



HAL
open science

Théorie de la transmission et de la réflexion dans les systèmes de couches minces multiples

F. Scandone

► **To cite this version:**

F. Scandone. Théorie de la transmission et de la réflexion dans les systèmes de couches minces multiples. *Journal de Physique et le Radium*, 1950, 11 (7), pp.337-341. 10.1051/jphys-rad:01950001107033700 . jpa-00234267

HAL Id: jpa-00234267

<https://hal.science/jpa-00234267v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÉORIE DE LA TRANSMISSION ET DE LA RÉFLEXION
DANS LES SYSTÈMES DE COUCHES MINCES MULTIPLES**

Par F. SCANDONE.
Officine Galileo. Firenze.

Summary. — Systems of multiple thin films, either conducting or dielectric, have recently found applications in Optics for various purposes, in particular for making radiation filters of more or less narrow band widths. Several papers have been published on the procedure of calculating the radiation transmitted or reflected by any system of thin and parallel films. The resulting formulae are generally rather complicated.

In the present contribution, formulae are developed which lead to expressions of very simple structure and which can easily be applied to the case of continuously variable media.

1. Nous commencerons par établir nos formules pour le cas de milieux non absorbants (c'est-à-dire non conducteurs), et pour une radiation incidente normale aux couches. Nous verrons que cette restriction n'affecte pas la généralité des résultats.

2. Soient n_0 et n_k les indices de réfraction des milieux extrêmes, extérieurs au système de couches, et $n_1, n_2, n_3, \dots, n_\nu, \dots, n_{k-1}$ les indices de la première, deuxième, ..., $\nu^{\text{ième}}$ couche. Dans le cas où notre système est immergé dans un milieu unique (par exemple compris en deux verres), on aura $n_0 = n_k$ (fig. 1).

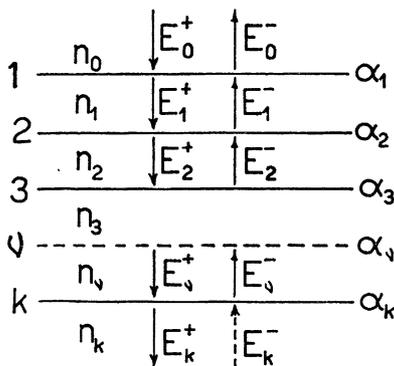


Fig. 1.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \dots, \alpha_k$ la phase avec laquelle la radiation arrive sur la première, deuxième, ..., $\nu^{\text{ième}}$, surface de séparation entre couches adjacentes; la première étant celle qui sépare le milieu extérieur n_0 de la première couche et la $k^{\text{ième}}$ celle qui sépare la dernière couche du milieu final n_k . Dans la généralité des cas on pourra

prendre comme origine des phases la phase α_1 , c'est-à-dire qu'on peut poser $\alpha_1 = 0$.

Quand la radiation, que nous supposons constituée par une onde plane monochromatique, tombe sur le système, une condition de régime s'établit aussitôt dans chaque milieu dans laquelle la radiation est constituée par une onde progressive et une onde régressive. Les amplitudes des vecteurs électriques de ces ondes seront désignés respectivement par E^+ et E^- , où le suffixe indique que nous nous référons aux composantes présentes dans la $\nu^{\text{ième}}$ couche.

Il est évident que E_0^+ représente l'amplitude de l'onde incidente et E_0^- celle de l'onde réfléchie. De même E_k^- représente l'amplitude transmise tandis que E_k^+ ne peut évidemment exister et sera donc posé égale à zéro.

Dans le cas de l'incidence normale que nous considérons, nous n'avons pas lieu de tenir compte de l'état de polarisation de la radiation.

Si nous écrivons les conditions pour la continuité des solutions des équations de Maxwell relatives à la propagation d'une onde électromagnétique à travers la $\nu^{\text{ième}}$ surface de discontinuité nous trouvons les deux conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} e^{i\alpha_\nu} E_\nu^+ + e^{-i\alpha_\nu} E_\nu^- &= e^{i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^+ + e^{-i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^- \\ n_\nu e^{i\alpha_\nu} E_\nu^+ - n_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_\nu^- &= n_{\nu-1} e^{i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^+ - n_{\nu-1} e^{-i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^- \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En résolvant par rapport à E_ν^+ et E_ν^- on obtient

$$\left. \begin{aligned} E_\nu^+ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_{\nu-1}}{n_\nu} \right) E_{\nu-1}^+ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_{\nu-1}}{n_\nu} \right) e^{-2i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^- \\ E_\nu^- &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_{\nu-1}}{n_\nu} \right) e^{2i\alpha_\nu} E_{\nu-1}^+ + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_{\nu-1}}{n_\nu} \right) E_{\nu-1}^- \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On voit que les amplitudes de la radiation dans la $\nu^{\text{ième}}$ couche peuvent être obtenues par une combinaison linéaire des composantes dans la couche qui précède immédiatement. Par suite d'une propriété

bien connue des combinaisons linéaires, les relations (2) peuvent être écrites comme un produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} E_{\nu}^{+} \\ E_{\nu}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\nu} & b_{\nu} e^{-2i\alpha_{\nu}} \\ b_{\nu} e^{2i\alpha_{\nu}} & a_{\nu} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{\nu-1}^{+} \\ E_{\nu-1}^{-} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_{\nu-1}}{n_{\nu}} \right) = a_{\nu}, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_{\nu-1}}{n_{\nu}} \right) = b_{\nu}, \end{cases} \quad (4)$$

a et b sont des fonctions des indices seulement, en particulier il satisfont à la condition

$$\frac{b_{\nu}}{a_{\nu}} = R_{\nu} = \frac{n_{\nu} - n_{\nu-1}}{n_{\nu} + n_{\nu-1}}, \quad (5)$$

où R_{ν} est le coefficient de réflexion de Fresnel pour les amplitudes relatives à la $\nu^{\text{ième}}$ surface de discontinuité.

La matrice de transformation des vecteurs électriques est hermitienne parce que ces termes symétriques sont complexes et conjugués. Le déterminant de la matrice a pour valeur le rapport des indices des milieux adjacents.

$$\Delta_{\nu} = a^2 - b^2 = \frac{n_{\nu-1}}{n_{\nu}}. \quad (6)$$

En appliquant successivement (3) on obtient par récurrence la relation entre les amplitudes E_k relatives au dernier milieu et celles E_0 relatives au premier. On obtient

$$\begin{pmatrix} E_k^{+} \\ E_k^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0^{+} \\ E_0^{-} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

où

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \prod_{\nu=1}^k \begin{pmatrix} a_{\nu} & b_{\nu} e^{-2i\alpha_{\nu}} \\ b_{\nu} e^{2i\alpha_{\nu}} & a_{\nu} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

où le produit doit être effectué selon les règles du produit matriciel.

De (6) il résulte que le déterminant des c est égal au rapport entre les indices du premier et dernier milieu.

$$\Delta = \prod_{\nu=1}^k \Delta_{\nu} = \frac{n_0}{n_k}. \quad (9)$$

En tenant compte du fait que $E_k^{-} = 0$, nous pouvons résoudre les relations (7) pour E_k^{+} et E_0^{-} . On détermine ainsi les amplitudes transmises et réfléchies en fonction de l'amplitude incidente E_0^{+} . On obtient

$$\begin{cases} E_k^{+} = \frac{\Delta}{c_{22}} E_0^{+}, \\ E_0^{-} = -\frac{c_{21}}{c_{22}} E_0^{+}. \end{cases} \quad (10)$$

Pour passer des amplitudes aux intensités, il faut

élever au carré les valeurs absolues et multiplier par l'indice de réfraction du milieu considéré.

En conclusion on trouve, pour les coefficients de transmission et de réflexion du système de couches, les expressions

$$\left. \begin{aligned} t_k &= \frac{E_k^{+} E_k^{+*}}{E_0^{+} E_0^{+*}} \frac{n_k}{n_0}, \\ r_0 &= \frac{E_0^{-} E_0^{-*}}{E_0^{+} E_0^{+*}}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

où le signe * représente les quantités complexes conjuguées.

Si l'on tient compte que les c jouissent de la propriété

$$c_{11} = c_{22}^{*} \quad \text{et} \quad c_{12} = c_{21}^{*}, \quad (12)$$

on pourra écrire

$$\left. \begin{aligned} t_k &= \frac{\Delta}{c_{11} c_{22}} = \frac{n_0}{n_k} \frac{1}{c_{11} c_{22}}, \\ r_0 &= \frac{c_{12} c_{21}}{c_{11} c_{22}}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

d'où suit nécessairement $t_k + r_0 = 1$ comme on doit s'y attendre pour des milieux non absorbants.

3. Avant de généraliser la théorie nous allons l'appliquer à des cas simples, pour en comprendre le fonctionnement.

$k = 1$. — Pour $k = 1$ on a une seule surface de discontinuité et l'on doit retrouver les formules classiques de Fresnel. Si l'on applique les (8) (en posant comme nous avons dit $\alpha_0 = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_0}{n_1} \right) & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_0}{n_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_0}{n_1} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_0}{n_1} \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8a)$$

et, par conséquent, (13) devient

$$\left. \begin{aligned} t_k &= \frac{4 n_0 n_1}{(n_1 + n_0)}, \\ r_0 &= \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

qui sont les expressions classiques.

$k = 2$. — C'est le cas des dépôts minces et transparents sur verre, par exemple ceux des couches antireflets (fig. 2).

En ce cas (8) devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 e^{-2i\alpha_2} \\ b_2 e^{2i\alpha_2} & a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 e^{-2i\alpha_2} & a_2 b_1 + b_2 a_1 e^{-2i\alpha_2} \\ b_2 a_1 e^{2i\alpha_2} + a_2 b_1 & b_2 b_1 e^{2i\alpha_2} + a_2 a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8b)$$

et (13) devient par conséquent

$$r_0 = \frac{a_2^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 \cos 2\alpha_2 + b_2^2 a_1^2}{a_1^2 a_2^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 \cos 2\alpha_2 + b_1^2 b_2^2}, \quad (13b)$$

en introduisant la propriété (5) nous obtenons

$$r_0 = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2 \cos 2\alpha_2 + R_2^2}{1 + 2R_1R_2 \cos 2\alpha_2 + R_1^2R_2^2},$$

où R sont les coefficients de Fresnel.

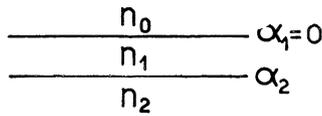


Fig. 2.

Pour discuter les propriétés des couches il est souvent convenable de considérer les amplitudes au lieu des intensités. Par exemple, pour l'amplitude réfléchie on obtient

$$E_0^- = - \frac{R_1 + R_2 e^{2i\alpha_2}}{1 + R_1R_2 e^{2i\alpha_2}} E_0^+, \quad (10b)$$

d'où suivent immédiatement les conditions de suppression de l'onde réfléchie.

$$R_1 = R_2 \quad \text{et} \quad 2\alpha_2 = \pi,$$

c'est-à-dire, en rappelant la signification de R :

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 a_3 e^{-2i\alpha_2} + b_3 a_2 b_1 e^{-2i\alpha_3} + b_3 b_2 a_1 e^{-2i(\alpha_3 - \alpha_2)} & \text{conjuguée} \\ b_3 a_2 a_1 e^{2i\alpha_3} + b_3 b_2 b_1 e^{2i(\alpha_3 - \alpha_2)} + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 a_1 e^{2i\alpha_2} & \text{conjuguée} \end{pmatrix}, \quad (8c)$$

d'où, par exemple :

$$E_0^- = - \frac{R_1 + R_2 e^{2i\alpha_2} + R_3 e^{2i\alpha_3} + R_1 R_2 R_3 e^{2i(\alpha_3 - \alpha_2)}}{1 + R_1 R_2 e^{2i\alpha_2} + R_1 R_3 e^{2i\alpha_3} + R_2 R_3 e^{2i(\alpha_3 - \alpha_2)}} E_0^+, \quad (10c)$$

dans la dernière expression, le numérateur et le dénominateur sont des polynômes complexes et leur discussion peut être faite graphiquement en représentant chaque terme par un vecteur orienté.

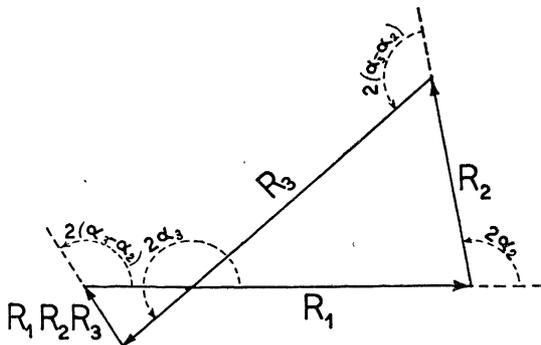


Fig. 4.

Par exemple, pour annuler l'onde réfléchie il sera suffisant, que le polygone qui représente le numérateur soit fermé. La figure 4 montre un exemple de ce genre.

Enfin, si l'on satisfait à la condition des phases ($\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$), mais pas à celle des indices, on obtient

$$E_{0 \min}^- = - \frac{R_1 - R_2}{1 - R_1R_2} E_0^+ = - \frac{n_1^2 - n_0 n_2}{n_1^2 + n_0 n_2} E_0^+,$$

d'où

$$r_{\min} = \left(\frac{n_1^2 - n_0 n_2}{n_1^2 + n_0 n_2} \right)^2.$$

$k = 3$. — C'est le cas d'un dépôt à deux couches sur verre, la discussion générale est déjà assez compliquée (fig. 3).

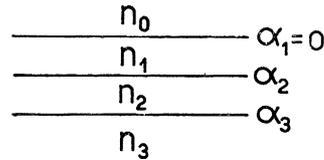


Fig. 3.

En effectuant le produit matriciel (8) on obtient

Nous pensons que les cas particuliers traités sont suffisants pour montrer comment nos formules doivent être appliquées pour la résolution des problèmes de couches multiples.

4. Généralisons nos formules au cas de l'incidence oblique. Dans ce cas il faut décomposer le vecteur électrique en une composante E_p parallèle au plan de réfraction et une composante E_s parallèle à la surface de discontinuité. Les conditions de continuité pour les solutions des équations de Maxwell sont différentes pour les deux composantes, et l'on a pour la composante p :

$$\left. \begin{aligned} n_\nu e^{i\alpha_\nu} E_{p,\nu}^+ + n_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_{p,\nu}^- \\ = n_{\nu-1} e^{i\alpha_\nu} E_{p,\nu-1}^+ + n_{\nu-1} e^{-i\alpha_\nu} E_{p,\nu-1}^- \\ \cos i'_\nu e^{i\alpha_\nu} E_{p,\nu}^+ - \cos i''_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_{p,\nu}^- \\ = \cos i_\nu e^{i\alpha_\nu} E_{p,\nu-1}^+ - \cos i_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_{p,\nu-1}^- \end{aligned} \right\} \quad (1p)$$

et pour la composante s :

$$\left. \begin{aligned} e^{i\alpha_\nu} E_{s,\nu}^+ + e^{-i\alpha_\nu} E_{s,\nu}^- = e^{i\alpha_\nu} E_{s,\nu-1}^+ + e^{-i\alpha_\nu} E_{s,\nu-1}^- \\ n_\nu \cos i'_\nu e^{i\alpha_\nu} E_{s,\nu}^+ - n_\nu \cos i''_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_{s,\nu}^- \\ = n_{\nu-1} \cos i_\nu e^{i\alpha_\nu} E_{s,\nu-1}^+ - n_{\nu-1} \cos i_\nu e^{-i\alpha_\nu} E_{s,\nu-1}^- \end{aligned} \right\} \quad (1s)$$

où $\cos i_\nu$ et $\cos i'_\nu$ sont respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction de la radiation sur la ν ème surface de discontinuité.

Si l'on résout chaque groupe d'équations comme au paragraphe 2, on trouve des formules qui coïn-

cident exactement avec les relations (3) si l'on donne aux coefficients a et b les significations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2} \frac{n \cos i' + n' \cos i}{n' \cos i'}; \\ b_p &= \frac{1}{2} \frac{n \cos i' - n' \cos i}{n' \cos i'}; \end{aligned} \right\} \quad (4p)$$

$$\left. \begin{aligned} a_s &= \frac{1}{2} \frac{n' \cos i' + n \cos i}{n' \cos i'}; \\ b_s &= \frac{1}{2} \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' \cos i'}; \end{aligned} \right\} \quad (4s)$$

où l'on a omis l'indice ν pour simplifier l'écriture.

Le rapport de b sur a est encore égal au rapport R_p et R_s respectivement entre les amplitudes réfléchies et incidentes selon les formules de Fresnel. Il est donc clair que toute la théorie que nous avons développée pour l'incidence normale peut être appliquée au cas de l'incidence oblique en donnant aux symboles a et b la signification indiquée en (4p) et (4s).

5. Le cas le plus général sera celui dans lequel les couches peuvent être en partie ou totalement des couches absorbantes. Pour ne pas compliquer l'interprétation des résultats, nous nous limiterons à considérer le cas où les milieux extrêmes sont constitués par des diélectriques. Dans ce cas aussi nos formules restent inaltérées. Il suffit de rappeler que dans un milieu absorbant, les lois de l'optique des milieux diélectriques sont encore valables à condition de substituer à l'indice de réfraction un indice symbolique complexe

$$\bar{n} = n(1 - i\chi),$$

où les constantes n et χ caractérisent complètement les propriétés du milieu, χ étant le coefficient responsable de l'absorption.

En effectuant formellement cette substitution les formules du paragraphe 2 sont encore valables, mais avec quelques précautions. La matrice des coefficients a et b n'est plus hermitienne, c'est-à-dire que les éléments symétriques ne sont plus conjugués, les équations (12) cessent donc d'être valables. Comme conséquence on ne peut plus faire usage des formules (13) auxquelles doivent être substituées les suivantes, de validité absolument générale.

$$\left. \begin{aligned} t_k &= \frac{\Delta}{c_{22} c_{22}^*} = \frac{n_0}{n_k} \frac{1}{c_{22} c_{22}^*}; \\ r_0 &= \frac{c_{21} c_{21}^*}{c_{22} c_{22}^*}. \end{aligned} \right\} \quad (13 \text{ absorp.})$$

Naturellement $t_k + r_0$ n'égale plus l'unité, la différence étant l'absorption du système de couches. Nous rappelons aussi que, dans le cas d'indice complexe, les phases aussi sont complexes parce que les chemins optiques contiennent l'indice.

6. Les formules récurrentes développées au paragraphe 2 peuvent être appliquées au cas d'un milieu d'indice variable avec continuité dans une direction. Il suffit de considérer le milieu comme une stratification d'innombrables couches d'épaisseurs infinitésimales, dans lequel les indices se suivent par des discontinuités infinitésimales.

Nous nous limiterons à l'incidence normale, mais le milieu peut être absorbant dans lequel cas l'indice et la phase seront complexes.

Appelons avec dn le saut d'indice au point de coordonnée x et indice n , les relations (4) deviennent

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n - dn}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{dn}{n} = 1 - \frac{1}{2} d \log n; \\ b_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n - dn}{n} \right) = \frac{1}{2} \frac{dn}{n} = \frac{1}{2} d \log n; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

pour la phase on doit écrire

$$\alpha_x = \alpha_{n(x)} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^x n \, dx = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{n_0}^{n_x} n \frac{dx}{dn} \, dn, \quad (15)$$

c'est-à-dire que la phase en un point de coordonnée x est obtenue en additionnant tous les retards infinitésimaux subis par la radiation à partir de l'origine $x = 0$.

Nous devons maintenant calculer la matrice des c donnée par (8) qui devient maintenant un produit d'un nombre infini de facteurs. Pour effectuer ce produit, nous prenons symboliquement le logarithme de l'expression (8) :

$$\log \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \sum_{1 \nu}^k \log \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu e^{-2i\alpha_\nu} \\ b_\nu e^{2i\alpha_\nu} & a_\nu \end{pmatrix}, \quad (16)$$

dans notre cas la somme du second membre devient une intégrale

$$\log \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \int_{n_0}^{\bar{n}} \log \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} d \log n & \frac{1}{2} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} e^{2i\alpha_n} d \log n & 1 - \frac{1}{2} d \log n \end{pmatrix}, \quad (17)$$

mais la matrice sous le signe d'intégration peut être visiblement décomposée en la somme d'une matrice unitaire et d'une matrice infinitésimale

$$\log \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \int_{n_0}^{\bar{n}} \log \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} d \log n & \frac{1}{2} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} e^{2i\alpha_n} d \log n & -\frac{1}{2} d \log n \end{pmatrix} \right], \quad (18)$$

en appliquant la règle bien connue $\log(1 + \varepsilon) = \varepsilon$ d'où quand ε est petit, nous écrivons

$$\log \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \int_{n_0}^{\bar{n}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} d \log n & \frac{1}{2} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} e^{2i\alpha_n} d \log n & -\frac{1}{2} d \log n \end{pmatrix}, \quad (19)$$

mais comme la somme des matrices peut s'obtenir en effectuant la somme des termes homologues, on peut écrire

$$\log \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} d \log n & \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{2i\alpha_n} d \log n & -\frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} d \log n \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} & \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{2i\alpha_n} d \log n & -\frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

d'où par exemple on obtient pour l'amplitude réfléchie l'expression

$$E_0^- = -\frac{c_{21}}{c_{22}} E_0^+ = -\frac{1}{2} \frac{\int_{n_0}^{\bar{n}} e^{2i\alpha_n} d \log n}{1 - \frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0}} E_0^+.$$

Un contrôle de notre théorie pour les milieux continus peut être obtenu par l'application au cas d'un saut brusque d'indice, où toute la variation d'indice se produit dans une épaisseur tout à fait négligeable par rapport à la longueur d'onde. On a dans ce cas $\alpha = 0$.

L'application exacte du développement (22)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} & \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{-2i\alpha_n} d \log n \\ \frac{1}{2} \int_{n_0}^{\bar{n}} e^{2i\alpha_n} d \log n & -\frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} \end{pmatrix}}. \quad (21)$$

Pour effectuer le calcul des coefficients c selon la formule (21), il faut pouvoir développer l'exponentielle qui apparaît au second membre. Si l'on désigne par A la matrice qui apparaît en exposant, on peut écrire, en développant en série

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (22)$$

où les termes A^2, A^3, \dots , doivent être effectués selon les règles du produit matriciel.

Les coefficients c_{11}, \dots , sont alors la somme des termes homologues de toutes les matrices de la série qui apparaît au second membre de (22).

Dans le cas où les termes de la matrice A sont tous petits auprès de l'unité (saut d'indice total faible) nous pourrions négliger les termes supérieurs de la série et écrire

conduit à l'expression

$$\begin{aligned} E_0^- &= -\frac{\frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{4} \log^2 \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{1}{12} \log^3 \frac{\bar{n}}{n_0} + \dots}{1 - \frac{1}{2} \log \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{1}{4} \log^2 \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{12} \log^3 \frac{\bar{n}}{n_0} + \dots} E_0^+ \\ &= -\frac{\log \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{2!} \log^2 \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{1}{3!} \log^3 \frac{\bar{n}}{n_0}}{1 + 1 - \log \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{1}{2!} \log^2 \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{3!} \log^3 \frac{\bar{n}}{n_0}} E_0^+ \\ &= \frac{1 - e^{-\log \frac{\bar{n}}{n_0}}}{1 + e^{-\log \frac{\bar{n}}{n_0}}} E_0^+ = \frac{\bar{n} - n_0}{\bar{n} + n_0} E_0^+ \end{aligned}$$

qui est le coefficient classique de Fresnel.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HADLEY L. N. et DENNISON D. M. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1947, **37**, 451. [3] CROOK A. W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1948, **38**, 954.
 [2] WEINSTEIN W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1947, **37**, 576. [4] ABELÈS F. — *Revue d'Optique*, 1949, **28**, 11.