



**HAL**  
open science

## Sur un analyseur de mobilité pour les ions gazeux. II. Influence de l'épaisseur finie du manchon

Paul Langevin

► **To cite this version:**

Paul Langevin. Sur un analyseur de mobilité pour les ions gazeux. II. Influence de l'épaisseur finie du manchon. *Journal de Physique et le Radium*, 1949, 10 (7-9), pp.225-234. 10.1051/jphysrad:01949001007-9022500 . jpa-00234176

**HAL Id: jpa-00234176**

**<https://hal.science/jpa-00234176>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

## LE RADIUM

### SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉ POUR LES IONS GAZEUX II. INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR FINIE DU MANCHON

Par PAUL LANGEVIN.

**Sommaire.** — Étude théorique du mouvement d'un gaz entraîné par un manchon cylindrique épais percé de fentes horizontales, tournant autour de son axe vertical, entre deux cylindres coaxiaux, suivie de l'étude du champ électrostatique entre le manchon et les cylindres conducteurs, pris comme électrodes.

Les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction vitesse s'obtiennent, en tenant compte des conditions aux limites, par un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Un choix convenable d'un nombre limité d'inconnues et d'équations donne une solution approchée suffisante pour calculer les corrections à apporter au cas du manchon infiniment mince déjà résolu dans la première Partie de ce travail par une méthode différente.

Un raisonnement très analogue s'applique au problème électrostatique.

**Influence sur le mouvement d'entraînement du gaz.** — L'influence de l'épaisseur du manchon a un double aspect puisqu'elle s'exerce sur le mouvement d'entraînement du gaz et sur la distribution du champ électrique. Examinons d'abord le premier de ces deux points de vue.

Nous substituerons ici aussi, au problème cylindrique, sans changer l'ordre de grandeur des résultats, le problème plan d'une grille composée de barreaux parallèles de section rectangulaire, de largeur  $b$  et d'épaisseur  $2c$ , séparés par des intervalles, les fentes  $f$ , de largeur  $a$ , se mouvant parallèlement aux barreaux avec la vitesse uniforme  $v_0$  dans le milieu visqueux situé entre deux plateaux immobiles parallèles à la grille et situés de part et d'autre de celle-ci à une même distance  $d$  du plan médian qui sépare en deux moitiés égales l'épaisseur de chacun des barreaux.

La figure 6 représente la section de ce système par un plan P perpendiculaire à la direction des barreaux et, par conséquent, à celle du mouvement de la grille. Dans le mouvement laminaire qu'il s'agit d'étudier, la vitesse  $v$  du fluide entraîné sera en tout point parallèle à cette même direction et dépendra seulement des deux coordonnées  $x$  et  $y$  de la projection du point sur le plan P. Cette vitesse devra s'annuler sur la surface des plans fixes et

devenir égale à  $v_0$  en tout point de la surface des barreaux. Dans la figure 6, on a supposé, comme

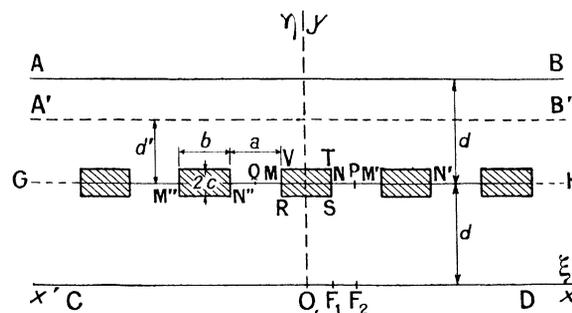


Fig. 6.

précédemment, la largeur de ceux-ci égale à celle des fentes qui les séparent, mais la solution que nous allons obtenir n'implique pas cette hypothèse particulière.

Pour faciliter la comparaison entre cette solution et celle, toute différente, du problème précédent, qui représente le cas limite du problème actuel lorsqu'on y suppose la grille infiniment mince et la distance  $d$  grande par rapport à la période  $a + b$

du réseau plan que représente cette grille, nous conserverons les notations (22) en y ajoutant les suivantes :

$$\frac{\pi c}{a+b} = \varepsilon, \quad \sigma = e^{-2\varepsilon}. \quad (22bis)$$

Je n'ai pas réussi à obtenir la solution du problème en considérant immédiatement dans son ensemble tout le domaine compris entre les plans fixes AB et CD, mais j'ai pu tourner la difficulté en remarquant que le plan médian de la grille, GH, est un plan de symétrie pour le système en même temps que pour l'ensemble des données du problème et que, si la solution est obtenue pour une des moitiés du système, celle qui est comprise entre CD et GH, par exemple, celle qui concerne l'autre moitié s'en déduira immédiatement par mirage dans le plan médian. Les conditions aux limites pour le nouveau domaine sont faciles à définir : la fonction harmonique  $v$  de  $x$  et  $y$  doit être nulle en tout point de CD, égale à  $v_0$  sur la surface des demi-barreaux, c'est-à-dire sur les demi-rectangles tels que MRSN (fig. 6) et, d'autre part, par raison de symétrie et de continuité,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  doit être nul en tout point des segments tels que NM'. Il en est de même de  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  si  $v$  est considéré comme fonction de  $\xi$  et de  $\eta$ .

Prenons pour origine, dans le plan P, le point O situé sur CD en face du milieu de la largeur d'un des barreaux, MN par exemple, pour axe des  $x$  la droite CD et pour axe des  $y$  la perpendiculaire menée par O à CD dans le plan P.

Pour trouver quelle forme peut prendre la solution, remarquons, comme nous l'avons déjà fait à propos du problème de la grille infiniment mince, que la structure périodique de la grille impose à cette solution d'être elle-même périodique en  $x$  avec la période  $a + b$ , c'est-à-dire en  $\xi$  avec la période  $\pi$ . D'autre part, la symétrie du système par rapport à Oy impose à la solution d'être une fonction paire, de  $x$  et, par conséquent, de  $\xi$ . Le développement de  $v$  en série de Fourier doit donc être de la forme

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos 2n\xi. \quad (37)$$

Les  $Y_n$  sont des fonctions de  $y$  et, par conséquent, de  $v$ . La fonction  $v$  devant s'annuler en tout point de CD, c'est-à-dire quel que soit  $\xi$  quand  $\eta$  est nul, chaque  $Y$  doit être nul en même temps que  $\eta$ .

On déduit de (37)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = - \sum 4n^2 Y_n \cos 2n\xi$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \sum \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} \cos 2n\xi.$$

La condition que  $v$  soit fonction harmonique

devient

$$\sum \left( \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n \right) \cos 2n\xi = 0$$

et impose, pour être satisfaite quel que soit  $\xi$ , que  $Y_n$  satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n = 0, \quad (38)$$

dont l'intégrale générale est, quand l'entier positif  $n$  est différent de zéro,

$$Y_n = C_n \operatorname{sh} 2n\eta - D_n \operatorname{ch} 2n\eta,$$

$Y_n$  devant être nul en même temps que  $\eta$ , il en résulte que  $D_n$  est nul.

Pour  $n$  égal à zéro, l'équation (38) devient

$$\frac{d^2 Y_0}{d\eta^2} = 0.$$

D'où

$$Y_0 = C_0 \eta + D_0,$$

avec  $D_0$  nul pour que  $Y_0$  s'annule en même temps que  $\eta$ .

Le développement de  $v$  en série de Fourier est donc nécessairement de la forme

$$v = C_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} 2n\eta \cos 2n\xi. \quad (39)$$

Les constantes  $A_0$  et  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  vont être déterminées par les conditions aux limites sur le bord supérieur GH du domaine.

Nous aurons intérêt, pour la commodité des applications, à poser

$$C_0 = \frac{A_0}{\delta}, \quad C_n = \frac{A_n}{\operatorname{sh} 2n\delta}$$

et à prendre les constantes  $A_n$  pour inconnues. Le développement (39) devient ainsi

$$v = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos 2n\xi. \quad (40)$$

Cherchons quelles relations entre les  $A_n$  sont nécessaires pour traduire les conditions aux limites sur le bord supérieur de notre domaine. En raison de la périodicité de celui-ci dans la direction des  $x$ , il nous suffira d'envisager la portion RSNPM' de ce bord supérieur (fig. 6). Cette portion se compose de trois parties : RS, SN et NM' qui nous conduiront respectivement à trois groupes indépendants d'équations.

GRUPE I. —  $v$  doit être égal à  $v_0$  sur RS quel que soit  $x$  ou  $\xi$ .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les coefficients du développement de  $v$  en série de Fourier sur le segment RS soient tous nuls, sauf le premier qui doit être égal à  $v_0$ .

Comme  $v$  est fonction paire de  $\zeta$  et que cette variable prend en R et S respectivement les valeurs  $-\frac{\pi\rho}{2}$  et  $+\frac{\pi\rho}{2}$ , ce développement est nécessairement de la forme

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos \frac{2m\xi}{\rho}. \quad (41)$$

D'autre part, comme, sur le segment RS,  $\eta$  est égal à  $\delta - \varepsilon$ , l'expression (40) devient

$$v = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi. \quad (42)$$

La relation (41) donne, par le procédé bien connu de multiplication des deux membres par  $\cos \frac{2m\xi}{\rho}$  et intégration par rapport à  $\xi$  entre les limites  $-\frac{\pi\rho}{2}$  et  $+\frac{\pi\rho}{2}$ , ou, ce qui revient au même en raison de la parité de  $v$ , entre les limites zéro et  $\frac{\pi\rho}{2}$ ,

$$V_m = 2 \int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v \cos \frac{2m\xi}{\rho} d\xi,$$

pour les valeurs entières de  $m$  depuis 1 jusqu'à l'infini, et

$$V_0 = \frac{2}{\pi\rho} \int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v d\xi,$$

pour  $m$  égal à zéro.

En remplaçant dans les intégrales  $v$  par l'expression (42) et en écrivant que  $V_0$  doit être égal à  $v_0$  et  $V_m$  nul pour les autres valeurs de  $m$ , depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtient le premier groupe d'équations linéaires en  $A_n$

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho &= 0 \quad (m \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Ces équations se simplifient dans deux cas particuliers intéressants :

Pour la grille infiniment mince,  $\varepsilon$  est nul et (43) devient

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 + \frac{1}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \sin n\pi\rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Si  $d$  est assez grand par rapport à  $a + b$  pour

que  $\delta$  soit supérieur à quelques unités, on a

$$\frac{\text{sh } 2(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2\delta} = e^{-2\varepsilon} = \sigma$$

et (43) devient

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sigma^n}{n} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n \sigma^n}{n^2\rho^2 - m^2} \sin n\pi\rho &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

(44) est évidemment le cas limite de (45) pour  $\varepsilon = 0$  ou  $\sigma = 1$ .

GRUPE II. — Un procédé analogue va nous conduire au groupe d'équations exprimant la condition que  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  soit nul sur le segment NM', quel que soit  $\zeta$  entre la valeur  $\frac{\pi}{2}\rho$  qui correspond au point N et la valeur  $\pi - \frac{\pi}{2}\rho$  qui correspond au point M'. Il sera commode de poser

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \xi',$$

$\xi'$  variant entre  $-\frac{\pi}{2}(1 - \rho)$  et  $+\frac{\pi}{2}(1 - \rho)$ .

La droite F<sub>2</sub>P qui correspond à  $\xi$  égal à  $\frac{\pi}{2}$  étant, comme OY, un axe de symétrie binaire pour le système,  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  doit être fonction paire de  $\xi'$  comme de  $\xi$  et doit se développer en série sur le segment N'M sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \sum_{m=0}^{\infty} V'_m \cos \frac{2m\xi'}{1 - \rho},$$

avec la condition nécessaire et suffisante que tous les  $V'_m$ , y compris  $V'_0$ , s'annulent pour que  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  s'annule en tout point de NM'. Cela se traduit par les équations, pour toutes les valeurs entières de  $m$  depuis zéro jusqu'à l'infini,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}(1 - \rho)} \frac{\partial v}{\partial \eta} \cos \frac{2m\xi'}{1 - \rho} = 0. \quad (46)$$

D'autre part, l'expression (40) de  $v$  donne

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{A_0}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nA_n \frac{\text{ch } 2\pi\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi$$

ou, en donnant à  $\eta$  la valeur  $\delta$  qu'il a sur NM' et en remplaçant  $\zeta$  par  $\frac{\pi}{2} + \xi'$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{A_0}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nA_n \coth 2n\delta \cos 2n\xi'.$$

En remplaçant  $\frac{\partial v}{\partial \eta_1}$  par cette expression dans les équations (46) et en effectuant les intégrations, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} + \frac{2}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho) &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho) &= 0. \end{aligned} \right\} (47)$$

Quand  $\delta$  est assez grand, les cotangentes hyperboliques sont pratiquement égales à l'unité, et le groupe (47) devient

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} + \frac{2}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \sin n\pi(1-\rho) &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) &= 0. \end{aligned} \right\} (48)$$

Ces équations s'appliquent, sans modification, au cas de la grille infiniment mince.

GRUPE III. — Prenons maintenant la portion SN du contour supérieur de notre domaine (*fig. 6*) sur laquelle  $v$  doit prendre la valeur  $v_0$  quel que soit  $\eta$ . Comme  $\xi$  y est partout égal à  $\frac{\pi}{2}\rho$ , le développement (40) y devient

$$v = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho.$$

Sur le segment SN,  $\eta$  varie depuis  $\delta - \varepsilon$  jusqu'à  $\delta$ , ou, si nous posons

$$\eta = \delta - x,$$

$x$  varie entre zéro et  $\varepsilon$ . Le développement (48) devient

$$v = A_0 - \frac{A_0 x}{\delta} + \sum_1^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n(\delta - x)}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho. \quad (49)$$

Le développement en série d'une fonction arbitraire de  $x$  entre zéro et  $\varepsilon$  est de la forme

$$v = \sum_0^{\infty} V_m \cos \frac{2m\pi}{\varepsilon} x + \sum_1^{\infty} U_m \sin \frac{2m\pi}{\varepsilon} x$$

et, pour que  $v$  prenne la valeur  $v_0$  quel que soit  $x$  entre zéro et  $\varepsilon$ , il est nécessaire et suffisant que  $V_0$  soit égal à  $v_0$  et que tous les  $V_m$  et  $U_m$  soient nuls pour toutes les valeurs de l'entier  $m$  depuis 1 jusqu'à l'infini. D'où les équations

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} v \, dx, \\ \int_0^{\varepsilon} v \cos \frac{2m\pi}{\varepsilon} x \, dx &= 0, \\ \int_0^{\varepsilon} v \sin \frac{2m\pi}{\varepsilon} x \, dx &= 0. \end{aligned} \right\} (50)$$

En remplaçant  $v$  par son expression (49) et en effectuant les intégrations, on obtient le groupe d'équations linéaires entre les  $A_n$  :

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n} \frac{\text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} A_n, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n \cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} A_n &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta}\right] A_n &= 0 \end{aligned} \right\} (51)$$

$(m \geq 1).$

Si  $\delta$  est grand, ceci se réduit à

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n} (1 - \sigma^n) A_n, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n \cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} (1 - \sigma^n) A_n &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} (1 - \sigma^n) A_n &= 0 \end{aligned} \right\} (52)$$

$(m \geq 1).$

Quand on passe au cas limite de la grille infiniment mince,  $\varepsilon$  tendant vers zéro,  $\sigma$  qui est égal à  $e^{-2\varepsilon}$  tend vers 1 et l'on constate facilement que seule subsiste la première équation de l'un ou l'autre des groupes (51) et (52) sous la forme

$$v_0 = A_0 + \sum A_n \cos n\pi\rho, \quad (53)$$

qui signifie simplement, comme on peut le vérifier sur le développement (40), que  $v$  doit prendre la valeur  $v_0$  au point N (*fig. 3*) pour lequel  $\xi$  est égal à  $\frac{\pi}{2}\rho$  et  $\eta$  égal à  $\delta$ . C'est en effet à ce seul point que se réduit le segment SN (*fig. 6*) quand l'épaisseur des barreaux diminue indéfiniment.

Cette équation (53) doit d'ailleurs être considérée comme une conséquence des équations (44), qui se rapportent à ce même cas de la grille infiniment mince et qui expriment la condition que  $v$  soit égal à  $v_0$  en tout point de MN (*fig. 3*) et au point N en particulier. Il ne subsiste donc, dans ce cas particulier, que les deux groupes (44) et (48) d'équations indépendantes.

L'ensemble des trois groupes (43) (47) et (51) représente un système d'un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues  $A_n$ . Bien qu'il ne m'ait pas été possible d'en obtenir une solution directe et complète, j'ai pu cependant m'assurer qu'il permet d'obtenir de notre problème une solution aussi approchée qu'on le désire en limitant le nombre des inconnues et en choisissant convenablement un nombre égal d'équations. Par

exemple, on conservera seulement les  $n$  premières inconnues depuis  $A_0$  jusqu'à  $A_{n-1}$  et l'on conservera également les premières équations de chacun des trois groupes jusqu'à concurrence du nombre total  $n$ . Quand il s'agit, comme c'est le cas pour nous, d'obtenir seulement un ordre de grandeur d'écart ou de termes correctifs, il n'est pas nécessaire de pousser bien loin l'application de ce procédé pour obtenir une approximation très suffisante. Je voudrais le montrer en comparant les résultats que donne cette solution dans le cas limite de la grille infiniment mince à la solution rigoureuse que nous avons pu obtenir directement de ce cas limite en étudiant l'influence de la largeur des fentes. Je me limiterai d'ailleurs au cas particulier pour lequel nous avons fait l'application numérique de cette solution rigoureuse, celui où la largeur  $a$  des fentes est égale à celle  $b$  des barreaux,  $\rho$  devenant égal à  $\frac{1}{2}$ .

Nous avons déjà remarqué, d'ailleurs, que pour la grille infiniment mince, il ne subsiste que les deux groupes d'équations (44) et (48) qui se simplifient quand on y fait  $\rho$  égal à  $\frac{1}{2}$ . Il convient d'opérer avec quelque précaution ce passage à la limite. Prenons d'abord le groupe (44); il devient

$$v_0 = A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n A_n}{n^2 - 4m^2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

La somme qui figure dans la première de ces équations ne donne lieu à aucune difficulté. Le sinus qui y figure n'est différent de zéro que pour les valeurs impaires  $2p + 1$  de  $n$  et prend alors la valeur  $(-1)^p$ ; dans chacune des sommes qui figurent dans les autres équations un autre terme que ceux de rang impair est différent de zéro : c'est celui pour lequel  $n$  prend la valeur paire  $2m$ , qui annule le dénominateur en même temps que le sinus. Pour trouver la vraie valeur de ce terme, il suffit d'y faire tendre  $n$  vers  $2m$ . On obtient ainsi

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} A_{2p+1}, \\ A_{2m} + \frac{4}{\pi} (-1)^m \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} &= 0. \end{aligned} \right\} (54)$$

De même, le groupe (48) devient, quand on y remplace  $\rho$  par la valeur particulière  $\frac{1}{2}$ ,

$$\frac{A_0}{\delta} + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \sin \frac{n\pi}{2} = 0,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2 - 4m^2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

Si l'on tient compte des mêmes remarques que ci-dessus, on obtient finalement

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1} &= 0, \\ A_{2m} - \frac{2}{m\pi} (-1)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} &= 0. \end{aligned} \right\} (55)$$

Si l'on combine par soustraction chaque équation de la seconde ligne de ce groupe avec l'équation correspondante de la seconde ligne du groupe (54), on obtient pour remplacer (55) le groupe plus simple

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1} &= 0, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{2p+1-2m} A_{2p+1} &= 0. \end{aligned} \right\} (56)$$

L'aspect de ce dernier groupe qui renferme uniquement les inconnues d'indice impair à côté de  $A_0$ , montre comment il est raisonnable de procéder dans le choix des équations, à un ordre déterminé d'approximation. Si le nombre des inconnues auquel on se limite est pair et égal à  $2p + 2$  depuis  $A_0$  jusqu'à  $A_{2p+1}$ , le nombre des inconnues d'indice impair est  $p + 1$  et, pour les déterminer en fonction de  $A_0$  il est tout indiqué de prendre, dans le groupe (56), ce même nombre  $p + 1$  d'équations, à savoir celle de la première ligne et  $p$  équations de la seconde ligne, depuis  $m = 1$  jusqu'à  $m = p$  inclusivement.

Le système ainsi constitué étant résolu et donnant les inconnues d'indice impair en fonction de  $A_0$ , la première équation du groupe (54), après substitution, ne contiendra plus que  $A_0$  qu'elle déterminera, et enfin, les  $p$  premières équations de la seconde ligne du groupe (54) donneront immédiatement chacune une des inconnues d'indice pair, depuis  $A_2$  jusqu'à  $A_{2p}$  en y faisant varier  $m$  depuis 1 jusqu'à  $p$ .

Si le nombre d'inconnues auquel on se limite est impair, depuis  $A_0$  jusqu'à  $A_{2p+2}$ , on procédera exactement comme il vient d'être indiqué pour avoir les  $2p + 2$  premières inconnues depuis  $A_0$  jusqu'à  $A_{2p+1}$ , c'est-à-dire qu'on prendra simplement les résultats de l'approximation paire précédente et l'on y adjoindra  $A_{2p+2}$  tiré de l'équation (53) qui, pour  $\rho$  égal à  $\frac{1}{2}$ , ne renferme plus que les inconnues d'indice pair puisqu'elle devient, dans ce cas,

$$v_0 = A_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^p A_{2p} = \sum_0^{\infty} (-1)^p A_{2p}.$$

Ainsi donc, pour obtenir l'approximation d'ordre pair  $2p + 2$  ou impair  $2p + 3$ , il suffit de résoudre le système d'équations linéaires à  $p + 1$  inconnues que représente le groupe (56) quand on le limite comme il a été dit.

La comparaison des résultats ainsi obtenus avec ceux de la première solution représentée par les formules (25) et (30) se fera, par exemple en calculant  $v_p$  ainsi que l'intégrale

$$\int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\tau_1.$$

Pour ces quantités, la première solution nous a donné (1)

$$\left. \begin{aligned} v_0 - v_p &= \frac{Y_p}{\delta + L\sqrt{2}} v_0 = \frac{0,880}{\delta + 0,346} v_0 \\ \text{et} \quad \int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\tau_1 &= \frac{0,314 v_0}{\delta + 0,346}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

La solution actuelle nous permet d'exprimer ces mêmes quantités en fonction des  $A_n$ . Pour ce qui concerne le point P, milieu d'une fente, de coordonnées

$$\xi = \frac{\pi}{2}, \quad \tau_1 = \delta,$$

le développement (40) donne

$$v_p = A_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n. \quad (58)$$

Pour évaluer l'intégrale, nous déduisons du développement (40) les expressions suivantes de  $v_1$  et de  $v_2$  qui s'obtiennent en donnant à  $\xi$  respectivement les valeurs  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\text{sh } 4p\eta}{\text{sh } 4p\delta} A_{2p}, \\ v_2 &= A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} A_n. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $\eta$  entre zéro et  $\delta$ , on obtient

$$\int_0^{\delta} v_1 d\tau_1 = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\text{ch } 4p\delta - 1}{4p \text{ sh } 4p\delta} A_{2p}$$

et

$$\int_0^{\delta} v_2 d\tau_1 = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{ch } 2n\delta - 1}{2n \text{ sh } 2n\delta} A_n.$$

Quand  $\delta$  est suffisamment grand, ces expressions se réduisent à

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\delta} v_1 d\tau_1 &= A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p} A_{2p}, \\ \int_0^{\delta} v_2 d\tau_1 &= A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} A_n. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

(1) L, logarithme népérien.

Voyons maintenant quels sont les résultats de nos approximations successives obtenues en utilisant, comme il a été dit, les équations (54) et (56). Pour la commodité des calculs, il y a intérêt à introduire, au lieu des  $A_n$ , des inconnues auxiliaires  $x_n$  définies par

$$x_{2p} = (-1)^p A_{2p}, \quad x_{2p+1} = (-1)^p \frac{4(2p+1)}{\pi} A_{2p+1}.$$

Les équations entre les  $x_n$  prennent ainsi la forme

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= x_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x_{2\mu+1}}{2(2p-1)^2}, \\ x_{2m} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x_{2\mu+1}}{(2p+1)^2 - 4m^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$\frac{x_0}{\delta} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x_{2\mu+1}}{2p+1}, \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x_{2\mu+1}}{2p+1-2m} = 0. \quad (61)$$

L'équation complémentaire (53) devenant

$$v_0 = \sum_{\mu=0}^{\infty} x_{2\mu}.$$

Il est remarquable qu'on obtienne une approximation déjà très bonne en conservant un très petit nombre d'inconnues. Prenons-en, par exemple, quatre seulement :  $x_0, x_1, x_2, x_3$  entre lesquelles le système (60), (61) devient

$$\begin{aligned} v_0 &= x_0 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{18}, & x_2 - \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{5} &= 0; \\ \frac{x_0}{\delta} &= x_1 + \frac{x_3}{3}, & x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de ce système permet de remonter aux inconnues  $A$  reliées aux  $x$  par

$$A_0 = x_0, \quad A_2 = -x_2, \quad A_1 = \frac{\pi}{4} x_1, \quad A_3 = -\frac{\pi}{12} x_3$$

et d'en déduire, par application des formules (58) et (59),

$$\begin{aligned} v_0 - v_p &= v_0 - A_0 + A_1 - A_2 + A_3, \\ \int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\tau_1 &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{6}. \end{aligned}$$

Des calculs numériques très simples conduisent ainsi à

$$\begin{aligned} v_0 - v_p &= \frac{0,909 v_0}{\delta + 0,417}, \\ \int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\tau_1 &= \frac{0,312 v_0}{\delta + 0,417}, \end{aligned}$$

ce qui, comparé à (57), montre combien notre méthode d'approximations successives conduit rapidement à des évaluations suffisantes. L'épreuve que nous faisons ainsi subir à cette méthode dans le cas particulier de la grille infiniment mince, pour lequel une autre solution plus directe nous était connue,

peut nous donner confiance dans les résultats qu'elle va nous fournir pour une grille d'épaisseur finie.

Appliquons les formules générales (45), (48) et (52) relatives au cas où la distance  $d$  est assez grande par rapport à  $a + b$ , en supposant  $a$  égal à  $b$ , ou  $\rho$  égal à  $\frac{1}{2}$ . On obtient immédiatement les groupes

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(-1)^\rho \sigma^{2\rho+1}}{2\rho+1} A_{2\rho+1}, \\ \frac{4(-1)^m}{\pi} \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \frac{(2\rho+1)\sigma^{2\rho+1-2m}}{(2\rho+1)^2 - 4m^2} A_{2\rho+1} - A_{2m} &= 0; \end{aligned} \right\} (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} &= \frac{4}{\pi} \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho A_{2\rho+1}, \\ \frac{2(-1)^m}{m\pi} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(-1)^\rho (2\rho+1)^2}{(2\rho+1)^2 - 4m^2} A_{2\rho+1} - A_{2m} &= 0. \end{aligned} \right\} (64)$$

Ce groupe (64), combiné par addition de sa seconde ligne avec la seconde ligne de (63), permet de lui substituer le groupe plus simple

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} &= \frac{4}{\pi} \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho A_{2\rho+1}, \\ \sum \frac{(-1)^\rho (2\rho+1)}{(2\rho+1)^2 - 4m^2} \left( \sigma^{2\rho+1-2m} + \frac{2\rho+1}{2m} \right) A_{2\rho+1} &= 0, \end{aligned} \right\} (65)$$

où ne figurent plus, à côté de  $A_0$ , que les inconnues d'indice impair.

Le groupe (52) devient, quand on y fait  $\rho$  égal à  $\frac{1}{2}$ ,

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^\rho \frac{(1 - \sigma^{2\rho})}{2\rho} A_{2\rho}, \\ \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{(-1)^\rho (1 - \sigma^{2\rho})}{4\rho^2 \varepsilon^2 + m^2 \pi^2} A_{2\rho} &= 0, \\ \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{(-1)^\rho \rho (1 - \sigma^{2\rho})}{4\rho^2 \varepsilon^2 + m^2 \pi^2} A_{2\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} (66)$$

Ce groupe joue, pour les inconnues d'indice pair, le même rôle que le précédent pour les inconnues d'indice impair.

Nous tirerons les conséquences de ces formules quand nous aurons résolu, pour la grille d'épaisseur finie située entre deux plateaux symétriques par rapport à elle, le problème de la distribution du champ électrique.

**Distribution du champ électrique.** — La grille et les plateaux étant supposés portés à des potentiels donnés, le problème de la distribution du potentiel et du champ correspondant se pose exactement comme le problème précédent et se ramène à la recherche d'une fonction harmonique dans le plan  $P$

prenant des valeurs données sur les limites du domaine compris entre la grille et les plateaux. Lorsque ceux-ci sont supposés portés au même potentiel, que nous pouvons prendre pour origine et supposer nul, la solution précédente s'applique exactement, le potentiel électrique  $U$  remplaçant la vitesse du gaz  $v$ .

Le problème électrique qui concerne notre appareil est différent et, comme nous le verrons, complémentaire du précédent. Pour que les ions se déplacent dans le même sens avant et après la traversée de la grille, il faut que les plateaux soient portés à des potentiels de signes opposés par rapport à celui de la grille et, plus particulièrement, à des potentiels égaux et opposés pour correspondre à la condition (10) du problème cylindrique. Si nous prenons, tout d'abord, le potentiel de la grille pour origine, la symétrie du système implique que les potentiels en deux points quelconques symétriques par rapport au plan médian  $GH$  (fig. 6) seront égaux et de signes contraires et, par conséquent, que le potentiel sera nul en tout point de ce plan, c'est-à-dire sur les segments tels que  $NM'$  situés sur  $GH$  à l'intérieur des fentes. Ceci nous permet, comme dans le problème précédent, de n'envisager que la moitié du domaine primitif et de résoudre le problème de Dirichlet pour la portion du plan comprise entre  $CD$  et un bord supérieur dentelé composé de parties successives telles que  $MRSNPM'$ ; le potentiel devant s'annuler sur la totalité de ce bord supérieur et prendre une valeur constante sur le bord inférieur rectiligne  $CD$ . Il revient d'ailleurs au même, par simple changement de l'origine des potentiels, de supposer le potentiel  $U$  nul sur  $CD$  et prenant partout une valeur donnée  $U_1$  sur le bord supérieur dentelé du demi-domaine.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait à propos du mouvement du gaz, on voit facilement que le développement en série de la fonction  $U$ , à la fois harmonique et périodique en  $\xi$ , doit être de la forme, analogue à (40) :

$$U = B_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi. \quad (67)$$

La condition que  $U$  prenne la valeur  $U_1$  en tout point du segment  $RS$  se traduit par un groupe d'équations linéaires entre les  $B_n$  exactement analogue au groupe (43)

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= B_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum_1^{\infty} \frac{B_n}{n} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n}{n^2 \rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho &= 0. \end{aligned} \right\} (68)$$

Le second groupe doit exprimer que  $U$  prend la valeur  $U_1$  aussi sur le segment  $NM'$ ; en procédant comme nous l'avons fait pour obtenir (47), on arrive

facilement à

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= B_0 + \frac{1}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n} \sin n\pi(1-\rho). \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nB_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) &= 0. \end{aligned} \right\} (69)$$

Enfin la condition que  $U$  soit égal à  $U_1$  sur SN devient

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{B_n}{n} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho &= 0. \end{aligned} \right\} (70)$$

Ces équations se simplifient notablement quand on y suppose  $\delta$  suffisamment grand et  $\rho$  égal à  $\frac{1}{2}$  pour correspondre au cas particulier où la largeur des fentes est égale à celle des barreaux. Les trois groupes (68), (69), (70) deviennent respectivement

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= B_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sigma^{2p+1}}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1) \sigma^{2p+1-2m}}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} &= 0; \end{aligned} \right\} (71)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= B_0 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} &= 0; \end{aligned} \right\} (72)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma^{2p}}{2p} B_{2p}, \\ \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma^{2p}}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} &= 0, \\ \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{p(1 - \sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} (73)$$

En retranchant chaque équation du groupe (72) de l'équation correspondante du groupe (71), on obtient, pour remplacer ce dernier, le groupe plus simple

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_0\varepsilon}{\delta} &= \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p (1 + \sigma^{2p+1})}{2p+1} B_{2p+1}, \\ \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{(2p+1)(\sigma^{2m} + \sigma^{2p+1})}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} &= 0. \end{aligned} \right\} (74)$$

Le résultat le plus important que puisse nous donner la solution de ce problème de l'influence de l'épaisseur finie de la grille sur la distribution du champ électrique, est celui qui concerne la fraction que laisse passer la grille du nombre total des ions amenés par le champ et dont les trajectoires projetées sur le plan P perpendiculaire au mouvement d'entraînement du gaz, sont les lignes de force du champ électrique contenues dans ce plan P.

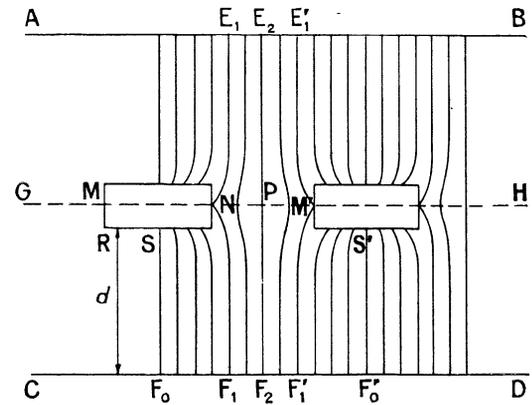


Fig. 7.

Par raison de symétrie, la ligne de force telle que  $F_2PE_2$  (fig. 7) n'est pas déformée puisqu'elle passe par le milieu P d'une fente, mais les lignes voisines sont gonflées vers les barreaux, jusqu'à prendre la forme particulière  $F_1NE_1$  qui amène les ions aux barreaux en N. Seuls, les ions émis par la source entre  $F_1$  et  $F_1'$  arrivent à l'électrode en passant par la fente correspondante. Si la distance  $d$  est suffisante pour que les lignes de force arrivent rectilignement aux plateaux au voisinage desquels le champ sera par conséquent uniforme, et si l'on suppose que l'extraction des ions se fait uniformément dans la longueur de la fente-source F, le rapport cherché est égal au rapport

$$r = \frac{F_1 F_2}{F_0 F_2}$$

égal d'ailleurs au rapport des charges électriques situées sur les portions de la surface des plateaux correspondant à  $F_1F_2$  et  $F_0F_2$  respectivement ou encore au rapport des flux de force ou d'induction qui partent de ces surfaces.

Cette remarque nous conduit à faire intervenir la fonction de flux  $\varphi$ , fonction harmonique conjuguée de  $U$  et reliée à celle-ci par les conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (75)$$

En remplaçant ici  $U$  par son expression géné-

rale (67) et en intégrant, on obtient

$$\varphi = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi. \quad (76)$$

la constante d'intégration est ainsi choisie de manière que  $\varphi$  s'annule en même temps que  $\xi$ . La fonction  $\varphi$  est telle que sa valeur reste constante tout le long d'une ligne de force. L'origine des  $\xi$  étant en  $F_0$  (fig. 7),  $\varphi$  est nul sur la ligne de force  $F_0S$ . Si nous désignons par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les valeurs de  $\varphi$  sur les lignes de force  $F_1N$  et  $F_2P$ , le rapport cherché a pour valeur

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2}.$$

La ligne  $F_1N$  le long de laquelle  $\varphi_1$  est constant permet de calculer cette valeur en substituant à  $\xi$  et  $\eta$  dans (76) les coordonnées d'un quelconque de ses points et, en particulier, celles du point  $N$  qui sont  $\frac{\pi}{2}\rho$  et  $\delta$ ; on obtient ainsi

$$\varphi_1 = B_0 \frac{\pi\rho}{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \coth 2n\delta \sin n\pi\rho,$$

de même

$$\varphi_2 = B_0 \frac{\pi}{2\delta}.$$

Dans le cas particulier où  $d$  est grand par rapport à  $a + b$  et où  $a$  est égal à  $b$ , ces expressions deviennent

$$\varphi_1 = \frac{B_0}{4} \frac{\pi}{\delta} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p+1},$$

d'où

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2} = \frac{1}{2} - \frac{2\delta}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0}.$$

Il est remarquable que ce résultat fasse intervenir seulement celles des inconnues qui figurent dans le groupe (74) d'équations, de sorte qu'il suffit, pour déterminer notre rapport, de conserver et de résoudre le système constitué par ce seul groupe. Dans ce but, il est commode d'introduire de nouvelles variables

$$z_p = \frac{2\delta}{\pi} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0},$$

qui satisfont aux équations, déduites de (74) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + \sigma^{2p+1}}{2p+1} z_p &= \varepsilon, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma^{2m} + \sigma^{2p+1})(2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} z_p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

$$\left( r = \frac{1}{2} - \sum_0^{\infty} z_p \right).$$

Pour obtenir une approximation déterminée dans l'évaluation de  $r$ , il suffit de conserver  $p + 1$  inconnues  $z$  depuis l'indice zéro jusqu'à l'indice  $p$  et de résoudre le système constitué par la première équation (75) et  $p$  équations de la seconde ligne pour les valeurs de  $m$  depuis 1 jusqu'à  $p$ .

Le déterminant du système ainsi constitué est toujours différent de zéro, de sorte que, quand  $\varepsilon$  est nul (grille infiniment mince) tous les  $z_p$  sont nuls et le rapport  $r$  prend, comme on pouvait le prévoir, la valeur  $\frac{1}{2}$  puisque, dans ce cas, les lignes de force restent rectilignes et que, la largeur des fentes étant supposée égale à celle des barreaux, la moitié des ions issus de la source peuvent traverser la grille.

Déjà la première approximation, dans laquelle on conserve la seule inconnue  $z_0$  et la première équation (75) qui devient

$$(1 + \sigma)z_0 = \varepsilon$$

donne pour  $r$  une valeur

$$r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1 + \sigma}, \quad (78)$$

que ne modifie pas notablement les approximations plus élevées tant que l'épaisseur de la grille  $2c$  reste sensiblement inférieure à la période  $a + b$ . Si nous adoptons, par exemple,

$$a = b = 3, \quad 2c = 1,$$

on a

$$\varepsilon = \frac{\pi c}{a + b} = \frac{\pi}{12}, \quad \sigma = e^{-2c} = 0,5924$$

et, d'après (78),

$$r_1 = 0,5 - 0,164 = 0,336,$$

le tiers environ des ions passera à travers la grille.

**Étalement des points d'arrivée des ions de même mobilité.** — La connaissance du mouvement du gaz et de la distribution du champ électrique nous permet d'évaluer ce que devient l'étalement des points d'arrivée pour des ions d'une même mobilité, du fait de l'existence des fentes dans le manchon d'épaisseur finie. Les trajectoires qui donnent lieu au maximum et au minimum de déplacement des ions sont celles qui se projettent sur le plan  $P$  suivant  $F_1NE_1$  et  $F_2PE_2$  respectivement (fig. 7). Pour la seconde de ces trajectoires, on a le déplacement

$$l_2 = \frac{2}{k} \int_0^d \frac{v_2}{h_2} dy. \quad (79)$$

$v_2$  est donné par la formule (40) quand on y donne à  $\xi$  la valeur  $\frac{\pi}{2}$  qui correspond à l'abscisse commune

de tous les points de la droite  $F_2PE_2$ , donc

$$v_2 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta}.$$

Le champ  $h_2$  a pour valeur

$$h = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a+b}{\pi} \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$U$  étant donné par la formule (67); d'où, pour  $\xi$  égal à  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\frac{\pi}{a+b} h_2 = \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n 2n B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta},$$

les  $A$  et les  $B$  s'obtiennent comme il a été indiqué par la résolution des groupes correspondants d'équations linéaires. Connaissant ainsi  $v_2$  et  $h_2$  en fonction de  $\eta$ , on obtiendra  $l_2$  d'après (79) en effectuant l'intégration graphique contenue dans

$$l_2 = \frac{2(a+b)}{\pi k} \int_0^{\delta} \frac{v_2}{h_2} d\eta.$$

Le calcul est un peu plus compliqué pour la trajectoire  $F_1NE_1$ , à cause de la forme incurvée de sa projection sur le plan P.

Si  $v_1$  est la vitesse du gaz en un point quelconque de cette trajectoire, on a

$$l_1 = \frac{2}{k} \int_0^d \frac{v_1}{\partial U} dy = \frac{2(a+b)^2}{\pi^2 k} \int_0^{\delta} \frac{v_1}{\partial U} d\eta, \quad (80)$$

$v_1$  et  $\frac{\partial U}{\partial \eta}$  s'obtiennent en fonction de  $\eta$  en donnant

à  $\xi$  dans les formules

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_1^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^{\infty} 2n B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

les valeurs qui correspondent à celles de  $\eta$  dans l'équation de la trajectoire projetée  $F_1NE_2$  qui est, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{B_0 \xi}{\delta} + \sum_1^{\infty} B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi \\ &= \frac{B_0 \pi}{4\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n B_n \coth 2n\delta = \varphi_1. \end{aligned} \quad (82)$$

La dispersion des points d'arrivée se mesurera par le rapport

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0},$$

où  $l_0$  a la valeur (33).

Pour construire la courbe (82) entre  $\xi$  et  $\eta$ , il semble nécessaire de construire le réseau des courbes représentant  $\varphi$  en fonction de  $\xi$  pour diverses valeurs de  $\eta$  et d'en déduire les valeurs de  $\xi$  qui donnent à  $\varphi$  la valeur  $\varphi_1$  pour chacune de ces valeurs de  $\eta$ . Ces valeurs de  $\xi$  portées dans (81) permettent de construire la courbe représentant  $\frac{v_1}{\partial U}$  en fonction

de  $\eta$  et d'opérer l'intégration graphique pour avoir  $l_1$  par la formule (80).