



**HAL**  
open science

## Les écoulements linéaires des gaz parfaits

Jean Villey

► **To cite this version:**

Jean Villey. Les écoulements linéaires des gaz parfaits. Journal de Physique et le Radium, 1942, 3 (4), pp.79-80. <10.1051/jphysrad:019420030407901>. <jpa-00233803>

**HAL Id: jpa-00233803**

**<https://hal.science/jpa-00233803v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

LES ÉCOULEMENTS LINÉAIRES DES GAZ PARFAITS

Par JEAN VILLEY.

Pour l'étude des écoulements permanents à une dimension [où l'on considère l'état  $(p, v, T)$  et la vitesse  $u$  du gaz comme des fonctions définies d'une seule variable : l'abscisse  $x$  comptée le long de l'axe de la canalisation], l'emploi des dérivées logarithmiques est particulièrement commode.

On a, dans le cas des gaz parfaits, les quatre équations (1)

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \quad (\text{équation d'état}), \quad (1)$$

$$\frac{ds}{s} + \frac{du}{u} = \frac{dv}{v} \quad (\text{équation de continuité}), \quad (2)$$

$$\delta q = d(U + pv) + u du \quad (\text{conserv. de l'énergie}), \quad (3)$$

$$u du = -v dp - \delta w \quad (\text{décoordination}). \quad (4)$$

(1) Où  $ds = s'(x) dx$  représente la variation de section sur le parcours  $dx$ , et où  $\delta q = q(x) dx$  et  $\delta w = w(x) dx$  représentent les quantités d'énergie thermique acquises par l'unité de masse du gaz, sur le même parcours  $dx$ , par apport de chaleur et par décoordination d'énergie mécanique.

En utilisant  $U + pv = CT$ , et en posant

$$\gamma = \frac{C}{c} \quad \text{et} \quad k = \frac{u^2}{2b^2} = \frac{u^2}{\gamma RT},$$

on en tire facilement

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1-k} \frac{ds}{s} + k \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta q}{u^2} + k \frac{\gamma}{1-k} \frac{\delta w}{u^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{1-k} \frac{ds}{s} + k \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta q}{u^2} + k \frac{\gamma}{1-k} \frac{\delta w}{u^2}, \quad (6)$$

$$\frac{dT}{T} = k \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{ds}{s} + k \frac{\gamma-1}{1-k} (1-k\gamma) \frac{\delta q}{u^2} - k^2 \gamma \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta w}{u^2}, \quad (7)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{k\gamma}{1-k} \frac{ds}{s} - k^2 \gamma \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta q}{u^2} - k \gamma \frac{1+k(\gamma-1)}{1-k} \frac{\delta w}{u^2}. \quad (8)$$

Ces expressions permettent de retrouver immédiatement quantité de résultats importants et utiles.

1. On observe que le coefficient de  $\delta q$  dans l'expression de  $dT$  est négatif pour les valeurs de  $k$

comprises entre  $\frac{1}{\gamma}$  et 1 : autrement dit, dans ce domaine de vitesses (ou plus exactement de rapports entre la vitesse et la température), il y a inversion de l'effet thermique d'un apport de chaleur. Si l'on considère un écoulement cylindrique à frottements négligeables ( $ds = \delta w = 0$ ), l'écoulement impose, pour ces vitesses, une évolution à chaleur spécifique négative.

2. On peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\frac{u^2}{1-k} \frac{ds}{s} + k \frac{\gamma-1}{1-k} \delta q + k \frac{\gamma}{1-k} \delta w, \quad (9)$$

où l'on voit que, aux vitesses subsoniques, la décoordination  $\delta w$  (toujours positive) intervient pour provoquer un accroissement de l'énergie cinétique. Cela n'a rien de paradoxal, car, si l'on se reporte à l'équation (4), elle peut avoir, outre son action directe évidemment négative, une action indirecte par l'intermédiaire de  $-vdp$ . On voit effectivement, sur l'équation (8), qu'elle introduit un terme négatif dans le gradient de pression : le travail des pressions dont elle exige ainsi l'intervention l'emporte sur une action directe, du moins aux vitesses subsoniques.

3. Un apport de chaleur ( $\delta q > 0$ ) n'intervient dans la variation d'énergie cinétique qu'indirectement par l'intermédiaire de  $-vdp$ . Cela n'empêche pas toutefois que l'on peut transformer cette chaleur en énergie interne, et celle-ci en énergie cinétique, sans qu'il y ait là rien de paradoxal, car l'écoulement lui-même introduit le facteur d'anisotropie indispensable pour pouvoir espérer cette orientation partielle de l'énergie cinétique moléculaire. Les équations (5) à (8) fournissent tous les éléments nécessaires pour l'étude des profils à donner aux tuyères thermopropulsives dans lesquelles on obtient cette orientation.

4. En faisant  $\delta q = \delta w = 0$ , on obtient les lois des écoulements isentropiques et la théorie élémentaire de la tuyère de Laval. En gardant les termes en  $\frac{\delta w}{u^2}$ , on aura de plus les corrections relatives aux frottements dans le divergent ( $ds > 0$ ).

5. En faisant  $ds = 0$ , on a des formules immédiatement applicables au calcul des canalisations cylindriques, car  $\delta w$  y est connu par les études expérimentales des pertes de charge dans les cana-

lisations. Pour les écoulements turbulents, elles aboutissent à la loi générale

$$\frac{\delta w}{u^2} = \frac{0,1582}{d^{1,25}} \frac{\nu^{0,25}}{u^{0,25}} dx,$$

où  $d$  représente le diamètre du tuyau et  $\nu$  la viscosité cinématique  $\mu.v$  du gaz.

Les équations mêmes indiquent d'ailleurs quelles valeurs il faut donner à  $\delta q$  par rapport à  $\delta w$  pour obtenir des évolutions thermodynamiques déterminées; par exemple :

1° Pour obtenir un écoulement à vitesse (donc aussi densité) constante

$$k \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta q}{u^2} + k \frac{\gamma}{1-k} \frac{\delta w}{u^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta q = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \delta w;$$

2° Pour obtenir un écoulement isotherme

$$k \frac{\gamma-1}{1-k} (1-k\gamma) \frac{\delta q}{u^2} - k^2 \gamma \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta w}{u^2} = 0$$

$$\text{ou} \quad \delta q = k \frac{\gamma}{1-k\gamma} \delta w;$$

3° Pour obtenir un écoulement isobare

$$-k^2 \gamma \frac{\gamma-1}{1-k} \frac{\delta q}{u^2} - k \gamma \frac{1+k(\gamma-1)}{1-k} \frac{\delta w}{u^2}$$

$$\text{ou} \quad \delta q = -\frac{1+k(\gamma-1)}{k(\gamma-1)} \delta w.$$

6. Si l'on fait  $ds = \delta q = 0$ , on retrouve les résultats connus des écoulements cylindriques adiabatiques. La pression et la température varient dans le même sens, qui est opposé à celui de la vitesse (et du volume spécifique). La vitesse va en croissant si elle est subsonique ( $k < 1$ ) et en diminuant si elle est supersonique, puisque  $\delta w$  est toujours positif. Cette condition  $\delta w > 0$  n'est pas autre chose que la condition  $ds > 0$  imposée aux évolutions adiabatiques, puisque la variation d'entropie est ici

$$dS = \frac{dw}{T}.$$

7. Dans tous les cas, les équations (5) à (8) permettent de calculer de proche en proche l'écoulement en fonction des déplacements  $dx$ , si l'on connaît en chaque endroit  $\delta w$  et  $\delta q$ , et si l'on connaît en un point quelconque l'état ( $p_0, T_0; v_0$  est alors déterminé par l'équation d'état) et la vitesse  $u_0$ . Si l'une de ces trois données manque et qu'elle est remplacée par une condition imposée ailleurs, il faudra faire les calculs en lui attribuant diverses valeurs hypothétiques, et déterminer par interpolation celle qui satisfait la condition complémentaire.