



**HAL**  
open science

# Ondes sphériques transversales solides polarisées rectilignement

A. Foix

► **To cite this version:**

A. Foix. Ondes sphériques transversales solides polarisées rectilignement. Journal de Physique et le Radium, 1940, 1 (8), pp.311-316. 10.1051/jphysrad:0194000108031100 . jpa-00233759

**HAL Id: jpa-00233759**

**<https://hal.science/jpa-00233759>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ONDES SPHÉRIQUES TRANSVERSALES SOLIDES POLARISÉES RECTILIGNEMENT

Par A. FOIX.

**Sommaire.** — Dans le cas où ces ondes sont divergentes, leur équation permet de voir très simplement comment l'électromagnétisme et l'optique physique peuvent bien se rapporter à des phénomènes de même nature.

Il y a une différence entre ces ondes solides et ce qu'on appelle ondes sphériques naturelles.

L'équation de ces ondes solides divergentes doit être celle des ondes élémentaires dans l'application du principe d'Huygens-Fresnel, ce qui permet, dès lors, d'étudier théoriquement la diffraction en un point *aussi près* ou *aussi loin* que l'on veut de l'onde, c'est-à-dire de l'écran, sans être en *désaccord* avec la théorie électromagnétique de la lumière.

On démontre qu'il existe des ondes solides sphériques transversales dans lesquelles toute surface sphérique solide ayant l'origine pour centre oscille sans déformation <sup>(1)</sup> autour d'un même axe OZ que nous appellerons *axe de polarisation*. (Il s'agit d'ondes infiniment petites.) On peut dire que de telles ondes sont polarisées rectilignement. Nous étudions ici leur propagation, nos coordonnées sont les coordonnées géographiques, l'axe de polarisation rappelant l'axe du monde.

Ceci posé,  $u$  désignant le déplacement en un point d'une sphère d'onde, nous avons trouvé, à partir des lois de l'élasticité,

$$u = \sin \varepsilon \left[ \frac{1}{r^2} \varphi(Vt - r) + \frac{1}{r} \varphi'(Vt - r) + \frac{1}{r^2} \psi(Vt + r) - \frac{1}{r} \psi'(Vt + r) \right], \quad (1)$$

$t$  étant le temps,  $r$  le rayon de la sphère d'onde et  $\varepsilon$  la colatitude d'un point de cette dernière <sup>(2)</sup>, tandis que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions arbitraires respectivement de  $Vt - r$  et de  $Vt + r$  et que  $\varphi'$  et  $\psi'$  sont leurs dérivées par rapport aux mêmes binômes. Enfin  $V$  est la vitesse de propagation des ondes. Évidemment, le déplacement est tangent au parallèle de son point d'application <sup>(3)</sup>.

D'ailleurs, la formule (1) satisfaisant aux équations de la propagation des ondes électromagnétiques

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \text{div } \vec{u} = 0, \quad (2)$$

<sup>(1)</sup> Comme cela se produit pour les ondes planes.

<sup>(2)</sup> Autrement dit,  $\varepsilon$  est l'angle que fait le rayon, qui passe par ce point de l'onde, avec l'axe de polarisation.

<sup>(3)</sup> Il suffit de le démontrer pour un point de l'équateur, puisque chaque sphère d'onde tourne d'un seul bloc et que, par suite,

$$u_\varepsilon = u_{\text{équateur}} \sin \varepsilon.$$

La déformation se réduit à un cisaillement (c'est-à-dire  $\text{div. } u = 0$ ), car il s'agit d'onde de rotation; le glissement est à l'équateur

$$G = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}.$$

Les surfaces d'onde sont donc soumises à un effort tangentiel  $F = \mu G$ ,  $\mu$  étant le module de cisaillement; le mouvement d'un élément de volume de densité  $\rho$ , compris entre deux sphères d'onde infiniment voisines, conduit alors à une équation différentielle d'où l'on déduit l'expression à laquelle

$u$  peut aussi bien être l'un des deux vecteurs caractérisant ces ondes. Enfin,  $u$  devant toujours être fini, et même nul pour  $r = 0$ , il faut que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  arbitraires soient les mêmes, d'où <sup>(4)</sup>

$$u = \sin \varepsilon \left[ \frac{1}{r^2} \varphi(Vt - r) + \frac{1}{r} \varphi'(Vt - r) - \frac{1}{r^2} \varphi(Vt + r) + \frac{1}{r} \varphi'(Vt + r) \right] \quad (3)$$

exprimant alors la transformation d'une onde convergente en onde divergente après passage par le foyer.

S'il ne s'agit que d'ondes divergentes produites par exemple par une source placée au centre, on a simplement

$$u = \sin \varepsilon \left[ \frac{1}{r^2} \varphi(Vt - r) + \frac{1}{r} \varphi'(Vt - r) \right]. \quad (4)$$

Enfin, s'il s'agit d'ondes à vibrations harmoniques, on a

$$\varphi(Vt) = a \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} Vt + \gamma \right),$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde, tandis que  $a$  et  $\gamma$  sont des constantes. De sorte que les formules (3) et (4) deviennent

$$u = \sin \varepsilon \left\{ \begin{aligned} & \frac{a}{r^2} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r) + \gamma \right] \\ & + \frac{2\pi a}{\lambda r} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r) + \gamma \right] \\ & - \frac{a}{r^2} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + r) + \gamma \right] \\ & + \frac{2\pi a}{\lambda r} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + r) + \gamma \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

se réduit (1) pour un point de l'équateur. Je fis cette théorie en 1896, ignorant celle de KIRSCHOFF (*Mathematische Optik*, 1891, p. 15). Le raisonnement que nous venons de résumer est calqué sur celui que nous avions fait déjà en 1890 pour établir l'équation des ondes dans un fluide parfait, inexactement présentée dans un cours d'acoustique. De là l'identité de l'équation de propagation des ondes sphériques sonores et de celle de  $u_{\text{équateur}}$ .

<sup>(4)</sup> En développant, dans cette expression,

$$\varphi(Vt - r), \quad \varphi'(Vt - r), \quad \varphi(Vt + r) \quad \text{et} \quad \varphi'(Vt + r)$$

par la série de Taylor suivant les puissances de  $r$ , on a

$$u = \sin \varepsilon \left\{ 2 \frac{r}{1.2.3} \varphi'''(Vt) + \dots + (n-1) \frac{r^{(n-2)}}{n!} \varphi^{(n)}(Vt) [1 + (-1)^{(n-1)}] + \dots \right\},$$

$u$  s'annule donc pour  $r = 0$ .

et

$$u = \sin \varepsilon \left\{ \frac{\alpha}{r^2} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r) + \gamma \right] + \frac{2\pi\alpha}{\lambda r} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r) + \gamma \right] \right\}, \quad (6)$$

la formule (5) représentant un système d'ondes stationnaires.

**Passage d'une onde sphérique par le foyer.** — Considérons, sur un même trajet rectiligne AOB, A et B étant de part et d'autre du foyer O.

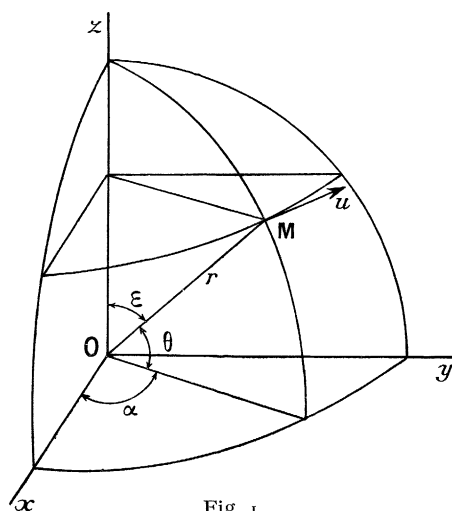


Fig. 1.

1° Une onde convergente harmonique se propageant de A en O, et d'abord en A à une distance  $r$  du centre, très grande vis-à-vis de la longueur d'onde. On a alors, d'après (5), en négligeant le terme en  $\frac{1}{r^2}$ ,

$$u_A = \frac{2\pi\alpha}{\lambda r} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + r) + \gamma \right]. \quad (5')$$

2° L'onde divergente se propageant de O en B qui succède à l'onde convergente précédente. Lorsque cette onde divergente arrive en B à une distance  $r'$  également très grande vis-à-vis de  $\lambda$ , nous avons, pour cette onde,

$$u_B = \frac{2\pi\alpha \sin \varepsilon}{\lambda r'} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r') + \gamma \right] \\ = \frac{2\pi\alpha \sin \varepsilon}{\lambda r'} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [Vt + r - (r + r')] + \gamma \right\}. \quad (5'')$$

Comparons les phases de ces deux ondes à celle d'une onde plane allant de A en B. Les points A et B étant de part et d'autre de O, les sens positifs de  $u_A$  et de  $u_B$  sont opposés, puisqu'ils doivent correspondre à un même sens de rotation. Il en résulte que pour faire la comparaison précédente il faut, dans (5''), changer  $u_B$  en  $-u_B$ . Le passage par

le foyer est donc accompagné d'un changement de signe, c'est-à-dire pour une vibration harmonique, d'une avance de marche d'une demi-longueur d'onde. On arrive donc au même résultat que celui de Gouy dont les formules se déduisent des nôtres en y faisant  $\sin \varepsilon = 1$ , mais qui, de ce fait, ne satisfont pas à la condition (2) de divergence nulle. Gouy a retrouvé expérimentalement cette avance de marche (5), vérifiant ainsi les formules (3) et (5). Voici d'autre part une vérification particulière de la formule (6) :

Appliquons cette formule à des ondes électromagnétiques très près du centre de façon que  $\frac{r}{\lambda}$  soit négligeable, nous retrouvons les formules de l'état stationnaire; celle de Laplace ou celle du potentiel vecteur suivant que la source est un élément de courant

$$i ds = \alpha \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} Vt + \gamma \right)$$

ou un aimant élémentaire de moment

$$M = -\alpha \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} Vt + \gamma \right)$$

parallèles à l'axe de polarisation. On arrive au même résultat pour une distance quelconque en supposant que dans la formule (6) la fréquence devient de plus en plus petite.

Appliquée aux ondes lumineuses où, au contraire,  $\frac{\lambda}{r}$  est négligeable, la formule (6) donne

$$u = \frac{2\pi\alpha \sin \varepsilon}{\lambda r} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r) + \gamma + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (7)$$

Dans cette formule (7) est inscrite la loi photométrique. Mais  $\sin \varepsilon$  paraît en contradiction avec ce fait que, dans les ondes sphériques lumineuses naturelles, l'intensité est constante sur une même sphère d'onde. C'est l'objection que m'avait faite H. Poincaré il y a plus de quarante ans (6).

Elle est illusoire, car cette propriété de la lumière

(6) Il est vrai avec de la lumière naturelle considérée actuellement comme de la lumière polarisée dont l'état de polarisation change constamment. De sorte que  $\sin \varepsilon$  doit être remplacé dans (5') et (5'') par la moyenne quadratique de  $\sin \varepsilon$  quand l'axe de polarisation prend toutes les positions dans

l'espace, c'est-à-dire par  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Ce qui justifie dans une certaine mesure les expressions adoptées par Gouy. En fait, ce qu'on appelle communément lumière naturelle ne constitue pas véritablement des ondes, mais un effet moyen d'une succession de trains d'ondes différemment polarisées. C'est ce que ne remarque pas Gouy. En traitant ces ondes naturelles comme de véritables ondes sur lesquelles l'intensité serait constante, il est en contradiction avec la théorie électromagnétique de la lumière : *L'intensité à la surface d'une onde sphérique à vibrations rectilignes transversales ne peut pas être constante en tous les points de cette onde.*

(6) J'avais communiqué mes calculs à H. Poincaré en mai 1896. Ses deux réponses datent de juillet et août 1896.

naturelle est un effet moyen, l'état de polarisation changeant constamment (Cf. note p. 312). D'ailleurs, la proportionnalité de l'intensité à  $\sin^2 \varepsilon$  se retrouve dans certaines propriétés des ondes divergentes lumineuses que l'on peut produire par réfraction à travers une lentille. Voici, par exemple, le cas d'une onde plane polarisée rectilignement tombant normalement sur la surface plane d'une lentille plan-concave.

Nous montrons d'abord que la direction de la vibration électrique à la surface d'une onde plane réfractée est l'intersection du plan de cette onde et du plan de vibration relatif à l'onde incidente correspondante.

En effet, d'après la théorie de la réfraction vitreuse le rapport de l'amplitude de la vibration réfractée à celle de la vibration incidente est :

1° Dans le cas de vibrations perpendiculaires au plan d'incidence et pour un rayon passant du verre dans l'air

$$b = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)},$$

$i$  et  $r$  étant les angles d'incidence et de réfraction,  $r > i$ .

2° Dans le cas de vibrations parallèles au plan d'incidence

$$b' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}.$$

On en déduit

$$b = b' \cos(i-r).$$

Soient maintenant  $xOy$  et  $xOy'$  les plans de l'onde incidente et de l'onde réfractée,  $yOy'$  le plan d'incidence ( $Ox$  est perpendiculaire à ce plan). Soit enfin  $Oz$  la direction de propagation de l'onde incidente,  $OV$  étant la vibration incidente de  $zOV$  le plan de vibration incident.

Décomposons la vibration  $OV$  en deux autres,  $OA$  perpendiculaire au plan d'incidence et  $OB$  dans ce plan. Considérons de même les deux composantes  $OA'$  et  $OB'$  suivant  $Ox$  et  $Oy'$  de la vibration réfractée  $OV'$ , nous avons, d'après les formules précédentes,

$$\begin{aligned} \overline{OA'} &= \overline{OA} \cdot b = \overline{OA} \cdot b' \cos(i-r), \\ \overline{OB'} &= \overline{OB} \cdot b'. \end{aligned}$$

Projetons le rectangle  $A'V'B'O$  sur le plan de l'onde incidente  $xOy$ , on obtient  $A'V_1B_1O$ .

Les composantes de  $OV_1$  sont alors, d'une part,

$$\overline{OA'} = \overline{OA} \cdot b' \cos(i-r)$$

et, d'autre part, la projection de  $OB'$  sur  $Oy$ , soit

$$\overline{OB_1} = \overline{OB'} \cos(i-r) = \overline{OB} \cdot b' \cos(i-r).$$

Donc

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}};$$

$OV_1$  est donc dans la direction de  $OV$ . Par conséquent  $OV'$  est à l'intersection du plan de l'onde réfractée et du plan de vibration incident qui est ici le plan projetant.

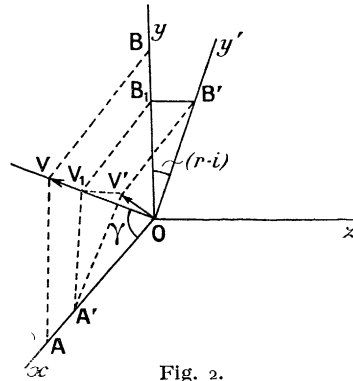


Fig. 2.

Calculons encore  $OV'$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{OV'}^2 &= \overline{OB'}^2 + \overline{OA'}^2 = \overline{OB}^2 \cdot b'^2 + \overline{OA}^2 \cdot b'^2 \cos^2(i-r), \\ \overline{OA} &= \overline{OV} \cdot \cos \gamma, \quad \overline{OB} = \overline{OV} \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

$\gamma$  étant l'angle  $xOV$ . On en déduit

$$\overline{OV'}^2 = \overline{OV}^2 \cdot b'^2 [\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2(i-r)]$$

ou

$$\overline{OV'}^2 = \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} [\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2(i-r)] \cdot \overline{OV}^2. \quad (8)$$

Ceci posé, nous remarquons que l'onde incidente, sur la face courbe de la lentille, onde qui provient déjà d'une première réfraction sur la face plane de cette lentille, est plane et rectilignement polarisée comme l'onde primitive, et que l'intensité lumineuse est simplement réduite dans le rapport de  $n^2$  à  $(n+1)^2$ ,  $n$  étant l'indice du verre. En chaque point de la surface courbe de la lentille, la direction de la vibration réfractée émergente est l'intersection du plan tangent à la sphère d'onde réfractée et du plan de vibration incident. Celui-ci ayant une direction fixe, l'onde réfractée est polarisée selon notre définition parallèlement à un plan fixe.

Soit  $xPy$  le plan de l'onde incidente passant par le point M d'incidence sur la face courbe de la lentille, PF l'axe principal, F le foyer principal (?).

Le point M étant commun à l'onde plane incidente et à l'onde sphérique réfractée émergente, FM prolongée est le rayon réfracté correspondant et MPF est le plan d'incidence, le rayon incident, non figuré, étant parallèle à PF. Supposons que

(?) Plus exactement F est le point de rencontre du rayon réfracté émergent avec l'axe principal, point qui est toujours le même lorsque  $i$  et  $r$  sont constants : remarque qui aura plus loin son utilité.

sur l'onde incidente les vibrations soient parallèles à  $Px$ ,  $xPF$  sera le plan équateur. Dans le plan de l'onde, menons  $Py$  perpendiculaire à  $Px$ ,  $Py$  sera parallèle à l'axe de polarisation, et l'angle  $MPy$  est égal à l'angle  $\gamma$  de la figure précédente. En effet,  $MP$ , intersection de l'onde plane incidente et du plan d'incidence  $MPF$ , fait avec la vibration incidente l'angle

$$MPx = 90^\circ - \gamma$$

car, d'après la figure précédente, la vibration incidente  $OV$  fait l'angle  $\gamma$  avec la normale  $Ox$  au plan d'incidence, ou l'angle  $90^\circ - \gamma$  avec le

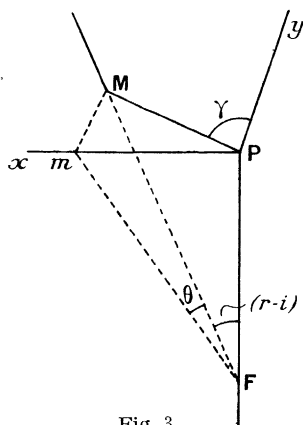


Fig. 3.

plan d'incidence, c'est précisément l'angle  $MPx$  de la figure 3.

Enfin, menons  $Mm$  perpendiculaire à  $Px$ , l'angle  $MFm = \theta$  est l'angle du rayon réfracté et de l'équateur, c'est la latitude du point  $M$  sur la sphère d'onde polarisée émergente; on a donc,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Tout ceci étant établi, appliquons la formule (8), qui nous donne  $\overline{OV}^2$ , c'est-à-dire une quantité proportionnelle à l'intensité lumineuse sur l'onde sphérique émergente, on a

$$\begin{aligned} \overline{OV}^2 &= \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} [\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2(i-r)] \cdot \overline{OV}^2 \\ &= \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} [1 - \cos^2 \gamma \sin^2(i-r)] \cdot \overline{OV}^2. \end{aligned}$$

Mais le trièdre  $FMPm$  rectangle suivant le dièdre d'arête  $Fm$ , projection de  $MF$  sur l'équateur  $xPF$ , nous donne, en remarquant que l'angle  $MFP = r - i$ , que l'angle dièdre d'arête  $PF$  est égal à  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ , et qu'enfin, dans ce trièdre, les sinus des angles des faces sont proportionnels aux sinus des angles dièdres opposés

$$\frac{\sin \theta}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right)} = \frac{\sin(r-i)}{\sin \frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad \cos \gamma \sin(r-i) = \sin \theta,$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{OV}^2 &= \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} (1 - \sin^2 \theta) \cdot \overline{OV}^2 \\ &= \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} \cos^2 \theta \cdot \overline{OV}^2 \\ &= \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} \sin^2 \varepsilon \cdot \overline{OV}^2 \end{aligned}$$

et, en remarquant que  $\overline{OV}^2$  est constant et que,

pour tous les points tels que  $M$  qui sont à l'intersection de la face courbe de la lentille et de l'onde plane  $Pxy$ , on a  $i = \text{const.}$ ,  $r = \text{const.}$ , et qu'ainsi le facteur multiplicateur de  $\sin^2 \varepsilon$  est constant, qu'enfin ces différents points sont bien sur une même onde sphérique, on voit que l'intensité est bien de l'un à l'autre proportionnelle à  $\sin^2 \varepsilon$  (8).

L'objection de H. Poincaré n'est donc pas valable (9).

En résumé, ce facteur  $\sin \varepsilon$  que l'on retrouve aussi bien en Électromagnétisme qu'en Optique, sert de trait d'union entre ces deux sortes de phénomènes et révèle un même mécanisme de propagation défini par la formule (6). Ce facteur  $\sin \varepsilon$  ne dépend pas de la fréquence qui, pour les phénomènes électromagnétiques, est nulle ou relativement faible, tandis que celle de la lumière est toujours très élevée. La formule (6), par son second facteur qui, au contraire, dépend essentiellement de la fréquence, nous fait comprendre l'effet de variation de celle-ci, de cette métamorphose, peut-on dire qu'est le passage de l'électromagnétisme à la lumière.

Le doublet de Hertz produit également, comme on sait, une onde représentée par l'expression (6).

(8) Nous insistons sur ce fait que les points en question sont sur une même onde rigoureusement sphérique. Pour des points correspondant à des incidences différentes, on trouve que l'intensité varie encore de l'un à l'autre à peu près comme  $\sin^2 \varepsilon$ , l'erreur étant déjà de  $5/1000$  quand l'angle d'incidence atteint  $10^\circ$ , cela pourrait-on croire parce que, pour ces points, l'onde n'est pas rigoureusement sphérique. Mais, même dans le cas où la lentille est supposée avoir un foyer principal rigoureux, les choses se compliquent. La vibration, en un point de la surface des ondes sphériques rigoureuses est, en admettant la loi photométrique :

$$u = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \frac{\rho \sin \varepsilon}{R} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[ Vt - R + \rho - \frac{\lambda}{4} \right],$$

$R$  étant le rayon de l'onde et  $\rho$  la longueur du rayon lumineux du point correspondant, depuis son émergence sur la surface courbe de la lentille jusqu'au foyer, tandis que  $i$  et  $r$  sont toujours les angles d'incidence et de réfraction de ce rayon sur cette face courbe. La condition de stigmatisme de la lentille donne

$$\rho = f \frac{n-1}{n \cos(i-r) - 1},$$

$f$  étant la distance focale principale et  $n$  l'indice du verre. Dès lors,  $u$  n'est proportionnel à  $\sin \varepsilon$  que pour  $i$  constant. Pour  $i$  variable, l'expression de la vibration relève de solutions sphériques plus générales. (Cf. BORN, *Optik*, et *Handbuch der Physik*). Dans tous les cas nous voyons bien que l'intensité à la surface des ondes sphériques polarisées n'a pas l'uniformité que lui supposait H. Poincaré.

(9) Nous avons voulu voir ce que dit H. Poincaré au sujet des ondes sphériques dans son traité sur la théorie mathématique de la lumière : lorsqu'il arrive (2, p. 101) à l'équation de Hertz, qui est précisément l'équation (6) de ce texte, Poincaré formule encore la même objection que celle qu'il m'adressait cinq ans plus tard quand je lui faisais part de mon travail : « La distribution très particulière que vous supposez est évidemment possible, mais ce n'est pas celle qui est réalisée dans les ondes sphériques lumineuses naturelles, car l'intensité n'y est pas uniforme, elle est proportionnelle au carré de la distance à l'axe de rotation. » L'erreur surprenante de H. Poincaré est aussi, comme nous l'avons déjà dit, celle de Gouy et de quelques physiciens.

**Le principe d'Huygens et les ondes sphériques solides.** — On peut montrer que la formule (4), équation de propagation des ondes sphériques solides, peut être utilisée dans l'application du principe d'Huygens à une onde plane à polarisation rectiligne, et conduit rigoureusement aux lois de propagation de cette onde plane. Autrement dit, si la vibration sur l'onde plane est  $F(Vt)$ , on trouve qu'en un point à la distance  $l$  de l'onde, la vibration résultante envoyée par l'ensemble des ondes élémentaires est  $F(Vt-l)$  rigoureusement,  $F(Vt)$  étant arbitraire et  $l$  aussi grand ou aussi petit que l'on veut.

Voici cette démonstration :

Soit A le plan de l'onde sur laquelle la vibration est

$$U = F(Vt)$$

supposée parallèle à l'axe OX des coordonnées rectangulaires OX, OY situées dans ce plan. Les ondes se propageant dans le sens de la normale OP au plan A, la vibration  $U'$  en un point P tel que  $OP=l$  est dirigée suivant  $PX_1$  parallèle à OX.

Soit  $d\sigma$  un élément infiniment petit de A ayant le point M pour sommet. Par raison de symétrie, l'onde sphérique élémentaire, émise par cet élément, doit avoir un équateur parallèle au plan POX. Son axe de polarisation  $Mm$  est donc perpendiculaire à OX, et la latitude  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  pour la vibration  $u_\theta$  relative à cette onde élémentaire qui arrive en P est  $\widehat{mPM}$ . Cette vibration  $u_\theta$  doit d'ailleurs être proportionnelle à  $d\sigma$  et, par suite, d'après (4), de la forme

$$u_\theta = u_\varepsilon = \sin \varepsilon \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r^2} + \frac{\varphi'(Vt-r)}{r} \right] d\sigma \\ = \cos \theta \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r^2} + \frac{\varphi'(Vt-r)}{r} \right] d\sigma,$$

$r$  étant la distance PM et  $\varphi(Vt-r)$  une certaine fonction à déterminer de façon que la vibration résultante soit  $F(Vt-l)$ . Ajoutons enfin que  $u_\theta$  qui est dans le plan POX, doit être perpendiculaire à mP et doit faire un angle aigu,  $\beta$ , avec  $PX_1$ .

La résultante des vibrations élémentaires telles que  $u_\theta$ , dues à tous les éléments du plan A, est, par raison de symétrie, dirigée suivant  $PX_1$ . Pour avoir sa valeur il suffit donc de faire la somme des projections

$$u_\theta \cos \beta = d\sigma \cos \theta \cos \beta \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r^2} + \frac{\varphi'(Vt-r)}{r} \right]$$

relatives à tous les éléments  $d\sigma$  du plan A. Mais le trièdre rectangle POmM nous donne,  $\delta$  étant l'angle OPM,

$$\cos \delta = \cos \theta \cos \beta,$$

d'où

$$u_\theta \cos \beta = d\sigma \cos \delta \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r^2} + \frac{\varphi'(Vt-r)}{r} \right].$$

Représentons chaque point M du plan par ses

coordonnées polaires,  $\rho = OM$  et  $\omega = \widehat{XOM}$ . Il vient

$$d\sigma = \rho \, d\rho \, d\omega = r \, dr \, d\omega,$$

puisque  $r^2 = \rho^2 + l^2$  et que  $l$  est constant.

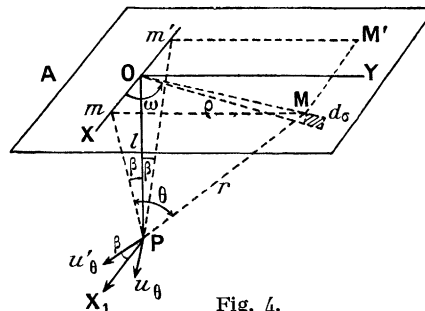


Fig. 4.

D'autre part,  $\cos \delta = \frac{l}{r}$ ; il vient donc

$$u_\theta \cos \beta = d\omega r \, dr \, \frac{l}{r} \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r^2} + \frac{\varphi'(Vt-r)}{r} \right] \\ = l \, d\omega \left\{ - \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \varphi(Vt-r) \right] \right\} dr.$$

On en déduit, pour la résultante,

$$U_1 = l \int_0^{2\pi} d\omega \int_l^\infty - \frac{d}{dr} \left[ \frac{\varphi(Vt-r)}{r} \right] dr \\ = 2\pi l \left[ \frac{\varphi(Vt-l)}{l} - \frac{\varphi(Vt-\infty)}{\infty} \right],$$

$\varphi(Vt-r)$  étant toujours finie (c'est ordinairement une fonction périodique, dans tous les cas c'est une fonction définie pour un intervalle fini de la variable), on a

$$\frac{\varphi(Vt-\infty)}{\infty} = 0,$$

et, par suite,

$$U_1 = 2\pi \varphi(Vt-l).$$

Pour que  $U_1 = U'$ , il faut que l'on ait

$$\varphi(Vt-l) = \frac{1}{2\pi} F(Vt-l),$$

ainsi que l'admettait Fresnel. La vérification de la propagation des ondes planes est donc rigoureuse (10).

(10) Dans l'application du principe d'Huygens, on sait que pour obtenir les lois exactes de la propagation, il faut attribuer aux ondes élémentaires une phase avancée de  $\frac{\pi}{2}$  sur celle de l'onde origine. C'est cette difficulté qui a conduit Gouy à découvrir l'avance de marche au foyer. Notre équation (6), que donne (4) lorsqu'il s'agit d'ondes harmoniques, en fournit une explication théorique puisque, pour  $\frac{r}{\lambda}$  très grand, elle se réduit à

$$u = \frac{2\pi a \sin \varepsilon}{\lambda r} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt-r) + \frac{\pi}{2} + \gamma \right].$$

On voit qu'en employant la formule (4), il n'y a pas à introduire un changement de phase inexplicable; il n'y a pas non plus de restriction à faire sur la distance à laquelle se produit l'effet de diffraction que l'on veut calculer.

On peut dire que le calcul précédent démontre le principe de Huygens-Fresnel pour le cas des ondes planes *sans aucune restriction quant à la distance à laquelle on l'applique*, et tel que l'a formulé Fresnel. Il est d'ailleurs facile de généraliser cette démonstration du principe d'Huygens-Fresnel pour une surface quelconque : il suffit de compléter celle qu'en donne H. Poincaré <sup>(11)</sup> en prenant le rotationnel sous les signes  $\int$  du résultat auquel il arrive, le champ des intégrales qui y figurent étant invariable dans chaque cas. Le principe devient aussitôt évident quel que soit l'ordre de grandeur de  $\frac{\lambda}{r}$ . Réciproquement, si l'on admet ledit principe, on a là un contrôle de la formule (4).

**Analogie avec les ondes électromagnétiques.** — On sait que, dans les ondes électromagnétiques, il y a à la fois propagation d'un vecteur magnétique et d'un vecteur électrique induit par le premier ou réciproquement. Nous avons vu que l'un ou l'autre de ces deux champs, suivant la nature de la source radiante, est donné par la formule (6) et nous avons désigné ce champ par  $u$ . L'autre champ consécutif  $U$  est tangent au méridien correspondant lorsque  $\frac{\lambda}{r}$  est négligeable. Son expression se déduit de celle de  $u$  par un calcul classique. On obtient ainsi

$$U = \frac{2\pi a \sin \varepsilon}{K\lambda Vr} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r),$$

$K$  étant la constante diélectrique, et en faisant dans la formule (6)  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  pour simplifier. En appliquant cette dernière expression à la diffusion de la lumière,

<sup>(11)</sup> La démonstration de H. Poincaré se rapporte à un vecteur divergent — qu'il appelle potentiel lumineux —, au lieu de se rapporter au vecteur lumineux de divergence nulle qui en est le rotationnel (*Théorie mathématique de la lumière*, 2, Chap. VII, § 98, p. 141 et suiv.).

on trouve, par un calcul classique encore, la formule bien connue de Lord Rayleigh.

**Conclusions.** — La formule (1) n'est évidemment qu'une solution particulière des équations différentielles (2) de la propagation des ondes électromagnétiques; elle en est même la solution sphérique la plus simple. Cette formule (1) définit à la surface des ondes sphériques la distribution de l'énergie qui se rapproche le plus possible de celle des ondes planes. Comme pour ces dernières chaque surface d'onde glisse en quelque sorte sur la voisine si l'on assimile le vecteur électrique ou le vecteur magnétique suivant le cas, à un déplacement vibratoire. Cette formule exprime la propagation des ondes sphériques polarisées rectilignement toutes les fois que celle-ci n'est pas gênée, soit par des réflexions, soit par des réfractions, soit encore par des diffractions, auquel cas il faut faire appel à des solutions plus générales, mais aussi plus compliquées, des dites équations différentielles. Nous avons d'ailleurs vu que cette formule, ou celles (4) et (6) qui en dérivent, peut être utilisée dans l'application du principe de Huygens-Fresnel qui permet parfois, comme en diffraction, d'éviter les dites solutions générales si compliquées. Enfin, *fait capital* à notre avis, *les formules (4) et (6) expliquent « merveilleusement » cet effet de la variation de fréquence, cette métamorphose qu'est le passage de l'électromagnétisme à l'optique physique* : elles en sont, en quelque sorte, le trait d'union. Le facteur  $\sin \varepsilon$  indépendant de la fréquence que l'on retrouve dans les lois élémentaires de ces deux parties si différentes de la physique montre bien qu'il s'agit toujours de la même chose.

L'importance, la nécessité de la considération de ces ondes solides s'impose donc : *faute d'en tenir compte la théorie classique de la diffraction est en désaccord avec la théorie électromagnétique de la lumière.*