



**HAL**  
open science

# Étude de la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube à rayons X

M. Matricon

► **To cite this version:**

M. Matricon. Étude de la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube à rayons X. Journal de Physique et le Radium, 1951, 12 (1), pp.15-25. 10.1051/jphysrad:0195100120101500 . jpa-00234339

**HAL Id: jpa-00234339**

**<https://hal.science/jpa-00234339>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉTUDE DE LA RÉPARTITION DE LA CHALEUR DANS L'ANTICATHODE D'UN TUBE A RAYONS X

Par M. MATRICON.

Docteur ès sciences,

Directeur du Centre de Recherchès Physiques de la Compagnie française Thomson-Houston,  
Ingénieur Conseil à la Compagnie Générale de Radiologie.

**Sommaire.** — Plusieurs auteurs ont étudié la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube à rayons X (A. BOUWERS, *Z. Techn. Physik*, 1927, 8, 271; W. J. OOSTERKAMP, *Thèse de doctorat*, Delft; F. R. ARBOTT, *J. Appl. Phys.*, juin 1942).

Toutefois, aucune des solutions analytiques proposées ne permet d'étudier facilement, et d'une façon suffisamment précise, la répartition de la chaleur dans une anticathode constituée de deux métaux (cible de tungstène enchâssée dans une masse de cuivre). Nous nous sommes proposé de traiter cet aspect du problème et de déterminer l'épaisseur optima qu'il convient de donner à la cible de tungstène selon le régime de fonctionnement choisi. Dans les trois premières parties, nous avons rétabli des résultats connus en utilisant, d'une façon systématique, la méthode de la transformation de Laplace; dans les autres parties, nous avons développé ces résultats et nous les avons appliqués aux cas réels des anticathodes de tubes à rayons X.

**1. Foyer de dimensions illimitées sur une anticathode homogène.** — Soit A la face frontale de dimensions illimitées d'une anticathode homogène (fig. 1). Soit Ox un axe perpendiculaire à A.

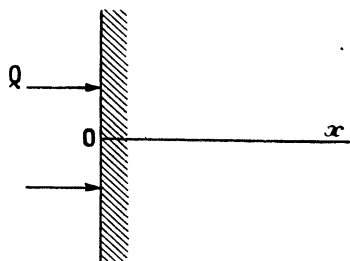


Fig. 1.

A partir de l'époque  $t = 0$ , la face A reçoit, sur toute sa surface,  $Q$  calories par seconde et par centimètre carré.

La température  $T$  en un point de l'anticathode ne dépend évidemment que de la distance  $x$  de ce point à la face A et de l'époque  $t$  considérée.

Nous nous proposons donc de déterminer cette fonction  $T(x, t)$  en supposant qu'à l'époque initiale la température de l'anticathode est uniforme et égale à  $T_0$  et que, de plus, cette température  $T_0$  se maintient à toute époque à l'infini.

Si l'on désigne par  $k$ ,  $c$  et  $\mu$  respectivement la conductibilité thermique, la chaleur spécifique et la masse spécifique du métal constituant l'anticathode, et si l'on pose  $\alpha^2 = \frac{k}{\mu c}$ , on sait que la tempéra-

ture  $T(x, t)$  doit satisfaire à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial T}{\partial t},$$

avec la condition initiale

$$T(x, 0) = T_0$$

et les conditions aux limites

$$T(\infty, t) = T_0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{Q}{k} = -\beta.$$

Prenons comme fonction inconnue

$$U(x, t) = T(x, t) - T_0.$$

Les données du problème à résoudre prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ U(x, 0) &= 0, \\ U(\infty, t) &= 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} &= -\beta. \end{aligned}$$

Appliquons à ce système la transformation de Laplace :

$$u(x, p) = \int_0^\infty U(x, t) e^{-pt} dt,$$

qui fait ainsi correspondre à une fonction  $U(x, t)$ , dite fonction originale, une fonction  $u(x, p)$  dite fonction image, ce qui se représente par la notation

$$u(x, p) \subset U(x, t).$$

On sait que

$$\frac{\partial U}{\partial t} > \int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} e^{-\rho t} dt = [U e^{-\rho t}]_0^\infty + \rho \int_0^\infty U e^{-\rho t} dt = \rho u,$$

puisque

$$U(x, 0) = 0.$$

De même,

$$\beta > \int_0^\infty \beta e^{-\rho t} dt = \frac{\beta}{\rho}$$

et

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} e^{-\rho t} dt = \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} > \frac{du}{dx}.$$

Le système à intégrer devient

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\rho}{\alpha^2} u,$$

$$u(\infty, \rho) = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{\beta}{\rho}.$$

Ce n'est plus qu'une simple équation différentielle qui a pour solution

$$u(x, \rho) = \frac{\alpha \beta}{\rho \sqrt{\rho}} e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\alpha} x}.$$

Pour passer de  $u(x, \rho)$  à la fonction originale  $U(x, t)$  il faut appliquer à  $u(x, \rho)$  la transformation inverse de la transformation de Laplace. En fait il existe des tables des fonctions transformées, et si nous nous référons par exemple à H. S. Carslaw et J. C. Jaeger (*Conduction of Heat in Solids. Table of Laplace Transforms*, p. 380 et 381), nous trouvons

$$\frac{\alpha \beta}{\rho \sqrt{\rho}} e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\alpha} x} < \alpha \beta \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} - \alpha \beta \frac{2x}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Suivant une notation connue, nous poserons

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erf} v,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_v^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \operatorname{erf} v = \operatorname{erfc} v$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \frac{2v}{\sqrt{\pi}} \int_v^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \int_v^{+\infty} \operatorname{erfc} \xi d\xi = \operatorname{ierfc} v,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\alpha \beta}{\rho \sqrt{\rho}} e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\alpha} x} < 2\alpha \beta \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\alpha \sqrt{t}}$$

et

$$U(x, t) = \frac{2\alpha Q}{k} \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\alpha \sqrt{t}}. \quad (1)$$

**2. Foyer de dimensions illimitées sur une anticathode bimétallique.** — Soit A la surface frontale plane illimitée d'une anticathode (fig. 2)

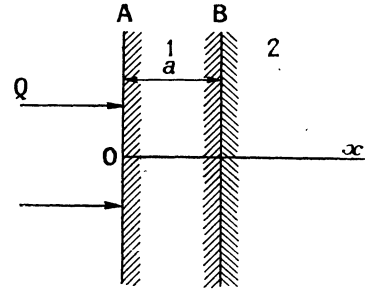


Fig. 2.

et B le plan parallèle au plan A constitué par la surface de séparation entre le métal superficiel 1 d'épaisseur  $a$  et le métal support 2.

Soit  $Ox$  un axe perpendiculaire aux plans A et B.

La température en un point quelconque de l'anticathode ne dépend que de  $x$  et de  $t$ . En employant des notations analogues à celles du paragraphe précédent nous appellerons  $\alpha_1$  et  $k_1$  les constantes thermiques du milieu 1,  $\alpha_2$  et  $k_2$  les constantes thermiques du milieu 2,  $U_1(x, t)$  la fonction température dans le milieu 1, et  $U_2(x, t)$  la fonction température dans le milieu 2. Nous supposons que la face frontale A reçoit  $Q$  calories par seconde et par centimètre carré. Dans ces conditions, les équations du problème sont :

1° Milieu 1 :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial t},$$

$$U_1(x, 0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{Q}{k_1} = -\beta.$$

2° Milieu 2 :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial t},$$

$$U_2(x, 0) = 0,$$

$$U_2(\infty, t) = 0,$$

3° Conditions exprimant l'égalité des flux de chaleur et des températures à la surface de séparation des deux milieux.

$$k_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=a} = k_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=a},$$

$$U_1(a, t) = U_2(a, t).$$

Appliquons la transformation de Laplace à ce

système; il devient

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dx^2} &= \frac{p}{\alpha_1^2}, & \left( \frac{du_1}{dx} \right)_{x=0} &= -\frac{\beta}{p}; \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} &= \frac{p}{\alpha_2^2}, & u_2(\infty, t) &= 0; \\ u_1(a) &= u_2(a), & k_1 \left( \frac{du_1}{dx} \right)_{x=a} &= k_2 \left( \frac{du_2}{dx} \right)_{x=a}. \end{aligned}$$

On trouve facilement que la solution de ce système est

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\alpha_1 \beta}{p \sqrt{p}} \frac{e^{-\frac{x}{\alpha_1} \sqrt{p}} - m e^{\left(\frac{x-2a}{\alpha_1}\right) \sqrt{p}}}{1 + m e^{-\frac{2a}{\alpha_1} \sqrt{p}}}, \\ u_2 &= \frac{\alpha_1 \beta}{p \sqrt{p}} (1-m) \frac{e^{-\left(\frac{a}{\alpha_1} + \frac{x-a}{\alpha_2}\right) \sqrt{p}}}{1 + m e^{-\frac{2a}{\alpha_1} \sqrt{p}}}, \end{aligned}$$

avec

$$m = \frac{\frac{k_2}{\alpha_2} - \frac{k_1}{\alpha_1}}{\frac{k_2}{\alpha_2} + \frac{k_1}{\alpha_1}}.$$

Pour trouver les fonctions originales de  $u_1$  et de  $u_2$ , nous appliquerons d'abord à  $u_1$  et  $u_2$  le développement

$$\frac{1}{1 + m e^{-\frac{2a}{\alpha_1} \sqrt{p}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n e^{-\frac{2na}{\alpha_1} \sqrt{p}},$$

ce qui met ces fonctions sous la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\alpha_1 \beta}{p \sqrt{p}} e^{-\frac{x}{\alpha_1} \sqrt{p}} \\ &+ \frac{\alpha_1 \beta}{p \sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} (-m)^n \left[ e^{-\frac{2na+x}{\alpha_1} \sqrt{p}} + e^{-\frac{2na-x}{\alpha_1} \sqrt{p}} \right], \\ u_2 &= \frac{\alpha_1 \beta}{p \sqrt{p}} (1-m) \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n e^{-\left[\frac{(2n+1)a}{\alpha_1} + \frac{x-a}{\alpha_2}\right] \sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Tous les termes de ces deux sommes sont du même type :  $\frac{K}{p \sqrt{p}} e^{-B \sqrt{p}}$ , et l'on sait que la fonction originale est

$$K.2 \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{B}{2 \sqrt{t}}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{2 \alpha_1 Q}{k_1} \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} \\ &+ \frac{2 \alpha_1 Q}{k_1} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-m)^n \\ &\times \left[ \operatorname{ierfc} \frac{2na+x}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} + \operatorname{ierfc} \frac{2na-x}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{2 \alpha_1 Q}{k_1} (1-m) \sqrt{t} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n \operatorname{ierfc} \frac{(2n+1)a + (x-a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{2 \alpha_1 \sqrt{t}}. \quad (3) \end{aligned}$$

On peut donner de ces formules une interprétation physique curieuse qui nous servira plus tard dans le cas des foyers de dimensions limitées, lorsque les ressources de l'analyse nous feront défaut.

Examinons d'abord la formule (2) et rappelons que la distribution de la température dans une anticathode homogène est donnée par (1) :

$$U = \frac{2 \alpha Q}{k} \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2 \alpha \sqrt{t}}.$$

On peut donc considérer la distribution de température donnée par la formule (2) comme résultant de l'action dans un milieu homogène de constantes  $k_1$ ,  $\alpha_1$  d'une source principale de densité d'énergie  $Q$  située sur la face A, et de sources auxiliaires de densité d'énergie  $(-m)^n Q$  situées à des distances  $(2na+x)$  et  $(2na-x)$  du point considéré. On voit facilement (*fig. 3*) que l'emplacement

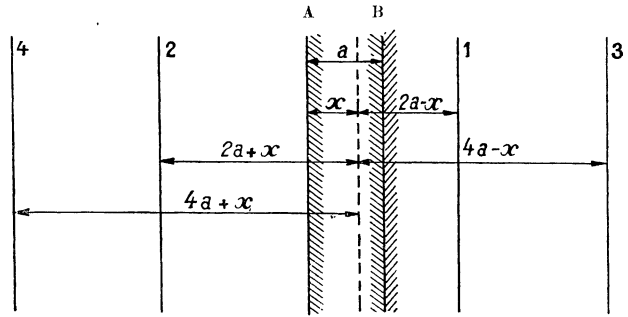


Fig. 3.

de ces sources s'obtient en prenant le plan 1 symétrique du plan A par rapport au plan B, puis le plan 2 symétrique du plan 1 par rapport au plan A, etc. De plus, cette interprétation suppose que chaque source d'énergie est placée sur une face frontale d'anticathode, c'est-à-dire que la chaleur fournie par une source ne peut diffuser que dans la direction allant de cette source vers le point d'abscisse  $x$ . On peut toutefois conserver l'image plus satisfaisante d'un milieu vraiment homogène à condition de doubler l'énergie de toutes les sources pour tenir compte de la diffusion dans les deux directions.

Cette interprétation ne change d'ailleurs pas la formule (2) puisque, seule, la chaleur diffusant vers le plan d'abscisse  $x$  doit être considérée.

De même la formule (3) peut être interprétée de la façon suivante :

La température dans le plan d'abscisse  $x$  situé dans le milieu 2 ( $x > a$ ) est la même que celle qui serait atteinte en un plan d'abscisse  $a + (x-a) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$  situé dans un milieu homogène de constantes  $k_1$ ,  $\alpha_1$  sous l'influence des sources de chaleur de densité  $Q(1-m)(-m)^n$  et situées sur des plans régu-

lièrement espacés comme il est indiqué sur la figure 4.

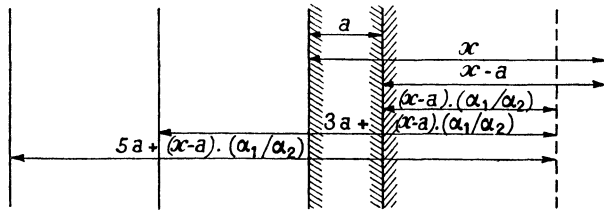


Fig. 4.

**3. Foyer ponctuel sur une anticathode homogène.** — Considérons un foyer constitué par une empreinte hémisphérique à la surface d'une anticathode indéfinie. Soit  $\delta r$  le rayon de cette empreinte et  $Q'$  la densité d'énergie appliquée à la surface du foyer.

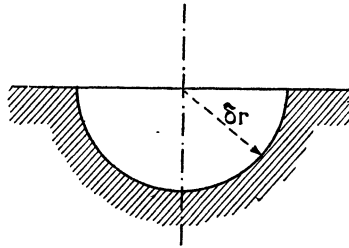


Fig. 5.

Appelons  $r$  la distance d'un point quelconque de l'anticathode au centre de l'empreinte. Par raison de symétrie la température ne dépend que de  $r$  et le problème est défini par les équations et conditions :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ U(r, 0) &= 0, \\ U(\infty, t) &= 0, \\ \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=\delta r} &= -\frac{Q'}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Introduisons l'énergie totale dépensée au foyer

$$Q_1 = Q' \cdot 2\pi \delta r^2$$

et faisons le changement de fonction inconnue

$$U = \frac{V}{r}.$$

Le système devient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \left( \frac{V}{r} \right)_{t=0} &= 0, \quad \text{soit } V_{t=0} = 0, \\ \left( \frac{V}{r} \right)_{r=\infty} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{V}{r} \right) \right]_{r=\delta r} &= -\frac{Q_1}{k \cdot 2\pi \delta r^2}. \end{aligned} \right\}$$

Appliquons la transformation de Laplace. On obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dr^2} &= \frac{p'}{x^2} v, \\ \left( \frac{v}{r} \right)_{r=\infty} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{r} \right) \right]_{r=\delta r} &= -\frac{Q_1}{k \cdot 2\pi \delta r^2} \frac{1}{p}. \end{aligned} \right\}$$

La solution de ce système est

$$v = \frac{Q_1}{k \cdot 2\pi \delta r} \frac{e^{-\frac{\sqrt{p'}}{x}(r-\delta r)}}{p \left( \frac{\sqrt{p'}}{x} + \frac{1}{\delta r} \right)}.$$

On trouve dans la table des fonctions transformées la fonction originale  $V(r, t)$  d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} U = \frac{V}{r} &= \frac{Q_1}{2\pi k r} \operatorname{erfc} \frac{r-\delta r}{2\alpha \sqrt{t}} \\ &- \frac{Q_1}{2\pi k r} e^{\frac{r-\delta r}{\delta r} + \frac{\alpha^2 t}{\delta r^2}} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{r-\delta r}{2\alpha \sqrt{t}} + \frac{\alpha \sqrt{t}}{\delta r} \right\}. \end{aligned}$$

On passe au cas d'un foyer ponctuel en faisant tendre  $\delta r$  vers zéro, ce qui donne

$$U = \frac{Q_1}{2\pi k r} \operatorname{erfc} \frac{r}{2\alpha \sqrt{t}}. \quad (5)$$

**4. Foyer ponctuel sur une anticathode bimétallique.** — Nous allons calculer la distribution de la température due à des sources ponctuelles fictives disposées suivant la même loi que celle que nous avons mise en évidence à la fin du paragraphe 2 pour des sources planes de dimensions infinies.

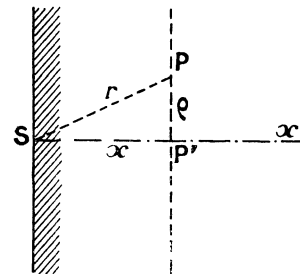


Fig. 6.

Tout d'abord, remarquons que si nous utilisons deux coordonnées d'espace,  $\rho$  et  $x$  suivant la figure 6, on a

$$SP = r, \quad SP' = x \quad \text{et} \quad PP' = \rho$$

en désignant par S la source de chaleur ponctuelle et par P le point où l'on veut déterminer la température. Dans ces conditions, la formule (5) s'écrit

$$U = \frac{Q ds}{2\pi k \sqrt{\rho^2 + x^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha \sqrt{t}}$$

dans laquelle  $ds$  représente la surface infiniment petite du foyer ponctuel et  $Q$  la densité d'énergie appliquée à ce foyer.

La température due à un ensemble de sources ponctuelles disposées sur un même axe  $Sx$  perpendiculaire à la face frontale de l'anticathode et réparties selon la loi représentée sur la figure 3, a donc pour expression

$$U_1 = \frac{Q ds}{2 \pi k_1 \sqrt{\rho^2 + x^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} + \frac{Q ds}{2 \pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-m)^n \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2na + x)^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + (2na + x)^2}}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2na - x)^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + (2na - x)^2}}{2 \alpha_1 \sqrt{t}} \right]. \quad (6)$$

De même la température due à un ensemble de sources ponctuelles réparties selon la loi représentée sur la figure 4 a pour expression

$$U_2 = \frac{Q ds}{2 \pi k_1} (1 - m) \times \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left[ (2n+1)a + (x-a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right]^2}} \times \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + \left[ (2n+1)a + (x-a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right]^2}}{2 \alpha_1 \sqrt{t}}. \quad (7)$$

Examinons avec quelle approximation les formules (6) et (7) peuvent être considérées comme apportant une solution au problème de la répartition de la température dans une anticathode bimétallique sous l'influence d'un foyer ponctuel.

Ce problème est défini par les équations et conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial t} \quad (0 \leq x \leq a); \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial t} \quad (x \geq a); \quad (9)$$

$$U_1(x, \rho, t)|_{t=0} = 0, \quad U_2(x, \rho, t)|_{t=0} = 0; \quad (10)$$

$$U_1(x, \rho, t)|_{x=+\infty} = 0, \quad U_1(x, \rho, t)|_{\rho=+\infty} = 0, \quad (11)$$

$$U_2(x, \rho, t)|_{\rho=+\infty} = 0; \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=0, \rho \neq 0} = 0, \quad \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=0, \rho=0} = -\infty \quad (13)$$

(la densité d'énergie étant infinie sur un foyer ponctuel)

$$U_1(a, \rho, t) = U_2(a, \rho, t); \quad (14)$$

$$k_1 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=a} = k_2 \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=a}. \quad (15)$$

On vérifie facilement que les conditions (10) et (11) sont satisfaites par chacun des termes qui figurent dans les sommes de formules (6) et (7). En utilisant des groupements convenables des

termes figurant dans les sommes des formules (6) et (7) et en faisant intervenir la définition du paramètre

$$m = \frac{\frac{k_2}{\alpha_2} - \frac{k_1}{\alpha_1}}{\frac{k_2}{\alpha_2} + \frac{k_1}{\alpha_1}}$$

on vérifie également que les conditions (12), (13) et (14) sont satisfaites.

D'autre part, la formule (6) satisfait à l'équation (8) puisque tous ses termes sont du type (5) qui est la solution de l'équation (4); or, l'équation (8) et l'équation (4) sont équivalentes puisqu'elles représentent l'équation

$$\Delta U = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

respectivement en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

Par contre, l'expression (7) ne satisfait pas à l'équation (9) car si l'on pose

$$X = (x - a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

on voit que tous ses termes sont solution de

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial t}.$$

Mais

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2} = \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}$$

et, par conséquent, l'expression (7) est solution de

$$\left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial t},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial t}.$$

Remplaçons  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par leurs valeurs

$$\frac{k_1}{\mu_1 c_1} \quad \text{et} \quad \frac{k_2}{\mu_2 c_2},$$

l'expression précédente devient

$$k_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\mu_2 c_2}{\mu_1 c_1} \left[ \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} \right] = \rho_2 c_2 \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

et sous cette forme on voit, par référence à la forme développée de l'équation de la chaleur, qu'elle caractérise la propagation de la chaleur dans un milieu dont la masse spécifique et la chaleur spécifique sont  $\mu_2$  et  $c_2$ , dont la conductibilité thermique est  $k_2$  dans la direction  $Sx$ , ce qui correspond bien au problème réel, mais dont la conductibilité thermique radiale est égale à  $\frac{\mu_2 c_2}{\mu_1 c_1}$ .

Dans une application où le milieu 1 serait du tungstène et le milieu 2 du cuivre, cette conduc-

tibilité radiale serait voisine de la moitié de celle du cuivre.

On peut tout de même penser que dans la pratique les formules obtenues donneront des résultats utilisables car :

1° On s'intéresse surtout à la température obtenue dans la cible de tungstène; or, la relation fournissant la température dans le milieu 1 satisfait sans aucune approximation aux équation et conditions du problème dans ce milieu.

2° Si la relation fournissant la température dans le milieu 2 tient compte d'une conductibilité thermique radiale plus faible que la conductibilité réelle, par contre, le fait de supposer infinies les dimensions de l'anticathode dans le sens radial conduit à surestimer la diffusion de la chaleur dans le sens radial, et ces deux inexactitudes vont en sens contraire l'une de l'autre.

3° Au total, la chaleur se transmet axialement dans une anticathode et la formule donnant la température dans le milieu 2 tient compte d'une conductibilité thermique axiale qui est la conductibilité correcte du cuivre.

**5. Foyer de dimensions finies.** — Rappelons que l'équation de la chaleur étant linéaire la somme de plusieurs solutions de l'équation est également une solution et cette propriété s'étend à une somme d'un nombre illimité de termes et, par conséquent, à une intégrale.

Nous considérerons donc un foyer de dimensions finies comme constitué par un nombre infini de foyers ponctuels et la température en un point de l'anticathode résultera de la somme des contributions de chacun des foyers élémentaires.

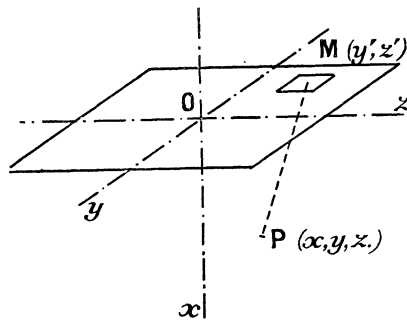


Fig. 7.

Si l'on considère un foyer rectangulaire (fig. 7) de largeur  $2l$  et de longueur  $2L$  rapporté à ses axes de symétrie  $Oxyz$  établi sur la face frontale d'une anticathode homogène, la contribution à la température en un point  $P(x, y, z)$  due au foyer élémentaire  $dy' dz'$  de coordonnées  $x = 0, y = y', z = z'$

sera

$$dU = \frac{Q dy' dz'}{2\pi k} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \times \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{2\alpha\sqrt{t}}$$

et la température totale en P sera

$$U(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\pi k} \int_{-L}^{+L} dz' \times \int_{-l}^{+l} \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \times \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{2\alpha\sqrt{t}}$$

Cette intégrale se prête mal au calcul numérique. Pour obtenir des expressions plus maniables nous procéderons de la façon suivante : rapportons le foyer à un système d'axes tels que l'axe perpendiculaire à la face frontale passe par le point P dont on veut calculer la température. Soit  $Ox$  cet axe et soit  $O$  le point où il perce la face frontale de l'anticathode. Rapportons les foyers élémentaires à un système de coordonnées polaires d'origine  $O$ .

Nous allons calculer la contribution à la température en P de toute la partie de la surface focale située entre des cercles de centre  $O$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$  (fig. 8) et comprise dans le même angle au

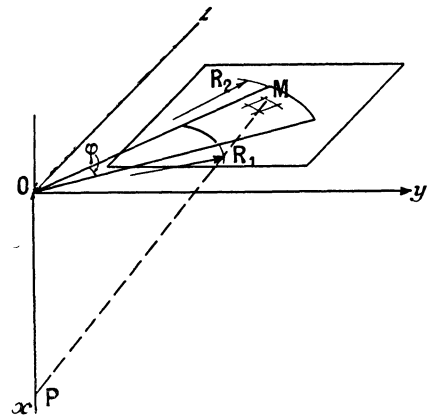


Fig. 8.

centre  $\varphi$ . On a

$$PM = \sqrt{OM^2 + OP^2} = \sqrt{\rho^2 + x^2}$$

Le foyer élémentaire autour du point  $M$  a pour surface  $\rho d\rho d\varphi$  et la température en P a pour valeur

$$U_{R_1, R_2} = \frac{Q}{2\pi k} \int_0^\varphi d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha\sqrt{t}}$$

Après quelques calculs élémentaires faisant intervenir une intégration par parties et la définition de

a fonction  $\operatorname{erfc} v$  on trouve

$$U_{R_1 R_2} = \frac{Q}{k} \frac{\varphi}{2\pi} \left\{ \left[ \sqrt{\rho^2 + x^2} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha\sqrt{t}} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{2\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[ -e^{-\frac{\rho^2 + x^2}{4\alpha^2 t}} \right]_{R_1}^{R_2} \right\},$$

soit

$$U_{R_1 R_2} = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{2\alpha Q}{k} \sqrt{t} \left[ -\operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha\sqrt{t}} \right]_{R_1}^{R_2}.$$

Pour déterminer la température due à la totalité du foyer il suffit de le décomposer en un nombre convenable de secteurs concentriques et d'appliquer à chacun d'eux la formule ci-dessus. On obtient ainsi

$$U = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi} \frac{2\alpha Q}{k} \sqrt{t} \left[ -\operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha\sqrt{t}} \right]_{R_i}^{R_{i+1}}.$$

En appliquant le même raisonnement à chacun des termes qui constituent les sommes (6) et (7) donnant la température dans le cas d'une anticathode bimétallique, on obtient immédiatement

$$U_1 = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi} \frac{2\alpha_1 Q}{k_1} \sqrt{t} \times \left\{ -\operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-m)^n \times \left[ \operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + (2na+x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} + \operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + (2na-x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} \right] \right\}_{R_i}^{R_{i+1}}, \quad (15)$$

$$U_2 = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi} \frac{2\alpha_2 Q}{k_2} \sqrt{t} (1-m) \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n \times \left\{ -\operatorname{ierfc} \frac{\sqrt{\rho^2 + \left[ (2n+1)a + (x-a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right]^2}}{2\alpha_2\sqrt{t}} \right\}_{R_i}^{R_{i+1}}. \quad (16)$$

Avec ces formules, nous allons étudier la température maximum atteinte par le tungstène et le cuivre d'une anticathode fonctionnant en régime de radiographie pour différentes valeurs du temps de pose, pour différentes dimensions de foyer et pour différentes épaisseurs de la cible de tungstène de façon à déterminer quelle est, dans chaque cas, la meilleure épaisseur à donner à cette cible.

Mais avant d'aller plus loin remarquons que la température maximum n'est pas atteinte simultanément à la surface du foyer et à la surface de séparation du tungstène et du cuivre. A la surface du foyer, la température maximum est atteinte à la fin du temps de pose car elle commence à diminuer immédiatement après la cessation du bombardement électronique. Il n'en est pas de même à la surface de séparation entre le cuivre et le tungstène à cause

de l'énergie emmagasinée dans la cible. Nous allons donc étudier à quelle époque postérieure à la cessation du bombardement électronique cette surface de séparation atteint sa température maximum.

**6. Évolution de la température après la cessation du bombardement électronique.** — L'équation de la chaleur étant linéaire, il en résulte que la température en un point d'un système est la somme des contributions dues à chacune des sources du système quel que soit leur emplacement, leur variation en fonction du temps et leur signe (source chaude ou source froide). Par conséquent, pour établir la loi de répartition de la température après cessation du bombardement électronique, il suffit de supposer qu'on maintient la source chaude, mais qu'on lui superpose une source froide de même valeur absolue et, évidemment, de signe opposé.

Si l'on désigne par  $U(t)$  la loi d'évolution de la température, à la fin du bombardement électronique de durée  $\Delta t$  la température atteinte était  $U(\Delta t)$  et à l'époque postérieure  $\Delta t + \delta t$  la température devient la somme de la contribution due à la source chaude :  $U(\Delta t + \delta t)$  et de celle due à la source froide :  $-U(\delta t)$ , soit au total

$$U(\Delta t + \delta t) - U(\delta t) = U_{\delta t}.$$

Après cessation du bombardement électronique la température à l'intérieur de l'anticathode continue à croître, passe par un maximum pour décroître ensuite.

L'époque de ce maximum est donnée par  $\frac{\partial U_{\delta t}}{\partial(\delta t)} = 0$ , soit

$$\left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=\Delta t+\delta t} - \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=\delta t} = 0. \quad (17)$$

Nous allons calculer l'époque de ce maximum dans le cas d'une anticathode homogène lorsque, d'une part, la surface focale est infinie, et d'autre part, lorsqu'elle est ponctuelle.

*a. Cas d'une surface focale infinie.* — Dans ce cas, la température est donnée par la formule (1) :

$$U(x, t) = \frac{2\alpha Q}{k} \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\alpha\sqrt{t}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

et la relation (17) donne

$$\frac{\alpha}{2\alpha\sqrt{\Delta t + \delta t}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2(\Delta t + \delta t)}} - \frac{\alpha}{2\alpha\sqrt{\delta t}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2\delta t}} = 0, \quad (18)$$

en remplaçant  $x$  par  $a$  pour déterminer l'époque du maximum de température à la profondeur  $a$ .



Posons

$$\frac{a}{2\alpha\sqrt{\Delta t + \delta t}} = \Gamma, \quad \frac{a}{2\alpha\sqrt{\delta t}} = \gamma,$$

et l'équation (18) devient

$$\Gamma e^{-X^2} = \gamma e^{-\gamma^2}. \quad (19)$$

b. *Cas d'une surface focale ponctuelle.* — La température a pour expression

$$U = \frac{Q_1}{2\pi kr} \operatorname{erfc} \frac{r}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

L'équation qui donne l'époque  $\delta t$  du maximum de température à la distance  $a$  du foyer s'obtient facilement :

$$(\Delta t + \delta t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2(\Delta t + \delta t)}} = \delta t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2\delta t}}.$$

Si l'on extrait la racine cubique des deux membres et si l'on pose

$$X = \frac{a}{2\alpha\sqrt{3}\sqrt{\Delta t + \delta t}}, \quad \gamma = \frac{a}{2\alpha\sqrt{3}\sqrt{\delta t}},$$

cette équation prend la forme

$$\Gamma e^{-X^2} = \gamma e^{-\gamma^2}$$

identique à (19).

On trouve facilement dans les tables les valeurs correspondantes de  $X$  et  $\gamma$  qui satisfont à l'équation (19), ce qui permet d'établir, par exemple, le tableau ci-dessous.

TABLEAU I (1).

$X$ .	$\gamma$ .	$X$ .	$\gamma$ .	$X$ .	$\gamma$ .	$X$ .	$\gamma$ .
0,02	2,335	0,08	1,760	0,24	1,330	0,64	0,776
0,04	1,975	0,12	1,617	0,32	1,190	0,70	0,70
0,06	1,853	0,16	1,506	0,48	0,962	-	-

On en déduit en fonction du temps de pose  $\Delta t$  l'époque  $\delta t$  du maximum de température à la profondeur  $a$ , le temps  $\delta t$  étant compté à partir de la fin du temps de pose, la profondeur  $a$  ayant pour valeur 1, 2 et 3 mm, et ceci respectivement dans le cas des foyers de dimensions illimitées et des foyers ponctuels sur une anticathode de tungstène. Dans les Tableaux II et III ci-dessous, on a compté  $\Delta t$  et  $\delta t$  en secondes.

On voit qu'après une impulsion brève ( $\Delta t = 0$ ) le maximum de température se produit aux profondeurs de 1, 2 et 3 mm au bout de temps  $\delta t$  qui sont entre eux comme les carrés des profondeurs, ce qui caractérise bien l'impossibilité de définir une vitesse de propagation de la chaleur. De plus, pour les temps de pose longs la quantité  $\delta t$  est négligeable,

(1) Dans les tableaux, les longueurs sont mesurées en millimètres, les temps ( $t$ ,  $\Delta t$ ,  $\delta t$ ) en secondes, les températures ( $U$ ) en degrés centigrades, les charges spécifiques ( $Q$ ) en kilowatts par centimètre carré, les charges ( $Q_1$ ) en kilowatts.

et il en est donc de même de l'accroissement de température correspondant. Pour les temps de pose très courts la quantité  $\delta t$  est plus importante, mais nous verrons plus tard que, dans ces cas, la charge de l'anticathode est limitée par la température atteinte à la surface de l'anticathode.

TABLEAU II.  
*Foyer illimité.*

$a = 1 \text{ mm.}$		$a = 2 \text{ mm.}$		$a = 3 \text{ mm.}$	
$\Delta t.$	$\delta t.$	$\Delta t.$	$\delta t.$	$\Delta t.$	$\delta t.$
2,72	0,0011	2,72	0,0056	2,72	0,0131
0,67	0,0014	0,67	0,0077	0,67	0,0224
0,17	0,0019	0,16	0,0123	0,13	0,0423
0,04	0,0031	0,033	0,029	0,03	0,068
0	0,0089	0	0,0356	0	0,08

TABLEAU III.  
*Foyer ponctuel.*

$a = 1 \text{ mm.}$		$a = 2 \text{ mm.}$		$a = 3 \text{ mm.}$	
$\Delta t.$	$\delta t.$	$\Delta t.$	$\delta t.$	$\Delta t.$	$\delta t.$
3,6	0,00025	3,6	0,00168	3,6	0,0037
0,91	0,00037	0,91	0,00187	0,91	0,0050
0,22	0,00045	0,22	0,0025	0,21	0,0072
0,057	0,00068	0,053	0,004	0,043	0,0142
0	0,0029	0	0,0116	0	0,0261

Par conséquent, dans toutes les applications numériques nous pourrions négliger cet effet d'accroissement de la température à l'intérieur de l'anticathode après cessation de la charge du foyer.

### 7. Applications numériques. Température maxima atteinte au foyer et derrière la cible d'une anticathode.

— Les tubes à rayons X que

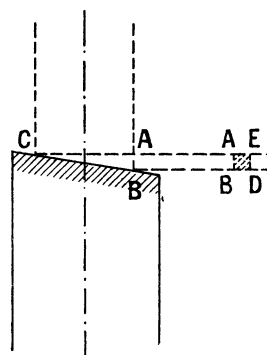


Fig. 9.

nous considérons sont tels que la normale à la face frontale de l'anticathode fait un angle de  $20^\circ$  avec l'axe du tube. Pour qu'un foyer rectangulaire soit vu selon une direction perpendiculaire à l'axe du

tube suivant un carré, il faut que le rapport des deux côtés du foyer soit égal à  $\sin 20^\circ$  (fig. 9).

D'où :

$$\frac{AB}{BC} = \sin 20^\circ,$$

$$BC = 2,924 AB = 2,924 BD.$$

Il est évident que la température maxima sera atteinte au centre du foyer si nous le supposons uniformément chargé.

D'autre part, pour simplifier les calculs numériques, il y a intérêt à décomposer le foyer en un nombre de secteurs circulaires aussi réduit que possible. Nous remplacerons donc le foyer rectangulaire réel représenté en trait plein par l'ensemble des secteurs de rayons  $R_1$  et  $R_2$  représentés en trait ponctué (fig. 10).

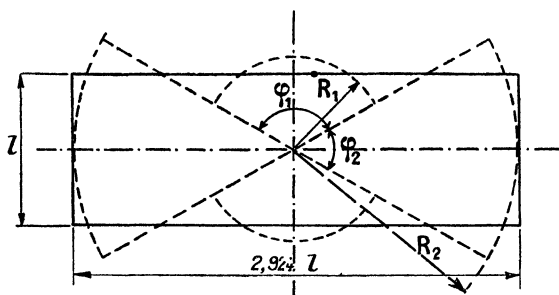


Fig. 10.

Les quantités  $R_1, R_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  ont été déterminées de façon que le foyer fictif ait une surface équivalente à celle du foyer réel et que sa forme, au voisinage du centre, se rapproche le plus possible de la forme du foyer réel. On a été ainsi conduit à adopter

$$R_1 = 0,5642 l, \quad R_2 = 1,462 l;$$

$$\varphi_1 = 2,085 \text{ radians}, \quad \varphi_2 = 1,057 \text{ radian.}$$

De plus, nous avons utilisé les constantes thermiques du tungstène et du cuivre données par A. Bouwers (*Z. Techn. Physik*, 1927, 8, 271) :

$$k_1 = 0,4, \quad \mu_1 c_1 = 0,7;$$

$$k_2 = 0,9, \quad \mu_2 c_2 = 1;$$

d'où

$$\alpha_1 = 0,756, \quad \alpha_2 = 0,95;$$

$$m = \frac{\frac{k_2}{\alpha_2} - \frac{k_1}{\alpha_1}}{\frac{k_2}{\alpha_2} + \frac{k_1}{\alpha_1}} = 0,285,$$

$$Q = 20 \text{ kW} : \text{cm}^2 = 4780 \text{ cal} : \text{s} : \text{cm}^2.$$

Dans ces conditions, les formules donnant les températures dans l'axe du foyer, d'une part à la

surface du foyer ( $U_{Cu}$ ), d'autre part derrière la cible ( $U_w$ ) prennent la forme

$$U_w = 11950 \times 1,512 \sqrt{t} \quad \text{Termes. A}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \left[ \frac{2 \times 2,085}{2\pi} \text{ierfc} \frac{R_1}{1,512 \sqrt{t}} + \frac{2 \times 1,057}{2\pi} \text{ierfc} \frac{R_2}{1,512 \sqrt{t}} \right] \right\} \quad \text{B}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-0,285)^n \times 2 \text{ierfc} \frac{2na}{1,512 \sqrt{t}} \quad \text{C}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-0,285)^n \times 2 \left[ \frac{2 \times 2,085}{2\pi} \text{ierfc} \frac{\sqrt{R_1^2 + (2na)^2}}{1,512 \sqrt{t}} + \frac{2 \times 1,057}{2\pi} \text{ierfc} \frac{\sqrt{R_2^2 + (2na)^2}}{1,512 \sqrt{t}} \right] \}; \quad \text{D}$$

$$U_{Cu} = 11950 \times 0,715 \times 1,512 \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-0,285)^n$$

$$\times \left\{ \text{ierfc} \frac{(2n+1)a}{1,512 \sqrt{t}} - \frac{2 \times 2,085}{2\pi} \text{ierfc} \frac{\sqrt{R_1^2 + (2n+1)^2 a^2}}{1,512 \sqrt{t}} - \frac{2 \times 1,057}{2\pi} \text{ierfc} \frac{\sqrt{R_2^2 + (2n+1)^2 a^2}}{1,512 \sqrt{t}} \right\}.$$

On voit que l'expression donnant  $U_w$  peut se décomposer en quatre termes de la façon suivante :

A. Température à la surface focale d'une anticathode homogène, les dimensions du foyer étant infinies.

B. Correction pour un foyer limité sur une anticathode homogène.

C. Correction pour une anticathode bimétallique, le foyer étant infini.

D. Complément de correction pour une anticathode bimétallique, le foyer étant limité.

Nous avons appliqué ces formules pour des temps de pose de 0,014, 0,056, 0,224, 0,896 et 3,584 s, des épaisseurs de cible de tungstène de 1, 2 et 3 mm à des foyers dont la largeur est de 1,4, 3,3 et 4,5 mm.

On trouve, dans Carslaw et Jaeger (*Conduction of Heat in Solids*, p. 373) une table des valeurs de la fonction  $\text{ierfc} x$  qui couvre tout le domaine des valeurs utiles de la fonction. Les valeurs de la variable sont suffisamment nombreuses pour permettre une interpolation précise quand c'est nécessaire.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-contre.

TABLEAU IV.  
(Foyer de 1,4 × 4,2 mm).

t.	a = 1.		a = 2.		a = 3.		a = ∞.
	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	
0,014...	837	133	856	23	856	3	856
0,056...	1025	277	1100	116	1112	47	1114
0,224...	1119	369	1217	204	1252	128	1271
0,896...	1166	408	1267	252	1307	168	1354
3,584...	1188	420	1290	284	1330	195	1395

TABLEAU V.  
(Foyer de 3,3 × 9,9 mm).

t.	a = 1.		a = 2.		a = 3.		a = ∞.
	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	
0,014...	1106	234	1142	45	1142	6	1142
0,056...	1611	621	1795	310	1842	158	1848
0,224...	2020	978	2280	677	2410	519	2508
0,896...	2282	1217	2551	931	2705	792	2955
3,584...	2330	1342	2665	1051	2825	947	3170

TABLEAU VI.  
(Foyer de 4,5 × 13,5 mm).

t.	a = 1.		a = 2.		a = 3.		a = ∞.
	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	
0,014...	1152	254	1189	50	1190	6	1190
0,056...	1785	754	2030	388	2075	176	2082
0,224...	2372	1309	2735	935	2925	649	3072
0,896...	2800	1731	3170	1365	3405	1068	3805
3,584...	3025	1963	3410	1584	3650	1292	4235

**8. Applications numériques. Détermination de l'épaisseur optima de la cible de tungstène.** — Nous adopterons pour températures maxima de fonctionnement d'une anticathode les valeurs suivantes :

$$T_W = 2800^\circ\text{C}, \quad T_{Cu} = 1000^\circ\text{C}.$$

Tenons compte du fait que la température moyenne d'une anticathode pendant une journée de travail peut être prise égale à 100° C, ce qui laisse, pour l'élévation de température admissible au moment

d'une radiographie :

$$U_W = T_W - T_0 = 2700^\circ,$$

$$U_{Cu} = T_{Cu} - T_0 = 900^\circ,$$

ce qui donne

$$\frac{U_W}{U_{Cu}} = 3.$$

Les rapports  $\frac{U_W}{U_{Cu}}$  pour les foyers étudiés précédemment sont donnés pour les valeurs du temps de pose

$$t = 0,224 \text{ s}, \quad t = 0,896 \text{ s}$$

dans le Tableau VII ci-dessous.

TABLEAU VII.

Valeur du rapport  $\frac{U_W}{U_{Cu}}$ .

Foyer....	1,4 × 4,2 mm.		3,3 × 9,9 mm.		4,5 × 13,5 mm.	
	a.	t.....	0,224.	0,896.	0,224.	0,896.
1.....	3,03	2,86	2,06	1,88	1,81	1,62
2.....	6,03	5,03	3,37	2,74	2,93	2,32
3.....	9,8	7,8	4,64	3,42	4,5	3,18

Nous voulons déterminer pour chacun des trois foyers étudiés l'épaisseur de cible qui donne au rapport  $\frac{U_W}{U_{Cu}}$  la valeur optima 3 pour chacun des temps de pose considérés : 0,224 et 0,896 s. Pour cela, il suffit d'utiliser les chiffres du Tableau VII en leur appliquant la formule d'interpolation de Lagrange.

On obtient ainsi :

TABLEAU VIII.

Épaisseur optima de la cible de tungstène (en mm).

t.	Foyer .....	1,4 × 4,2 mm.	3,3 × 9,9 mm.	4,5 × 13,5 mm.
0,224.....		0,99	1,71	2,05
0,896.....		1,07	2,36	2,81

En appliquant de nouveau la formule d'interpolation de Lagrange aux chiffres des Tableaux IV, V et VI on obtient, pour les épaisseurs optima, des cibles de tungstène les températures suivantes :

TABLEAU IX.

Foyer....	1,4 × 4,2 mm.				3,3 × 9,9 mm.				4,5 × 13,5 mm.			
	a = 0,99.		a = 1,07.		a = 1,71.		a = 2,36.		a = 2,05.		a = 2,81.	
	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .	U <sub>W</sub> .	U <sub>Cu</sub> .
0,014.....	837	135	839	122	1135	84	1142	13	1190	55	1190	14
0,056.....	1024	279	1031	263	1757	384	1829	237	2037	399	2066	311
0,224.....	1113	371	1126	355	2235	745	2339	603	2760	920	2905	699
0,896.....	1165	410	1173	391	2488	1008	2610	870	3185	1382	3366	1122
3,584.....	1187	422	1195	409	2585	1116	2745	993	3425	1601	3617	1340

On en déduit les régimes de charge indiqués dans les tableaux ci-après et dans lesquels  $Q$  représente la charge spécifique du foyer exprimée en kilowatts par centimètre carré et  $Q_1$  la charge totale du foyer en kilowatts.

TABLEAU X.

Charge du foyer de  $1,4 \times 4,2$  mm.

$t$ .	$a = 0,99.$				$a = 1,07.$			
	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .
0,014...	64,5	3,69	2700	434	64,4	3,68	2700	392
0,056...	52,8	3,02	2700	737	52,3	2,95	2700	688
0,224...	48,5	2,78	2700	900	47,9	2,74	2700	851
0,896...	43,8	2,51	2560	900	46	2,63	2700	900
3,584...	42,6	2,44	2530	900	44	2,52	2630	900

TABLEAU XI.

Charge du foyer de  $3,3 \times 9,9$  mm.

$t$ .	$a = 1,71.$				$a = 2,36.$			
	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .
0,014...	47,6	15,1	2700	200	47,2	15	2700	31
0,056...	30,7	9,8	2700	590	29,5	9,4	2700	350
0,224...	24	7,6	2700	900	23	7,3	2700	697
0,896...	19,6	6,2	2220	900	20,6	6,6	2700	900
3,584...	16	5,1	2080	900	18,1	5,8	2485	900

TABLEAU XII.

Charge du foyer de  $4,5 \times 13,5$  mm.

$t$ .	$a = 2,05.$				$a = 2,81.$			
	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .	$Q$ .	$Q_1$ .	$U_W$ .	$U_{Cu}$ .
0,014...	45,4	26,9	2700	125	45,4	26,9	2700	32
0,056...	26,5	15,7	2700	530	26,1	15,5	2700	406
0,224...	19,6	11,6	2700	900	18,6	11	2700	649
0,896...	13	7,2	2070	900	16,3	9,7	2700	900
3,584...	11,2	6,6	1930	900	13,4	8	2425	900

Si l'on trace la courbe de la charge d'un foyer (fig. 11) en fonction du temps de pose on constate que cette courbe comporte un point anguleux (A, B)

qui correspond au temps de pose pour lequel on a simultanément  $U_W = 2700^\circ C$  et  $U_{Cu} = 900^\circ C$ . Ce point anguleux sépare la région des faibles temps de pose pour lesquels la charge appliquée au foyer est limitée par la température atteinte par le tungstène, de la région des forts temps de pose pour lesquels la charge appliquée au foyer est limitée par la température atteinte par le cuivre.

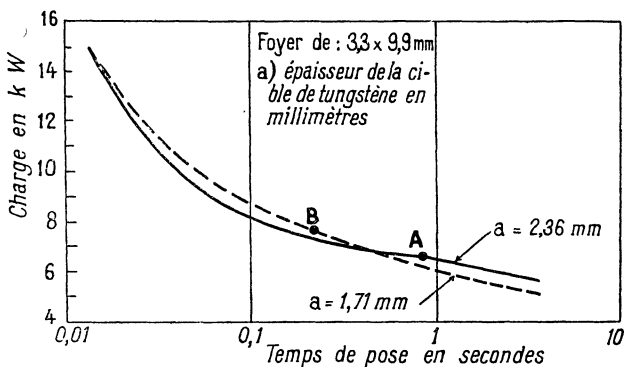


Fig. 11.

Les résultats obtenus ci-dessus supposent que la charge spécifique du foyer est constante. On peut augmenter la charge totale appliquée à un foyer en répartissant l'énergie à sa surface de façon qu'en tous ses points soit atteinte la température maxima de  $2700^\circ C$ . Ceci conduit à augmenter la charge spécifique sur les bords du foyer par rapport à ce qu'elle est au centre.

Mais si cet effet est exagéré on peut être amené à diminuer la charge totale appliquée au foyer pour que la température maxima atteinte n'excède pas  $2700^\circ C$ , bien que l'endroit de ce maximum de température ne soit plus le centre du foyer.

L'exposé qui précède représente la partie théorique de tout un ensemble de travaux sur la charge des foyers des tubes à rayons X entrepris dans les laboratoires de recherche de la Compagnie générale de Radiologie.