



HAL
open science

Définition cinématique des oscillations de relaxation

Jean Abele

► **To cite this version:**

Jean Abele. Définition cinématique des oscillations de relaxation. Journal de Physique et le Radium, 1945, 6 (4), pp.96-103. <10.1051/jphysrad:019450060409601>. <jpa-00233912>

HAL Id: jpa-00233912

<https://hal.science/jpa-00233912v1>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

DÉFINITION CINÉMATIQUE DES OSCILLATIONS DE RELAXATION

Par JEAN ABELÉ.

Sommaire. — L'auteur propose une définition cinématique des oscillations de relaxation conduisant au système suivant d'équations paramétriques

$$z = \cos \theta - f(\sin \theta), \quad \omega t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-\sin \theta}{\frac{dz}{d\theta}} d\theta,$$

f désignant une fonction arbitraire assujettie à vérifier certaines conditions énoncées au cours de l'article.

Il justifie cette définition en montrant :

- 1° Qu'elle généralise la définition de l'oscillation sinusoïdale comme projection du mouvement circulaire;
- 2° Que les équations qui en résultent permettent, en adoptant pour f une fonction contenant un coefficient arbitraire, d'obtenir des oscillations évoluant, suivant la valeur de ce coefficient, de la forme sinusoïdale aux formes les plus caractéristiques des oscillations de relaxation;
- 3° Que ces équations conduisent à des équations différentielles analogues à celle de Van der Pol, plusieurs propriétés dynamiques des oscillations de relaxation apparaissant dès lors comme des conséquences de leurs propriétés cinématiques.

Introduction. — Depuis les travaux de Van der Pol, l'attention des physiciens s'est portée avec un intérêt croissant sur les phénomènes périodiques auxquels cet auteur a donné le nom d'oscillations de relaxation.

Ces phénomènes périodiques sont caractérisés par une dissymétrie entre les phases de croissance et de décroissance de la variable oscillatoire, la croissance étant lente et la décroissance rapide, ou réciproquement, et par le fait que le passage de la phase de croissance à la phase de décroissance a lieu lorsque la variable oscillatoire atteint une valeur déterminée, qui constitue dès lors son maximum et définit l'amplitude de l'oscillation.

C'est ainsi que varient, par exemple, le niveau de l'eau dans un vase de tantale alimenté par un mince filet liquide et la tension électrique d'un

condensateur chargé à travers une résistance élevée et déchargé par une lampe au néon.

Une pareille forme d'oscillation suppose la variation à tout instant de l'énergie totale de l'oscillateur. Celui-ci ne constitue pas un système clos, mais un système ouvert sur l'extérieur, ce qui entraîne une dépendance de la vitesse de croissance ou de décroissance, et par suite de la période, vis-à-vis des grandeurs caractéristiques du milieu où l'oscillateur puise et restitue son énergie.

Ainsi l'amplitude des oscillations de relaxation est bien déterminée et constante, tandis que leur période est plus ou moins arbitraire et sujette à variations. On sait que l'inverse est vrai pour les oscillations sinusoïdales conservatrices d'énergie.

Malgré les caractères opposés de ces deux formes d'oscillations, il est possible d'insérer entre les types

extrêmes d'oscillateurs qui sont, d'une part, l'oscillateur rigoureusement sinusoïdal, d'autre part l'oscillateur à passage discontinu de la phase de croissance à la phase de décroissance, toute une série de types intermédiaires qui les relient. Le grand mérite de Van der Pol a été de montrer qu'une même équation différentielle contenant un paramètre variable peut rendre compte du fonctionnement de tous ces oscillateurs.

Rappelons, en la généralisant quelque peu, la forme de cette équation

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} - \varepsilon[1 - \varphi_1(z)] \frac{dz}{d(\omega t)} + \psi_1(z) = 0, \quad (1)$$

z et (ωt) sont des variables sans dimensions, ou variables réduites;

ε est un coefficient positif, lui aussi sans dimension; $\varphi_1(z)$ est une fonction paire, comprise entre zéro et l'unité pour les faibles valeurs du module de z , et croissant rapidement avec ce module lorsqu'elle est supérieure à l'unité;

$\psi_1(z)$ est une fonction croissante de z , contenant le paramètre ε de telle façon qu'elle tende vers z quand ε tend vers zéro.

En posant pour simplifier $\varphi_1(z) = z^2$, $\psi_1(z) = z$, $\omega = 1$, on obtient l'équation suivante

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \varepsilon(1 - z^2) \frac{dz}{dt} + z = 0$$

qui est la forme originale et devenue classique de l'équation de Van der Pol. Nous désignerons l'équation (1) sous le nom d'équation généralisée de Van der Pol.

Bien avant les travaux de Van der Pol, Lord Rayleigh avait étudié une équation différentielle non linéaire semblable, que nous écrirons d'une façon analogue à (1)

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} - \varepsilon \left\{ 1 - \varphi_2 \left[\frac{dz}{d(\omega t)} \right] \right\} \frac{dz}{d(\omega t)} + \psi_2(z) = 0 \quad (2)$$

et que nous désignerons sous le nom d'équation généralisée de Lord Rayleigh. Une fonction de $\frac{dz}{d(\omega t)}$ remplace la fonction de z présente dans le coefficient du second terme de (1) et est soumise aux mêmes conditions.

Même sous sa forme simplifiée, la discussion de l'équation de Van der Pol exige des calculs d'approximation assez longs et des intégrations graphiques pénibles dont les résultats, bien que très intéressants, sont limités. Si l'on en cherche la raison, on est tenté de répondre qu'elle se trouve dans le caractère non linéaire de l'équation, dont la solution est une fonction transcendante.

Cette réponse, en partie exacte, est en partie inexacte, car la fonction sinusoïdale est, elle aussi, une transcendante. Mais cette transcendante nous est familière et nous disposons, pour la définir, de multiples ressources autres que l'équation différen-

tielle du second ordre à coefficients constants. Elle s'introduit en particulier en mécanique comme projection du mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire par une définition purement cinématique.

L'absence d'une semblable définition des oscillations de relaxation nous paraît être la principale lacune de nos connaissances en leur domaine. Le but du présent travail est de la combler.

Nous montrerons, dans une première partie, que la projection sur un axe fixe parallèlement à un axe mobile d'un mouvement circulaire non uniforme convenablement choisi, permet d'engendrer des oscillations possédant les propriétés ci-dessus décrites comme caractéristiques des oscillations de relaxation, et nous déduirons de ce mode de projection des formules générales qui en donnent une expression analytique.

Au cours de la seconde partie, nous construirons, dans un cas particulier choisi comme exemple, les courbes correspondant aux différentes valeurs d'un paramètre variable, et nous donnerons la formule permettant de calculer les fréquences ainsi que la courbe correspondant à cette formule.

Nous passerons, dans une troisième partie, de la cinématique à la dynamique en formant, dans le même cas particulier, l'équation différentielle du second ordre, et nous vérifierons qu'elle se ramène, soit à l'équation généralisée de Van der Pol, soit à l'équation généralisée de Lord Rayleigh.

I. Génération cinématique des oscillations de relaxation par projection sur un axe fixe, parallèlement à un axe mobile, d'un mouvement circulaire non uniforme.

1. Conventions relatives au mode de projection. — Considérons, comme pour la définition des fonctions trigonométriques, un vecteur unitaire OM décrivant l'angle θ à partir de OZ dans le sens indiqué par la flèche (fig. 1). Sa projection Om = z sur le diamètre ZZ' du cercle engendré par M définit une variable réduite égale au quotient par une amplitude A de la variable non réduite qui lui correspond. Cette dernière sera désignée par le produit (Az).

L'axe YY', parallèlement auquel est effectuée la projection, peut osciller autour de O. L'angle β qu'il forme avec ZZ' est donc variable, ainsi que son complément α .

Les coordonnées z et y sont données par les formules

$$z = \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} = \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\cos \alpha}, \quad y = \frac{\sin \theta}{\sin \beta} = \frac{\sin \theta}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

Il suffit d'adjoindre à l'expression donnant z une relation entre un des angles α ou β et θ pour que z soit complètement déterminé en fonction de θ .

L'oscillation de l'axe YY' peut être apériodique ou périodique et, si elle est périodique, elle peut être asynchrone ou synchrone de la rotation du vecteur OM ; nous avons utilisé ailleurs ⁽¹⁾ la première de ces trois hypothèses, nous n'envisagerons ici que la dernière.

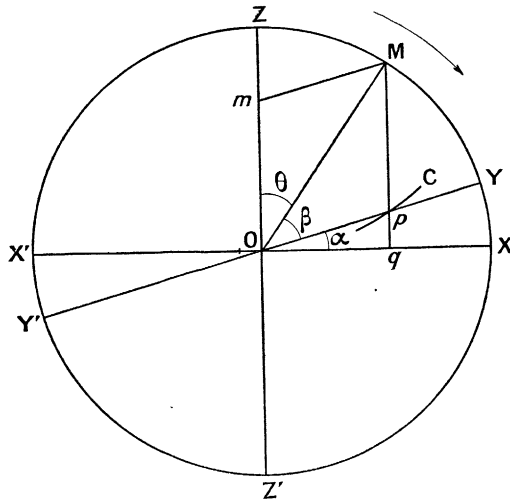


Fig. 1. — La lettre β désigne l'angle \widehat{ZOY} , et non MOY .

2. Génératrice d'une oscillation de relaxation.

— Lorsque les deux mouvements sont synchrones, il est avantageux de déterminer z en fonction de θ par une relation entre le vecteur $Op = y$ et un des angles α ou β . Cette relation est l'équation en coordonnées polaires de la courbe C décrite par le point p , projection de M sur l'axe oscillant.

Si de l'équation de C en coordonnées polaires nous passons à son équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires dans le système d'axes (OX, OZ) et si nous désignons par $f(x)$ l'ordonnée qp , la figure 1 montre que la courbe C jouit d'une propriété remarquable. On a en effet

$$z = pM = qM - f(x),$$

or

$$qM = \cos \theta, \quad x = \sin \theta,$$

d'où

$$z = \cos \theta - f(\sin \theta). \quad (4)$$

Construisons dans un système d'axes rectangulaires (O, θ, z) la courbe d'équation (4) et la sinusoïde $z = \cos \theta$ que nous appellerons *sinusoïde de référence* (fig. 2). La fonction $f(\sin \theta)$ est égale à la différence des ordonnées de ces deux courbes

⁽¹⁾ Thèse, Paris, 1943 et *Annales françaises de Chronométrie*, 1942, fasc. 3-4; 1^{re} Partie, Chapitre V. L'objet de cette thèse est de démontrer la possibilité de réaliser, en théorie et en pratique, un oscillateur à la fois non linéaire et rigoureusement sinusoïdal, susceptible en conséquence de concilier la stabilité de l'amplitude et la stabilité de la fréquence.

(indiquée avec son sens par des flèches). Elle mesure la transformation subie par le mouvement projeté de M , du fait de l'oscillation de l'axe parallèlement auquel a lieu la projection.

À la courbe C , définie par la fonction $f(x)$ qui représente son ordonnée dans le système d'axes (OX, OZ) , nous donnons le nom de *génératrice* de l'oscillation de relaxation.

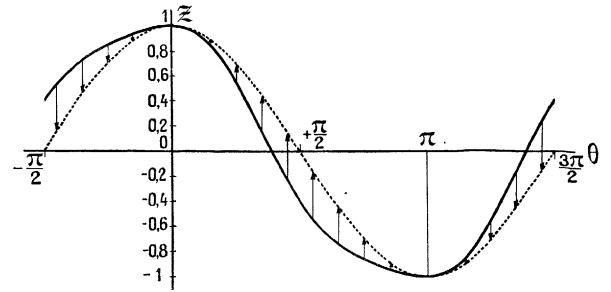


Fig. 2. — En trait interrompu : courbe d'équation $z = \cos \theta$. En trait continu : courbe d'équation $z = \cos \theta - f(\sin \theta)$.

3. Conditions imposées à la génératrice.

— Déterminons les conditions à imposer à la génératrice en vue d'obtenir des oscillations douées des propriétés essentielles des oscillations de relaxation.

La *première* de ces conditions est que la fonction $f(x)$ et ses deux premières dérivées s'annulent en même temps que x , en sorte que la génératrice passe par l'origine et y ait un point d'inflexion à tangente horizontale. En vertu de cette condition, les maxima et minima de la courbe d'équation (4) sont égaux à ceux de la sinusoïde de référence et ont lieu pour les mêmes valeurs de θ . De plus, les deux courbes se traversent à chaque maximum et minimum (cf. fig. 2), en sorte que, si l'oscillation de relaxation croît plus lentement que la sinusoïde immédiatement avant un maximum, elle décroît plus rapidement immédiatement après, et réciproquement.

Ainsi sont sauvegardées l'*invariance de l'amplitude* et la *dissymétrie de croissance*, propriétés que nous regardons comme caractéristiques des phénomènes de relaxation.

La *seconde* condition concerne l'évolution de la génératrice de part et d'autre de l'origine et en restreint le domaine à l'espace limité par deux demi-cercles tracés de Z et Z' comme centres avec l'unité comme rayon et tangents en O (fig. 3).

En vertu de cette condition le module de z ne peut être supérieur à l'unité et les maxima et minima relatifs atteints pour $\theta = k\pi$ sont aussi des maxima et minima *absolus*.

De plus, la partie de la génératrice effectivement parcourue par la projection de M sur l'axe mobile est limitée par deux droites parallèles à ZZ' passant par X et X' , en sorte que les points où la génératrice

coupe ces droites sont, pour le point mobile p , des points de rebroussement.

Nous imposerons enfin, mais uniquement en vue de simplifier notre étude, une *troisième* condition à la génératrice, en exigeant qu'elle admette l'origine comme centre de symétrie. Il y a alors dans le plan (z, θ) symétrie par rapport à l'axe des θ des deux moitiés, positive et négative, de la courbe représentative de l'oscillation si on les déphase d'une demi-période (cf. *fig. 2*).

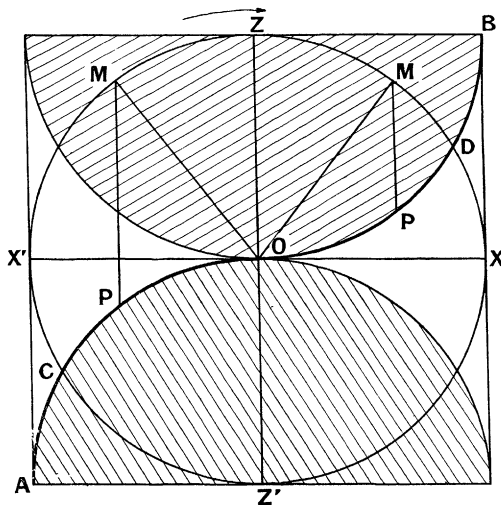


Fig. 3.

Une conséquence de cette symétrie est que la période de l'oscillation de l'axe est égale à la moitié de la période de rotation du vecteur OM.

4. Loi de mouvement du vecteur tournant. —

Soit ω la vitesse angulaire constante du vecteur OM lorsque, α restant constamment nul, la projection de M sur ZZ' se meut d'un mouvement sinusoïdal. Nous adopterons le produit (ωt) comme variable temporelle *réduite*. On a alors

$$\frac{d\theta}{d(\omega t)} = 1 \quad \text{et} \quad (\omega t) = \theta - \theta_0. \quad (5)$$

Recherchons la loi de mouvement qu'il convient d'adopter lorsque l'axe YY' est animé d'un mouvement oscillatoire synchrone du mouvement de rotation.

Une question préalable se pose. Nous avons vu que l'oscillation de l'axe YY' transformait, moyennant quelques conditions simples imposées à la génératrice, la sinusoïde de référence en courbes présentant les caractères des oscillations de relaxation. Puisque le mouvement uniforme défini par les équations (5) conserve la forme de ces courbes lorsqu'on passe de la variable θ à la variable (ωt) ,

il peut sembler inutile d'introduire entre ces variables une relation non linéaire. Deux raisons cependant concourent à rendre cette introduction nécessaire.

La *première* raison est tirée du caractère de *variabilité de la période* que nous avons signalé dans notre description initiale des oscillations de relaxation. Les facteurs concrets responsables de cette variabilité sont représentés mathématiquement par les paramètres qui figurent dans la fonction $f(x)$. La loi de mouvement du vecteur tournant doit donc dépendre de cette fonction.

La *seconde* raison est tirée de l'impuissance du système de projection par axe oscillant à rendre compte, à lui seul, des *formes extrêmes* que peuvent revêtir les oscillations de relaxation.

Pour démontrer cette impuissance, donnons à la génératrice la limite des formes qu'elle peut recevoir en la constituant par les deux quarts de cercle ACO et ODB et étudions les variations de l'élongation lorsque l'extrémité M du vecteur tournant décrit à vitesse constante l'arc de cercle X'ZD (*fig. 3*). L'élongation étant égale au segment PM mené parallèlement à OZ de la génératrice au cercle, on voit qu'elle reste constamment égale à l'unité pendant que M décrit l'arc X'Z et qu'elle décroît de l'unité à zéro pendant que M décrit l'arc ZD. Tandis que la croissance infiniment ralentie qui précède le passage de M par Z donne bien la limite du ralentissement que l'on observe sur les parties à faible pente des courbes obtenues par Van der Pol, la vitesse de décroissance qui suit le maximum, loin d'être une limite supérieure, est inférieure à celle des parties à forte pente de ces mêmes courbes et l'on ne comprend pas qu'une discontinuité puisse séparer ces deux phases de l'oscillation.

Ces caractères ne peuvent être obtenus que par une variation de la vitesse angulaire du vecteur tournant. Cette vitesse doit passer, plus ou moins rapidement, d'une valeur inférieure à l'unité à une valeur supérieure lorsque M passe par Z dans le sens indiqué sur les figures 1 et 3.

L'hypothèse la plus simple permettant d'obtenir ce résultat consiste à donner à la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{d(\omega t)}$ la valeur que possède le *rapport de la pente de l'oscillation de relaxation à la pente de la sinusoïde de référence* dans le système de référence (O, z, θ) de la figure 2.

Nous poserons donc

$$\frac{d\theta}{d(\omega t)} = \frac{dz}{-d\theta} \sin \theta, \quad (6)$$

d'où

$$d(\omega t) = \frac{-\sin \theta}{\frac{dz}{d\theta}} d\theta. \quad (6bis)$$

Cette convention recevra sa pleine justification de l'étude des cas particuliers.

5. Équations paramétriques générales des oscillations de relaxation. — L'adjonction à l'équation (4) de l'intégrale de l'équation (6 bis) constitue un système d'équations paramétriques reliant l'élongation z à la variable temporelle réduite ωt

$$z = \cos \theta - f(\sin \theta), \tag{4}$$

$$(\omega t) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-\sin \theta}{\frac{dz}{d\theta}} d\theta. \tag{7}$$

Ces équations résultent de la définition cinématique que nous avons donnée des oscillations de relaxation. Mais on pourrait les poser *a priori*, dans l'esprit de la méthode axiomatique, avec les conditions précédemment énoncées pour la fonction arbitraire qui y figure, conditions auxquelles il faut ajouter celle d'après laquelle l'intégrale du second membre de (7) prise entre 0 et 2π doit toujours être positive et finie. On aurait ainsi une *définition analytique formelle* des oscillations de relaxation; les considérations qui précèdent n'en donneraient qu'une *représentation*. Au lecteur de choisir le point de vue qu'il préfère (2).

Nous allons appliquer les équations (4)-(7) à un cas particulier, en étudiant successivement quelques propriétés cinématiques et dynamiques de la famille d'oscillations obtenue en adoptant pour la génératrice l'équation la plus simple satisfaisant aux conditions imposées.

II. Propriétés cinématiques de la famille d'oscillations définie par la génératrice d'équation $f(x) = ax^3$.

1. Équations paramétriques. — La fonction $f(x)$ la plus simple qui s'annule ainsi que ses deux premières dérivées en même temps que x et qui soit symétrique par rapport à l'origine est ax^3 . Les autres conditions pourront être satisfaites en limitant le domaine des valeurs du module de a .

Les équations (4) et (7) deviennent alors

$$z = \cos \theta - a \sin^3 \theta, \tag{8}$$

$$(\omega t) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{1 + 3a \sin \theta \cos \theta}. \tag{9}$$

(2) Il se trouvera peut-être des lecteurs qui estimeront arbitraire le choix des propriétés (constance de l'amplitude, variabilité de la période, dissymétrie de croissance et de décroissance) par lesquelles nous avons caractérisé les oscillations de relaxation; choix qui est au point de départ de notre construction cinématique. Nous les invitons à lire dans les *Principes fondamentaux de physique théorique* de J. L. DESTOUCHES, t. I, Chap. V, les observations de cet auteur sur la nécessité préalable à toute axiomatique d'une *Synthèse inductive* (cf. en particulier les paragraphes 10 et 11). Nous avouons ensuite sans aucune gêne que nous ne prétendons point convaincre le lecteur, mais que nous espérons entraîner son adhésion en lui permettant de saisir intuitivement l'idée générale qui nous a guidé.

L'équation (9) s'intègre sans difficulté et donne

$$(\omega t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{4}a^2}} \left[\begin{aligned} & \arctg \frac{\operatorname{tg} \theta + \frac{3}{2}a}{\sqrt{1 - \frac{9}{4}a^2}} \\ & - \arctg \frac{\operatorname{tg} \theta_0 + \frac{3}{2}a}{\sqrt{1 - \frac{9}{4}a^2}} \end{aligned} \right]. \tag{10}$$

En faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ et en doublant le résultat du calcul, on obtient la période (ωT)

$$(\omega T) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{9}{4}a^2}}. \tag{11}$$

2. Variation de fréquence en fonction du coefficient a . — La période donnée par la relation (11) varie de 2π à $+\infty$ lorsque $|a|$ varie de 0 à $2/3$. Mais il est plus simple et plus intéressant d'étudier les variations de la fréquence définie par

$$F = \frac{1}{(\omega T)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{9}{4}a^2}. \tag{12}$$

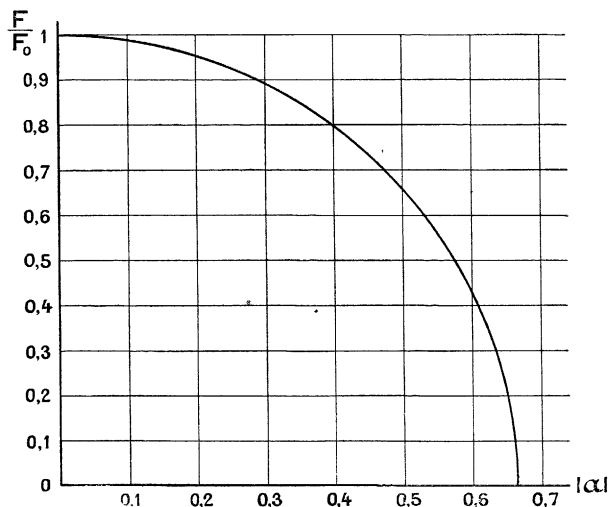


Fig. 4.

Désignons par F_0 la fréquence correspondant à $a = 0$. Si nous portons en ordonnée, avec une échelle graduée de 0 à 1, les fréquences relatives $\frac{F}{F_0}$ et si nous portons en abscisses $|a|$ avec une échelle dilatée par rapport à la précédente, le coefficient de multiplication des intervalles étant $3/2$, la courbe donnant la variation des fréquences est un quart de cercle de centre O (fig. 4).

3. Variation de forme des courbes en fonction du coefficient a . — Pour comparer les courbes

obtenues en donnant différentes valeurs au coefficient a , il est intéressant de changer l'échelle des abscisses de façon à rendre les périodes identiques. Il suffit pour cela de substituer à la variable (ωt) le rapport $\frac{t}{T}$ dont l'expression s'obtient en divisant membre à membre les équations (10) et (11)

$$\frac{t}{T} = \frac{(\omega t)}{(\omega T)} = \frac{1}{2\pi} \left[\begin{aligned} & \text{arc tg} \frac{\text{tg} \theta + \frac{3}{2} a}{\sqrt{1 - \frac{9}{4} a^2}} \\ & - \text{arc tg} \frac{\text{tg} \theta_0 + \frac{3}{2} a}{\sqrt{1 - \frac{9}{4} a^2}} \end{aligned} \right]. \quad (13)$$

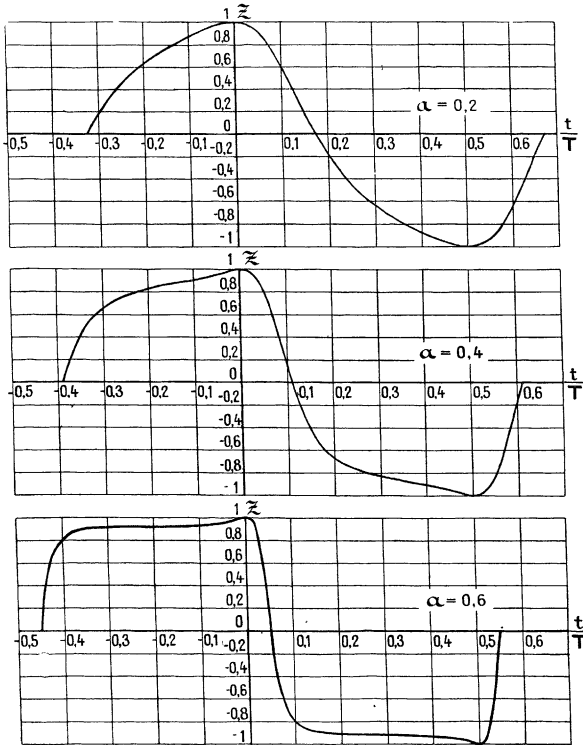


Fig. 5.

Nous poserons $\theta_0 = 0$, ce qui revient à prendre pour origine l'abscisse du maximum de z . Il suffit alors de faire varier θ de 0 à π pour obtenir la moitié de la courbe, l'équation (13) donnant les abscisses et l'équation (8) les ordonnées. L'autre moitié s'obtient par glissement et retournement.

Les trois courbes de la figure 5 ont été obtenues en donnant à a les valeurs $+0,2$, $+0,4$, $+0,6$. En adoptant les valeurs négatives correspondantes on obtiendrait des courbes symétriques des précédentes par rapport à Oz .

L'analogie de ces courbes avec celles qu'a obtenues Van der Pol est frappante.

III. Propriétés dynamiques de la famille d'oscillations définie par la génératrice d'équation $f(x) = ax^3$.

1. Expressions générales de la vitesse et de l'accélération. — De l'équation (6) qui détermine la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{d(\omega t)}$ du vecteur tournant OM on déduit

$$\frac{dz}{d(\omega t)} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{d(\omega t)} = \frac{dz}{d\theta} \frac{1}{-\sin \theta} = \frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}{-\sin \theta}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}{-\sin \theta} \right] \frac{d\theta}{d(\omega t)} = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}{-\sin \theta} \right] \frac{1}{-\sin \theta}. \quad (15)$$

2. Formation de l'équation différentielle du deuxième ordre admettant (8)-(9) comme solution périodique. — Nous allons appliquer les formules générales (14) et (15) à l'équation (8) : $z = \cos \theta - a \sin^3 \theta$ et nous montrerons que la relation entre z , $\frac{dz}{d(\omega t)}$ et $\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2}$ peut être mise, suivant le signe de a , sous la forme, soit de l'équation généralisée de Van der Pol, soit de l'équation généralisée de Lord Rayleigh

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d(\omega t)} &= \frac{d}{d(\omega t)} (\cos \theta - a \sin^3 \theta) \\ &= -\sin \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} &= - \left[\cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. - 6a \sin \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] \\ &= - \left[\cos \theta + 9a \sin \theta \cos^2 \theta - 6a \sin^3 \theta \right] \\ &\quad \times (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= -3a(2 \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta) [-\sin \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2] \\ &\quad - \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

L'équation différentielle cherchée est donc, θ pouvant être considéré comme une fonction, soit de z , soit de $\frac{dz}{d(\omega t)}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} + 3a(2 \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta) \frac{dz}{d(\omega t)} \\ + \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Supposons d'abord $a < 0$, nous écrivons (17) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} + 6a \left(1 - \frac{5}{2} \cos^2 \theta \right) \frac{dz}{d(\omega t)} \\ + \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 = 0. \end{aligned} \quad (17bis)$$

Il suffit alors de poser

$$6a = -\varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \quad (18)$$

$$\frac{5}{2} \cos^2 \theta = \zeta_1(z), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 \\ = \cos \theta \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta \cos \theta \right)^2 = \psi_1(z) \end{aligned} \quad (20)$$

pour que l'équation (17 bis) se ramène à l'équation généralisée de Van der Pol :

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} - \varepsilon [1 - \varphi_1(z)] \frac{dz}{d(\omega t)} + \psi_1(z) = 0. \quad (1)$$

Supposons maintenant $a > 0$, nous écrivons (17) sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} - 9a \left(1 - \frac{5}{3} \sin^2 \theta\right) \frac{dz}{d(\omega t)} + \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 = 0. \quad (17^{ter})$$

Il suffit alors de poser

$$9a = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \quad (21)$$

$$\frac{5}{3} \sin^2 \theta = \varphi_2 \left[\frac{dz}{d(\omega t)} \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \cos \theta (1 + 3a \sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= \cos \theta \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \sin \theta \cos \theta\right)^2 = \psi_2(z) \end{aligned} \quad (23)$$

pour que l'équation (17 ter) se ramène à l'équation généralisée de Lord Rayleigh :

$$\frac{d^2 z}{d(\omega t)^2} - \varepsilon \left\{ 1 - \varphi_2 \left[\frac{dz}{d(\omega t)} \right] \right\} \frac{dz}{d(\omega t)} + \psi_2(z) = 0. \quad (2)$$

3. Variation des fonctions $\varphi_1(z)$ et $\psi_1(z)$. — En associant l'équation (8) aux équations (19) et (20)

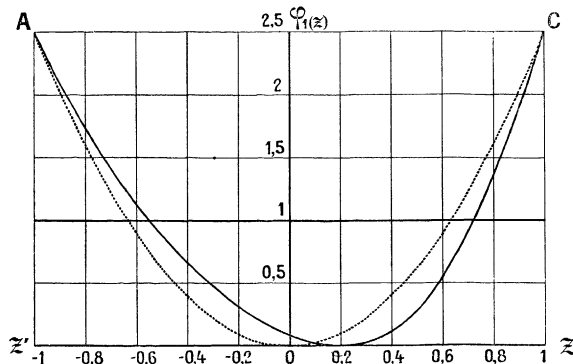


Fig. 6.

nous obtenons un système d'équations paramétriques qui permet de construire les courbes représentant les variations des fonctions $\varphi_1(z)$ et $\psi_1(z)$.

$$z = \cos \theta - a \sin^3 \theta, \quad (8)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{5}{2} \cos^2 \theta, \quad (19)$$

$$\psi_1(z) = \cos \theta (1 + 3a \sin z \cos \theta)^2. \quad (20)$$

La même méthode permettrait d'étudier les fonctions $\varphi_2 \left[\frac{dz}{d(\omega t)} \right]$ et $\psi_2(z)$ à l'aide des équations (8), (16), (22) et (23).

La figure 6 donne deux courbes représentant la

variation de $\varphi_1(z)$: 1° pour $a = 0$ (en trait interrompu), 2° pour $a = -0,2$ (en trait continu). La première est une parabole à axe vertical dirigé vers le haut, dont le sommet est à l'origine des coordonnées. Elle est identique, à une constante près, à la parabole représentant la fonction z^2 qui figure dans le coefficient du second terme de l'équation simplifiée de Van der Pol. La seconde courbe résulte d'une déformation de la première, les extrémités A et C restant fixes et le sommet subissant le long de l'axe des z une translation égale à $-a$.

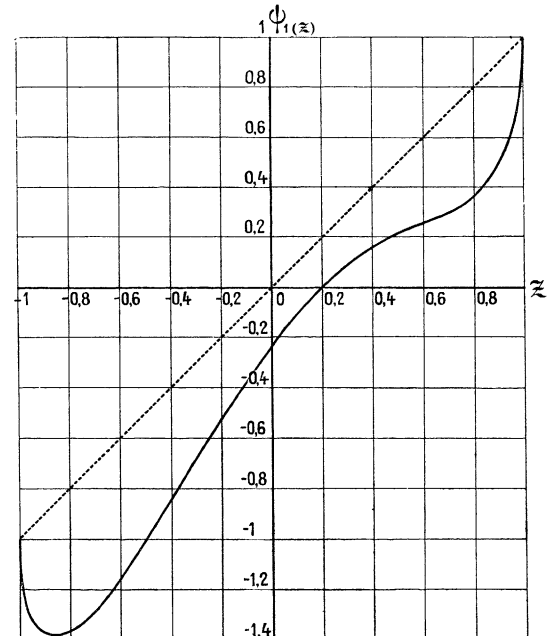


Fig. 7.

Cette déformation ne modifie pas essentiellement le mécanisme de l'amorçage des oscillations et de la limitation de leur amplitude. Pour les faibles valeurs de $|z|$, $\varphi_1(z)$ reste inférieur à l'unité et l'amortissement est négatif, ce qui provoque l'amorçage des oscillations. Pour les valeurs élevées de z , $\varphi_1(z)$ est supérieur à l'unité et croît rapidement, l'amortissement est alors positif et rapidement croissant; de là résultent la limitation de l'amplitude et l'existence d'un régime permanent.

Remarquons que, du fait même de notre définition des oscillations de relaxation, l'amplitude du régime permanent est rigoureusement constante, alors qu'elle est légèrement variable dans l'oscillateur régi par l'équation simplifiée de Van der Pol lorsque l'on fait varier ε .

La figure 7 donne de même deux courbes représentant la variation de $\psi_1(z)$: 1° pour $a = 0$ (en trait interrompu), 2° pour $a = -0,2$ (en trait continu). La première est une droite passant par l'origine

et bissectant l'angle des axes de coordonnées, elle est identique à la droite représentative de la fonction z qui figure dans le troisième terme de l'équation simplifiée de Van der Pol. La seconde peut être considérée comme une déformation de la première, la partie médiane subissant, avec une légère ondulation, une translation vers le bas et les parties extrêmes étant fortement incurvées. Cette déformation appelle deux remarques.

1° On sait que dans le cas de l'équation linéaire à coefficients constants le facteur d'amortissement, s'il est faible, influe peu sur la période qui est surtout déterminée par le coefficient du troisième terme. De même, dans le cas de l'équation *non linéaire*, le troisième terme joue un rôle plus important que le second dans la détermination de la période. Dans l'équation simplifiée de Van der Pol, qui respecte la linéarité du troisième terme, la période varie peu pour les faibles valeurs de ε et elle ne tend vers l'infini que lorsque ε tend lui-même vers l'infini. Dans l'équation généralisée (17 bis) la non-linéarité du troisième terme entraîne une variation beaucoup plus rapide de la période en fonction de ε et celle-ci tend vers l'infini quand ε tend vers 4.

2° L'altération progressive du troisième terme pour des valeurs croissantes de ε suit normalement celle du second terme dans l'équation de tout oscillateur concret entretenu par l'introduction d'une *résistance négative*. Une semblable résistance n'est en effet presque jamais une résistance *pure*, c'est-à-dire que la force d'entretien *n'est presque jamais rigoureusement en phase avec la vitesse*.

Elle se comporte comme la somme de deux composantes, l'une en phase et l'autre en quadrature avec la vitesse. La première rend non linéaire le second terme de l'équation et la seconde rend non linéaire le troisième terme.

La composante en quadrature peut être diminuée ou partiellement compensée par divers procédés, elle n'est jamais complètement négligeable; elle l'est d'autant moins que la valeur moyenne de la force d'entretien est plus élevée, c'est-à-dire que ε va en croissant. Ainsi l'équation que nous avons proposée dans l'introduction sous le nom d'équation *généralisée* de Van der Pol et qui se distingue de l'équation simplifiée du même auteur par la substi-

tution de la fonction $\psi_1(z)$ à z , est-elle plus proche des conditions réelles d'entretien. Il est d'autant plus intéressant de constater que c'est à une semblable équation que conduit, dans le cas particulier étudié ci-dessus, la définition des oscillations de relaxation que nous proposons.

Conclusions. — Bien que nous n'ayons étudié dans la II^e et la III^e Partie de ce travail qu'un cas particulier et que notre intention soit de généraliser cette étude avant de formuler des conclusions d'ensemble, nous croyons cependant que les résultats déjà obtenus jettent un jour nouveau sur la méthode avec laquelle il convient d'aborder l'étude des phénomènes de relaxation.

S'il s'agit de phénomènes concrets, tels que les battements du cœur, l'évolution statistique de certaines espèces biologiques, etc., les équations auxquelles nous avons abouti permettront de rechercher la forme de génératrice qui leur correspond, et l'exemple étudié ci-dessus nous autorise à penser que des génératrices relativement simples aideront à représenter, à comparer et à classer ces phénomènes.

S'il s'agit d'étudier les propriétés théoriques des oscillateurs entretenus, la création d'une cinématique des oscillations de relaxation permettra de classer ces propriétés en deux catégories : celles qui proviennent de la *non-sinusoidalité* des intégrales et qu'il nous apparaît désormais possible de déduire directement du système d'équations que nous proposons, et celles qui proviennent de la *non-linéarité* des équations différentielles et qui exigeront toujours une étude de ces équations (c'est le cas par exemple de la synchronisation et de la démultiplication de fréquence) (3). Mais même pour l'étude de ces dernières, une cinématique des oscillations de relaxation sera utile et permettra en particulier de mieux comprendre le mode de formation des équations différentielles.

(3) Le fondement de la distinction de ces deux catégories de propriétés repose sur l'existence d'équations non linéaires admettant une solution de régime permanent parfaitement sinusoidale, les oscillateurs régis par ces équations étant susceptibles d'être synchronisés et démultipliés. Cf. Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*, Chap. XV, Paris, Masson, 1943 et notre thèse déjà citée.