

$$\alpha^{\mu\nu} = \sqrt{-r} r^{\mu\nu}. \quad (20)$$

Mais nous avons, d'après (9),

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(\dot{\Delta}) &= U_{\mu\nu}(\dot{\Delta}) = \partial_\rho \dot{\Delta}_{\mu\nu}^\rho \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu \dot{\Gamma}_\nu + \partial_\nu \dot{\Gamma}_\mu) + \dot{\Delta}_{\mu\nu}^\lambda \dot{\Gamma}_\lambda - \dot{\Delta}_{\mu\rho}^\lambda \dot{\Delta}_{\lambda\nu}^\rho \\ &= \partial_\rho \dot{\Delta}_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} (\partial_\mu \dot{\Gamma}_\nu + \partial_\nu \dot{\Gamma}_\mu) \\ &\quad + \dot{\Delta}_{\mu\nu}^\lambda \dot{\Gamma}_\lambda - \dot{\Delta}_{\mu\rho}^\lambda \dot{\Delta}_{\lambda\nu}^\rho + \frac{1}{2} r_{\mu\nu} \partial_\rho \dot{f}^\rho \\ &\quad + \frac{1}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu f_{\bar{\nu}} - \partial_\nu f_{\bar{\mu}}) \\ &\quad + \frac{1}{6} (f_\nu + f_{\bar{\nu}}) r_{\mu\lambda} f^\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} r_{\mu\lambda} r_{\nu\sigma} (f^\lambda + f^{\bar{\lambda}}) (f^\sigma + f^{\bar{\sigma}}) + \frac{1}{2} r_{\mu\nu} f^\lambda \dot{\Gamma}'_\lambda. \end{aligned} \quad (81)$$

En scindant en parties symétrique et antisymétrique

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}, \quad (82)$$

les équations du champ

$$G_{\mu\nu} = \lambda \gamma_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \lambda \varphi_{\mu\nu} \quad (83)$$

s'écrivent encore

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \dot{G}_{\mu\nu} + \dot{D}_\rho u_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} (D_\mu u_\nu + D_\nu u_\mu) \\ &\quad + u_{\mu\nu}^\rho u_\rho - u_{\mu\rho}^\lambda u_{\lambda\nu}^\rho - \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\rho}^\lambda \Lambda_{\lambda\nu}^\rho \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \dot{D}_\rho \dot{f}^\rho + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \dot{f}^\rho u_\rho + \frac{1}{2} (f_\mu f_\nu + f_\nu f_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{3} f_\mu f_\nu - \frac{1}{2} f_{\bar{\mu}} f_{\bar{\nu}} - \frac{1}{6} f_{\bar{\mu}} f_{\bar{\nu}} = \lambda \gamma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} -F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \dot{D}_\rho \Lambda_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}^\rho u_\rho \\ &\quad - \frac{1}{2} (u_{\mu\rho}^\lambda \Lambda_{\lambda\nu}^\rho + u_{\lambda\nu}^\rho \Lambda_{\mu\rho}^\lambda) - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} \dot{D}_\rho \dot{f}^\rho \\ &\quad - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} \dot{f}^\rho u_\rho + \frac{1}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu f_{\bar{\nu}} - \partial_\nu f_{\bar{\mu}}) + \frac{1}{6} (f_\mu f_{\bar{\nu}} - f_\nu f_{\bar{\mu}}) = -\lambda \varphi_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (85)$$

en désignant comme précédemment par \dot{D}_ρ la dérivée covariante écrite avec les symboles $\{ \}$ et par $\dot{G}_{\mu\nu}$ le tenseur contracté écrit avec les mêmes symboles

$$\dot{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\{ \}) = P_{\mu\nu}(\{ \}). \quad (86)$$

Il nous reste à remplacer les coefficients de connexion $u_{\mu\nu}^\rho$ et $\Lambda_{\mu\nu}^\rho$ par les valeurs obtenues au chapitre précédent.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune approximation. Supposons maintenant que les $\varphi_{\mu\nu}$ et leurs dérivées soient des quantités petites ε par rapport à l'unité et convenons de négliger les termes en ε^3 . D'après (28) $f^{\mu\nu}$ est de l'ordre de $\varphi_{\mu\nu}$. Un calcul facile montre qu'à l'approximation admise on a simplement

$$\begin{aligned} \dot{G}_{\mu\nu} + \dot{D}_\rho u_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} \dot{D}_\mu \dot{D}_\nu \text{Log } r \\ - \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\rho}^\lambda \Lambda_{\lambda\nu}^\rho + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \dot{D}_\rho \dot{f}^\rho - \frac{1}{3} f_\mu f_\nu = \lambda \gamma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\dot{D}_\rho \Lambda_{\mu\nu}^\rho + \frac{2}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = -2\lambda \varphi_{\mu\nu}, \quad (88)$$

avec

$$V_{\mu\nu,\rho} \simeq R_{\mu\nu,\rho} \simeq -2\dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu,\rho}, \quad (89)$$

$$\begin{aligned} u_{\mu\nu,\rho} \simeq -\gamma^{\rho q} (\varphi_{\nu\rho} \dot{D}_q \varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\mu\rho} \dot{D}_q \varphi_{\nu\lambda}) \\ + \frac{1}{3} \gamma^{\rho q} (\varphi_{\nu\rho} I_{\mu\lambda q} + \varphi_{\mu\rho} I_{\nu\lambda q}). \end{aligned} \quad (90)$$

Considérons d'abord l'équation (88). Elle s'écrit encore

$$\begin{aligned} \dot{\square} \varphi_{\mu\nu} + \gamma^{\rho\lambda} \dot{G}'_{\rho\mu\nu} \varphi_{\rho\lambda} \\ + \gamma^{\rho q} (\varphi_{\mu\rho} \dot{G}'_{\nu q} - \varphi_{\nu\rho} \dot{G}'_{\mu q}) \\ + \frac{1}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = 2\lambda \varphi_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (91)$$

en posant

$$\dot{\square} \varphi_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\lambda} \dot{D}_\rho \dot{D}_\lambda \varphi_{\mu\nu} \quad (92)$$

et en tenant compte des identités

$$\begin{aligned} (\dot{D}_\rho \dot{D}_\mu - \dot{D}_\mu \dot{D}_\rho) \varphi_{\nu\lambda} = \dot{G}'_{\nu\rho\mu} \varphi_{\rho\lambda} + \dot{G}'_{\lambda\rho\mu} \varphi_{\nu\rho}, \\ \dot{G}'_{\mu\nu\rho} + \dot{G}'_{\rho\mu\nu} + \dot{G}'_{\nu\rho\mu} = 0, \end{aligned} \quad (93)$$

et de l'approximation

$$\gamma^{\rho\mu} \dot{D}_\rho \varphi_{\rho\mu} \simeq f_\mu. \quad (94)$$

Mais d'après (87) on peut substituer dans (91) à l'approximation admise

$$\dot{G}_{\mu\nu} \simeq \lambda \gamma_{\mu\nu}, \quad (95)$$

et l'on obtient

$$\dot{\square} \varphi_{\mu\nu} + \gamma^{\rho\lambda} \dot{G}'_{\rho\mu\nu} \varphi_{\rho\lambda} + \frac{1}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = 0. \quad (96)$$

En supposant qu'à l'approximation du premier ordre

$$\dot{G}'_{\rho\mu\nu} = \frac{\lambda}{3} (\gamma_{\rho\mu} \delta_\nu^\rho - \gamma_{\rho\nu} \delta_\mu^\rho), \quad (97)$$

expression compatible avec (95), on a

$$\dot{\square} \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = \frac{2\lambda}{3} \varphi_{\mu\nu}. \quad (98)$$

Multiplions (98) par $\gamma^{\mu\rho} \dot{D}_\rho$. En tenant compte

des identités (93) il vient

$$\overset{\circ}{\square} f_{\rho} = \frac{\lambda}{2} f_{\rho}. \quad (99)$$

Enfin, en appliquant l'opérateur $\overset{\circ}{\square} = \gamma^{ab} \overset{\circ}{D}_a \overset{\circ}{D}_b$ à (98) on obtient

$$\overset{\circ}{\square} \left(\overset{\circ}{\square} \varphi_{\mu\nu} - \frac{2\lambda}{3} \varphi_{\mu\nu} \right) = -\frac{\lambda}{2} \left(\overset{\circ}{\square} \varphi_{\mu\nu} - \frac{2\lambda}{3} \varphi_{\mu\nu} \right). \quad (100)$$

Posons

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} (\partial_{\mu} f_{\nu} - \partial_{\nu} f_{\mu}). \quad (101)$$

D'après (98) et (100), $\psi_{\mu\nu}$ vérifie l'équation de propagation

$$\overset{\circ}{\square} \psi_{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{2} \psi_{\mu\nu}. \quad (102)$$

Ainsi, le champ en rotationnel $\psi_{\mu\nu}$ qui satisfait l'équation de propagation (102) n'a pas une divergence nulle, même à l'approximation admise. En effet, d'après (99) et (101),

$$\gamma^{\rho\lambda} \overset{\circ}{D}_{\rho} \psi_{\lambda\nu} = \frac{\lambda}{6} f_{\nu}. \quad (103)$$

Revenons maintenant à l'équation (87). Elle s'écrit encore

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{G} \gamma_{\mu\nu} + \lambda \gamma_{\mu\nu} = z T_{\mu\nu} \quad (\overset{\circ}{G} = \gamma^{ab} \overset{\circ}{G}_{ab}), \quad (104)$$

avec

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tau \quad (\tau = \gamma^{ab} \tau_{ab}), \quad (105) \\ \tau_{\mu\nu} &= -D_{\rho} u_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} D_{\mu} D_{\nu} \text{Log } r \\ &+ \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\rho}^{\lambda} \Lambda_{\lambda\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} D_{\rho} f^{\rho} - \frac{1}{3} f_{\mu} f_{\nu}. \quad (106) \end{aligned}$$

Les équations de la gravitation dans le vide

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{G} \gamma_{\mu\nu} + \lambda \gamma_{\mu\nu} = 0$$

sont donc vérifiées au second ordre près. L'influence du champ électromagnétique se traduit par le tenseur du second ordre $T_{\mu\nu}$.

En résumé, les résultats acquis peuvent s'énoncer de la façon suivante :

1° L'équation $r_{\pm}^{\mu\nu}$; $\rho' = 0$ (première équation d'Einstein) résultant de la seule variation des coefficients de connexion affine est conservée même si $f^{\mu} \neq 0$. Elle permet de déterminer complètement la connexion affine en fonction des $r_{\mu\nu}$ et conduit aux solutions rigoureuses (74) et (76) de notre théorie.

2° L'équation $R_{\mu\nu} = \lambda r_{\mu\nu}$ qui résulte du choix (78) de la fonction d'action se traduit par les équations électromagnétiques (84). Au troisième ordre près, elles se réduisent à (98) et à (104).

3° Une conséquence de $r_{\pm}^{\mu\nu}$; $\rho' = 0$ est

$$\frac{1}{2} d_{\rho} \text{Log } r - \Gamma_{\rho} = \frac{1}{3} f_{\rho}.$$

La condition $2 \Gamma_{\rho} = d_{\rho} \text{Log } r$ (équivalente à la condition w ; $\rho = 0$ d'Einstein) entraîne l'équation de conservation

$$f^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-r}} d_{\rho} \mathcal{F}^{\rho\mu} = 0.$$

Postuler cette condition revient à confondre les $\overset{\circ}{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho}$ avec les $\overset{\circ}{\Delta}_{\mu\nu}^{\rho}$. Au troisième ordre près, le champ $\psi_{\mu\nu}$ disparaît. Le champ $\varphi_{\mu\nu}$ dont la divergence est nulle

$$\gamma^{\rho\lambda} D_{\rho} \varphi_{\lambda\mu} \simeq f_{\mu} = 0$$

vérifie l'équation de propagation

$$\overset{\circ}{\square} \varphi_{\mu\nu} = \frac{2\lambda}{3} \varphi_{\mu\nu}.$$

Par contre si w ; $\rho' = 0$ (w ; $\rho \neq 0$) le champ $\psi_{\mu\nu}$ en rotationnel apparaît. Il satisfait aux équations de propagation (102) du type habituel, mais sa divergence n'est pas nulle. Il est donc comme le champ $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ du type mésonique et sa divergence est liée à la valeur de la constante λ .

4° La condition $\Lambda_{\rho} = 0$ (quatrième équation d'Einstein) permet d'éliminer complètement de la théorie le champ antisymétrique $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ du groupe II. La théorie se rapporte alors uniquement à la densité $\mathcal{R}^{\mu\nu}$. De toutes façons les champs $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ appartiennent à deux groupes séparables dont le premier dépend du quadrivecteur arbitraire Λ_{ρ} et dont le second suffit à déterminer la connexion affine $\overset{\circ}{\Delta}$.

5° La densité de courant électrique

$$\mathcal{J}^{\sigma} = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\mu\nu\rho}$$

satisfait l'équation de conservation $d_{\sigma} \mathcal{J}^{\sigma} = 0$. La densité

$$\mathcal{Y}^{\sigma} = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\mu\nu\rho},$$

avec

$$J_{\mu\nu\rho} = \overset{\circ}{D}_{\mu} \psi_{\nu\rho} + \overset{\circ}{D}_{\rho} \psi_{\mu\nu} + \overset{\circ}{D}_{\nu} \psi_{\rho\mu} = 0$$

est identiquement nulle.