



HAL
open science

Équations de Dirac-Madelung

J. Yvon

► **To cite this version:**

J. Yvon. Équations de Dirac-Madelung. Journal de Physique et le Radium, 1940, 1 (1), pp.18-24.
10.1051/jphysrad:019400010101800 . jpa-00233715

HAL Id: jpa-00233715

<https://hal.science/jpa-00233715>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉQUATIONS DE DIRAC-MADELUNG

Par J. YVON,

Faculté des Sciences de Strasbourg.

Sommaire. — Madelung a mis la mécanique de Schrödinger sous une forme qui rapproche cette mécanique, appliquée à l'électron, de l'électrodynamique classique relative à un fluide électrique continu. Nous montrons dans le présent article que la mécanique relativiste de Dirac peut subir la même transformation. Les formules tensorielles obtenues présentent encore ici un certain aspect électrodynamique classique; elles mettent en valeur le caractère géométrique des scalaires, vecteurs et tenseurs attachés à l'électron. Ces résultats pourront peut-être rendre service pour obtenir les perfectionnements que paraît nécessiter l'actuelle théorie quantique du rayonnement.

1. Notations. — Nous utilisons le langage géométrique et les notations propres à la relativité restreinte. Un point quelconque de l'Univers ou espace-temps est défini par ses quatre coordonnées contrevariantes (réelles)

$$x_1, x_2, x_3 \text{ d'espace. } x_4 = ct \text{ de temps:}$$

le module carré du vecteur qui joint l'origine à ce point est

$$g^{ij}x_i x_j; \quad (1)$$

en pratique nous choisirons des axes rectangulaires ordinaires; le module carré précédent s'écrit alors

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \quad (2)$$

les vecteurs du genre temps ont donc un module carré négatif, c'est le cas des vitesses; les vecteurs du genre espace ont un module carré positif.

Un grand nombre de nos formules, établies en axes rectangulaires, sont aussi valables en axes obliques quelconques, pourvu toutefois que le changement de coordonnées résulte d'une transformation (linéaire) de déterminant égal à $+1$.

Nos notations demandent une justification. Il a paru commode, suivant l'exemple donné par beaucoup de physiciens, d'adopter les indices inférieurs pour les composantes contrevariantes et les indices supérieurs pour les composantes covariantes, tout simplement parce que les composantes contrevariantes sont d'un emploi plus courant que les autres. D'autre part le module carré (2) est souvent pris avec un signe différent : cette convention ne paraît préférable que pour les problèmes relatifs à la mécanique du point matériel.

Le volume d'espace-temps construit sur quatre vecteurs a, b, c, d , soit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

sera noté

$$\alpha^{ijkl} a_i b_j c_k d_l;$$

α^{ijkl} sont les composantes covariantes d'un tenseur; leurs seules valeurs possibles sont $-1, 0, +1$. En particulier $\alpha^{1234} = +1$.

Dans la géométrie de l'espace-temps le produit vectoriel de deux vecteurs a_i et b_i est un tenseur antisymétrique

$$x_{ij} = a_i b_j - a_j b_i,$$

appelé bivecteur. Parmi les composantes non nulles on envisage en général dans les applications les six composantes indépendantes

$$x_{23}, x_{31}, x_{12}, x_{14}, x_{24}, x_{34};$$

nous associons au bivecteur un tenseur antisymétrique appelé bivecteur associé formulé par

$$y_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} x^{kl};$$

dans le système des coordonnées rectangulaires fondamentales cette définition s'explique

$$\begin{aligned} y_{23} &= x_{14}, & y_{31} &= x_{24}, & y_{12} &= x_{34}, \\ y_{14} &= -x_{23}, & y_{24} &= -x_{31}, & y_{34} &= -x_{12}; \end{aligned}$$

nous noterons que

$$x_{ij} = -\frac{1}{2} \alpha_{ijkl} y^{kl}.$$

Enfin nous utiliserons une notation abrégée pour dérivées partielles, qui est possible ici parce que nous n'aurons à envisager des dérivées que par rapport aux seuls paramètres x_1, x_2, x_3, x_4 . Nous poserons simplement

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i};$$

autrement dit les ∂^i sont les composantes symboliques contrevariantes de l'opérateur gradient d'espace-temps.

2. Formules d'électrodynamique classique. —

La théorie de Maxwell-Lorentz des phénomènes électriques ne peut plus être appliquée aujourd'hui au domaine de la physique microscopique; elle n'en

reste pas moins un guide indispensable pour l'édification de descriptions plus parfaites de la nature. Aussi devons-nous transcrire certaines de ses équations dans notre formalisme. Il faut s'arrêter à ce problème, résolu en principe depuis longtemps, en raison de l'indécision qui a régné jusqu'à présent dans le choix des notations.

On imagine un milieu, régi par la géométrie de la relativité restreinte, dans lequel se trouve défini en chaque point un vecteur d'Univers densité de courant électrique j_i ; ce vecteur est du genre temps; j_4 est la densité électrique d'espace en unités électrostatiques; dans le cas de l'électron c'est une quantité négative; j_1, j_2, j_3 sont les composantes de la densité de courant électrique d'espace en unités électromagnétiques; enfin il y a conservation de l'électricité, ce qui s'écrit

$$\partial^i j_i = 0. \quad (3)$$

Au courant est lié un potentiel vecteur d'Univers donné par la formule des potentiels retardés

$$V_i = \iiint \frac{1}{r} j_i \left(t - \frac{r}{c} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4)$$

valable seulement avec les axes fondamentaux et suffisamment explicite. Du potentiel vecteur dérive le tenseur antisymétrique champ électromagnétique

$$F_{ij} = \partial_i V_j - \partial_j V_i; \quad (5)$$

ce tenseur se dédouble dans le langage ordinaire en un champ magnétique

$$H_x = F_{23}, \quad H_y = F_{31}, \quad H_z = F_{12}, \quad (6)$$

et un champ électrique

$$E_x = -F_{13}, \quad E_y = -F_{24}, \quad E_z = -F_{31}; \quad (7)$$

le champ magnétique est exprimé en unités électromagnétiques et le champ électrique en unités électrostatiques.

Lorsque le fluide électrique est soumis à l'action d'un champ électromagnétique, que ce soit le champ électromagnétique qu'il produit lui-même ou que ce soit un champ imposé, il y a lieu de considérer en chaque point de l'Univers un vecteur densité de force

$$f_i = F_{ik} j^k. \quad (8)$$

Introduisons le vecteur u_i , de module carré égal à -1 , qui est parallèle au vecteur densité de courant, mais de sens contraire; nous appellerons ce vecteur la vitesse d'Univers, quoique ses dimensions ne soient pas celles d'une vitesse. Nous poserons alors

$$j_i = -e D u_i; \quad (9)$$

dans cette formule e est la charge de l'électron en valeur absolue et en unités électrostatiques; D est une densité scalaire d'Univers, toujours positive.

Le transport de l'électricité est accompagné d'un transport de matière. L'hypothèse la plus simple

consiste à admettre que les vecteurs représentatifs de ces transports sont dans un rapport constant; autrement dit elle consiste à écrire le vecteur densité de courant de matière

$$m_0 D u_i; \quad (10)$$

m_0 est la masse au repos de l'électron. Sous l'influence de la densité de la force résultante f_i le mouvement de l'électricité se déduit alors de la relation

$$m_0 c^2 D u_k \partial^k u_i = f_i; \quad (11)$$

compte tenu de (5), (8), (9), cette relation peut s'écrire encore

$$u^k \left[\partial_i \left(m_0 c u_k - \frac{e}{c} V_k \right) - \partial_k \left(m_0 c u_i - \frac{e}{c} V_i \right) \right] = 0. \quad (12)$$

Introduisons le vecteur densité d'impulsion-énergie

$$D g_i = D \left(m_0 c u_i - \frac{e}{c} V_i \right);$$

une solution particulière de (12) s'obtient en admettant que g_i vérifie l'équation

$$\partial_i g_j - \partial_j g_i = m_0 c (\partial_i u_j - \partial_j u_i) - \frac{e}{c} F_{ij} = 0. \quad (13)$$

On notera que le résumé précédent ignore l'existence de polarisation électrique et de polarisation magnétique.

• 3. **Équations de Dirac.** — Nous devons porter notre attention maintenant sur une théorie plus correcte des phénomènes électriques : les équations de Dirac permettent le traitement de l'évolution d'un électron dans un champ électromagnétique imposé, qui est donné par son potentiel vecteur d'Univers V_i . Ce traitement est conforme au principe de relativité restreinte. L'électron est envisagé comme un fluide continu défini en chaque point de l'espace par quatre fonctions d'onde imaginaires

$$\Psi_x, \quad \Psi_y, \quad \Psi_z, \quad \Psi_4,$$

qui définissent, par une combinaison linéaire appropriée ⁽¹⁾, non pas un vecteur, mais un spineur.

Le lecteur sait que l'on considère habituellement l'électron comme ponctuel; dans cette conception le fluide continu dont il vient d'être question a seulement une signification statistique; cette manière de voir les choses rend les plus grands services lorsqu'on se pose des problèmes complexes, par exemple le problème de l'interaction de deux électrons; mais elle est absolument superflue pour l'examen intrinsèque des équations de Dirac : il semble que nous pouvons mieux parvenir à les comprendre en ne leur faisant pas dire ce qu'elles ne contiennent pas.

⁽¹⁾ E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, II, Paris, 1938.

A partir des fonctions d'onde nous pouvons attacher à chaque point de l'espace les grandeurs tensorielles suivantes (2) :

Deux invariants	Ω_1 et Ω_2
Le vecteur densité de courant	j_i
Le vecteur densité de spin	σ_i
Le tenseur antisymétrique polarisation magnétique et électrique	μ_{ij}

Précisons le sens du tenseur; dans un élément de volume d'espace $d\tau$ existe un petit aimant dont le moment électrique a pour composantes

$$\mu_{23} d\tau, \mu_{31} d\tau, \mu_{12} d\tau,$$

et un petit doublet électrique de composantes

$$\mu_{11} d\tau, \mu_{22} d\tau, \mu_{33} d\tau.$$

Nous poserons

$$\mu_x = \mu_{23}, \quad \mu_y = \mu_{31}, \quad \mu_z = \mu_{12};$$

μ_x, μ_y, μ_z sont les composantes de la polarisation magnétique ou intensité d'aimantation; de même

$$\mathfrak{N}_x = \mu_{11}, \quad \mathfrak{N}_y = \mu_{22}, \quad \mathfrak{N}_z = \mu_{33},$$

sont les composantes de la polarisation électrique.

Au tenseur de polarisation nous devons rattacher deux vecteurs densités de courant, d'une part la densité courant électrique de polarisation

$$\partial j \mu_{ij}; \tag{14}$$

le vecteur

$$j_i - \partial j \mu_{ij}$$

représente alors le courant électrique « vrai ».

Envisageons maintenant le bivecteur

$$\nu_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} \mu^{kl}; \tag{15}$$

il y a une densité de courant magnétique de polarisation (3) dont les composantes s'écrivent

$$- \partial j \nu_{ij}. \tag{16}$$

Le Tableau suivant rappelle comment les seize grandeurs physiques se déduisent des fonctions d'onde (4).

Pour obtenir l'une des grandeurs physiques, multipliée par la constante mentionnée, il suffit de prendre dans la ligne correspondante les fonctions d'onde indiquées, avec le signe, de multiplier chacune d'elles par l'imaginaire conjuguée qui est en tête de sa colonne, puis d'ajouter. La densité électrique j_4 est nécessairement négative.

(2) L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, Paris, 1934.

(3) E. HENRIOT, *Les couples de radiation et les moments électromagnétiques*, Paris, 1936.

(4) ψ' représente l'imaginaire conjuguée de ψ , $2\pi h$ est la constante de Planck.

	Ψ'_α	Ψ'_β	Ψ'_γ	Ψ'_δ
$\frac{1}{e} j_1 \dots \dots \dots$	Ψ_δ	Ψ_γ	Ψ_β	Ψ_α
$-i \frac{1}{e} j_2 \dots \dots \dots$	Ψ_δ	$-\Psi_\gamma$	Ψ_β	$-\Psi_\alpha$
$\frac{1}{e} j_3 \dots \dots \dots$	Ψ'_γ	$-\Psi'_\delta$	Ψ_α	$-\Psi_\beta$
$\frac{1}{e} j_4 \dots \dots \dots$	$-\Psi_\alpha$	$-\Psi_\beta$	$-\Psi'_\gamma$	$-\Psi'_\delta$
$\frac{2}{h} \sigma_1 \dots \dots \dots$	Ψ'_β	Ψ'_α	Ψ'_δ	Ψ'_γ
$\frac{2}{h} \sigma_2 \dots \dots \dots$	Ψ'_β	$-\Psi'_\alpha$	Ψ'_δ	$-\Psi'_\gamma$
$\frac{2}{h} \sigma_3 \dots \dots \dots$	Ψ_α	$-\Psi'_\beta$	Ψ'_γ	$-\Psi'_\delta$
$\frac{2}{h} \sigma_4 \dots \dots \dots$	$-\Psi'_\gamma$	$-\Psi'_\delta$	$-\Psi_\alpha$	$-\Psi'_\beta$
$\frac{2m_0c}{eh} \mu_{23} \dots$	Ψ'_β	Ψ'_α	$-\Psi'_\delta$	$-\Psi'_\gamma$
$-i \frac{2m_0c}{eh} \mu_{31} \dots$	Ψ_β	$-\Psi_\alpha$	$-\Psi_\delta$	$-\Psi_\gamma$
$\frac{2m_0c}{eh} \mu_{12} \dots$	Ψ_α	$-\Psi'_\beta$	$-\Psi'_\gamma$	Ψ'_δ
$-i \frac{2m_0c}{eh} \mu_{14} \dots$	$-\Psi'_\delta$	$-\Psi'_\gamma$	Ψ'_β	Ψ_α
$\frac{2m_0c}{eh} \mu_{24} \dots$	Ψ'_δ	$-\Psi'_\gamma$	$-\Psi'_\beta$	Ψ'_α
$-i \frac{2m_0c}{eh} \mu_{34} \dots$	$-\Psi'_\gamma$	Ψ'_δ	Ψ_α	$-\Psi_\beta$
$\Omega_1 \dots \dots \dots$	Ψ_α	Ψ_β	$-\Psi_\gamma$	$-\Psi_\delta$
$-i \Omega_2 \dots \dots \dots$	Ψ_γ	Ψ'_δ	$-\Psi_\alpha$	$-\Psi'_\beta$

Les composantes diverses que nous venons d'envisager ne sont pas indépendantes; on a démontré les relations suivantes (5) :

$$j_k \sigma_k = 0. \tag{17}$$

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = -\frac{1}{e^2} j_k j^k = \frac{4}{h^2} \sigma_k \sigma^k, \tag{18}$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{m_0c} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{-1} [\Omega_1 \alpha_{ijkl} j^k \sigma^l - \Omega_2 (j_i \sigma_j - j_j \sigma_i)]; \tag{19}$$

il ne peut y avoir d'autre relation indépendante. Il est avantageux d'écrire ces formules en faisant apparaître le vecteur unitaire u_i et en introduisant un nouveau vecteur unitaire s_i , de module carré égal à + 1, parallèle et de même sens que le vecteur σ_i . On trouve alors que

$$u_k s^k = 0, \tag{20}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2} h D s_i, \tag{21}$$

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = D^2; \tag{22}$$

nous pouvons poser

$$\Omega_1 = D \cos \tau_i, \quad \Omega_2 = D \sin \tau_i; \tag{23}$$

(5) L. DE BROGLIE, *Loc. cit.*, et J. YVON, *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **205**, p. 1367.

la densité de polarisation s'écrit maintenant

$$u_{ij} = \frac{eh}{2m_0c} D [\sin \eta (u_i s_j - u_j s_i) - \cos \eta \cdot \alpha_{ijkl} u^k s^l]. \quad (24)$$

Notons encore la formule utile

$$v_{ij} = \frac{eh}{2m_0c} D [\cos \eta (u_i s_j - u_j s_i) + \sin \eta \cdot \alpha_{ijkl} u^k s^l]. \quad (25)$$

Écrivons maintenant les équations aux dérivées partielles de Dirac, qui régissent l'évolution des fonctions d'onde et par suite des grandeurs physiques:

$$\left. \begin{aligned} (-i\partial^4 + X_4 + K) \Psi_{\alpha+} (i\partial^4 + Y_4 - \partial^2 + iX_2) \Psi_{\delta+} (i\partial^3 + X_3) \Psi_{\gamma} &= 0 \\ (-i\partial^4 + X_4 + K) \Psi_{\beta+} (i\partial^4 + Y_4 + \partial^2 - iX_2) \Psi_{\gamma-} (i\partial^3 + X_3) \Psi_{\delta} &= 0 \\ (-i\partial^4 + X_4 - K) \Psi_{\gamma+} (i\partial^4 + Y_4 - \partial^2 + iX_2) \Psi_{\beta+} (i\partial^3 + X_3) \Psi_{\alpha} &= 0 \\ (-i\partial^4 + X_4 - K) \Psi_{\delta+} (i\partial^4 + Y_4 + \partial^2 - iX_2) \Psi_{\alpha-} (i\partial^3 + X_3) \Psi_{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} (26)$$

Nous avons posé là, pour alléger tout une série de calculs intermédiaires,

$$\begin{aligned} K &= m_0 c : h, \\ X_i &= V_i \cdot e : ch. \end{aligned}$$

4. **Élimination des fonctions d'onde.** — Nous nous proposons maintenant d'éliminer des fonctions d'onde de manière à établir la théorie sur des relations où figurent explicitement le courant, le spin, les deux invariants et les grandeurs tensorielles qui s'y rattachent. Nous entreprenons donc à propos de l'électron de Dirac ce que Madelung⁽⁶⁾ a réussi à propos de l'électron quantique non relativiste.

Nous rappelons d'abord deux relations différentielles qui s'établissent aisément en combinant linéairement les équations de Dirac à l'aide des imaginaires conjugués des fonctions d'onde; ce sont l'équation de conservation de l'électricité

$$\partial^i j_i = 0 \quad \text{ou} \quad \partial^i Du_i = 0 \quad (27)$$

et l'équation qui montre qu'en général le vecteur densité de spin n'est pas conservatif,

$$\partial^i Ds_i + \frac{2m_0c}{h} D \sin \eta = 0. \quad (28)$$

Les fonctions d'onde peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\Psi_{\omega} = F_{\omega} e^{i\varphi}, \quad (29)$$

où ω est un des indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et φ une quantité réelle. Nous choisissons φ de manière que F_{δ} , par exemple, soit une quantité réelle. En combinant linéairement les formules issues du Tableau I on trouve que

$$4F_{\delta}\Psi_{\delta} = Du_4 - Ds_3 - \Omega_1 + \frac{2m_0c}{h} \mu_{12}; \quad (30)$$

nous pouvons alors poser, avec un signe invariable dans un domaine où F_{δ} ne s'annule pas,

$${}_{\varphi}F_{\delta} = \pm \left(Du_4 - Ds_3 - \Omega_1 + \frac{2m_0c}{h} \mu_{12} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (31)$$

(6) F. MADELUNG, *Zeit. für Phys.*, 1926, 40, p. 322.

posons encore

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -Du_1 + \frac{2m_0c}{eh} \mu_{21}, & a_2 &= -Du_2 - \frac{2m_0c}{eh} \mu_{11} \\ a_3 &= D(u_3 - s_1), & a_4 &= \Omega_3 + \frac{2m_0c}{eh} \mu_{33} \\ a_5 &= Ds_1 - \frac{2m_0c}{eh} \mu_{23}, & a_6 &= Ds_2 - \frac{2m_0c}{eh} \mu_{31} \\ a_7 &= Du_4 - Ds_3 - \Omega_1 + \frac{2m_0c}{eh} \mu_{12}; \end{aligned} \right\} (32)$$

les indices affectés à la lettre a n'ont naturellement aucune signification tensorielle. Les paramètres a sont des intermédiaires utiles de notre calcul. Ils permettent d'éliminer les F à l'aide des relations

$$\left. \begin{aligned} {}_4F_{\delta}F_{\alpha} &= a_1 + ia_2, & {}_4F_{\delta}F_{\beta} &= a_3 + ia_4 \\ {}_4F_{\gamma}F_{\gamma} &= a_5 + ia_6, & {}_4F_{\delta}^2 &= a_7. \end{aligned} \right\} (33)$$

Il est facile de montrer que les a vérifient les relations

$$\left. \begin{aligned} a_7(\partial^1\varphi - X_1) + a_3(\partial^3\varphi - X_3) - a_7(\partial^4\varphi - X_4) & \\ = Ka_1 - \partial^3 a_6 + \partial^4 a_2 + \frac{1}{2a_7}(-a_7\partial^2 + a_6\partial^3 - a_2\partial^4)a_7 & \\ a_7(\partial^2\varphi - X_2) + a_6(\partial^3\varphi - X_3) - a_2(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = Ka_2 + \partial^3 a_5 - \partial^4 a_1 + \frac{1}{2a_7}(a_7\partial^1 - a_3\partial^3 + a_1\partial^4)a_7 & \\ a_6(\partial^1\varphi - X_1) - a_3(\partial^2\varphi - X_2) - a_4(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = Ka_4 + \partial^1 a_5 + \partial^2 a_6 - \partial^4 a_3 + \frac{1}{2a_7}(-a_3\partial^1 - a_6\partial^2 - a_7\partial^3 + a_3\partial^4)a_7 & \\ a_2(\partial^1\varphi - X_1) - a_1(\partial^2\varphi - X_2) - a_4(\partial^3\varphi - X_3) & \\ = \partial^1 a_1 + \partial^2 a_2 - \partial^3 a_4 + \frac{1}{2a_7}(-a_1\partial^1 - a_2\partial^2 + a_3\partial^3 - a_7\partial^4)a_7 & \end{aligned} \right\} (34)$$

et

$$\left. \begin{aligned} a_1(\partial^1\varphi - X_1) + a_3(\partial^2\varphi - X_2) + a_2(\partial^3\varphi - X_3) - a_6(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = -Ka_6 + \partial^1 a_3 - \partial^2 a_4 + \partial^3 a_1 + \partial^4 a_5 & \\ + \frac{1}{2a_7}(-a_3\partial^1 + a_4\partial^2 - a_1\partial^3 + a_5\partial^4)a_7 & \\ a_3(\partial^1\varphi - X_1) - a_4(\partial^2\varphi - X_2) + a_1(\partial^3\varphi - X_3) - a_5(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = -Ka_5 - \partial^1 a_4 - \partial^2 a_3 - \partial^3 a_2 + \partial^4 a_6 & \\ + \frac{1}{2a_7}(a_4\partial^1 + a_3\partial^2 + a_2\partial^3 - a_6\partial^4)a_7 & \\ a_4(\partial^1\varphi - X_1) + a_2(\partial^2\varphi - X_2) - a_3(\partial^3\varphi - X_3) - a_7(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = -Ka_7 - \partial^1 a_2 + \partial^2 a_1 + \partial^3 a_4 & \\ + \frac{1}{2a_7}(a_2\partial^1 - a_1\partial^2 - a_4\partial^3)a_7 & \\ a_5(\partial^1\varphi - X_1) + a_6(\partial^2\varphi - X_2) - a_7(\partial^3\varphi - X_3) - a_3(\partial^4\varphi + X_4) & \\ = -Ka_7 - \partial^1 a_6 + \partial^2 a_5 + \partial^4 a_4 & \\ + \frac{1}{2a_7}(a_6\partial^1 - a_5\partial^2 - a_4\partial^4)a_7. & \end{aligned} \right\} (35)$$

Considérons comme inconnues les quatre expressions

$$\partial^1\varphi - X_1, \quad \partial^2\varphi - X_2, \quad \partial^3\varphi - X_3, \quad \partial^4\varphi + X_4;$$

par rapport à ces inconnues les équations (34) ont un déterminant qui vaut simplement $-(2\Omega_2 a_7)^2$; les résoudre n'est pas une entreprise désespérée; sur

les quatre expressions obtenues nous retiendrons seulement les deux dernières

$$\left. \begin{aligned} 2\Omega_2(\partial_i\varphi - \Gamma_3) &= -\frac{2m_0c}{eh}\partial^i v_{3i} \\ &+ \frac{1}{a_7}(a_5\partial_3 a_1 + a_6\partial_3 a_2 + a_7\partial_3 Du_3 + Ds_i\partial_3 a_7); \\ 2\Omega_2(\partial_i\varphi - \Gamma_4) &= -\frac{2m_0c}{eh}\partial^i v_{4i} \\ &+ \frac{1}{a_7}(a_5\partial_4 a_1 + a_6\partial_4 a_2 + a_7\partial_4 Du_3 + Ds_i\partial_4 a_7); \end{aligned} \right\} (36)$$

des combinaisons linéaires obtenues par tâtonnement à partir maintenant des huit équations (34) et (35) à la fois nous donnent enfin quatre relations résumées par

$$\begin{aligned} \gamma\Omega_1(\partial_i\varphi - X_i) &= \frac{\gamma m_0c}{eh}(eDu_i + \partial^i \mu_{ij}) \\ &+ \frac{1}{\gamma a_7}(a_2\partial_i a_1 - a_1\partial_i a_2 + a_4\partial_i a_3 - a_3\partial_i a_4 + a_6\partial_i a_5 - a_5\partial_i a_6). \end{aligned} \quad (37)$$

Dans le domaine où nous nous sommes placé les équations de Dirac sont équivalentes à l'ensemble des équations (27), (28), (36) et (37).

Des calculs assez longs permettent ensuite de montrer que

$$\begin{aligned} (a_5\partial a_1 + a_6\partial a_2 + a_7\partial Du_3 + Ds_i\partial a_7) &= + a_7 Ds^i \partial u_i \cdot \cos \tau_1 \\ &+ D^2 \sin \tau_1 \times \left\{ [u_2 \cos \tau_1 + (u_2 s_3 - u_3 s_2)] \partial u_1 \right. \\ &+ [-u_1 \cos \tau_1 + (u_3 s_1 - u_1 s_3)] \partial u_2 \\ &+ [u_1 \sin \tau_1 + (u_1 s_2 - u_2 s_1)] \partial u_3 - u_3 \sin \tau_1 \partial u_4 \\ &+ [-s_3 \sin \tau_1 - (u_2 s_4 - u_1 s_2)] \partial s_1 \\ &+ [s_1 \cos \tau_1 + (u_1 s_1 - u_1 s_4)] \partial s_2 - s_1 \sin \tau_1 \partial s_3 \\ &+ [s_3 \sin \tau_1 - (u_1 s_2 - u_2 s_1)] \partial s_4 + (-u_3 + s_4) \partial \tau_1 \\ &\left. + \left(\sin \tau_1 - \frac{\gamma m_0c}{eh} \frac{\mu_{3i}}{D} \right) \cdot s^i \partial u_i \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

et que

$$(a_2\partial a_1 - a_1\partial a_2 + a_3\partial a_3 - a_3\partial a_4 + a_6\partial a_5 - a_5\partial a_6) = -\gamma a_7 D \cdot s^i \partial u_i \cdot \sin \tau_1 + \gamma D^2 \cos \tau_1 \{ \dots \}; \quad (39)$$

le crochet non explicite qui figure dans (39) est le même que celui qui figure dans (36). Nous pouvons maintenant éliminer $\partial_3\varphi - \Gamma_3$ entre la première équation (36) et la troisième équation (37) et opérer d'une manière analogue pour $\partial_4\varphi$. Les deux relations obtenues s'écrivent d'une manière générale

$$\begin{aligned} m_0c \left[\sin \tau_i \left(Du_i + \frac{1}{e} \partial^j \mu_{ij} \right) + \frac{1}{e} \cos \tau_i \cdot \partial^j v_{ij} \right] \\ = \frac{h}{\gamma} Ds^j \partial_j u_i; \end{aligned} \quad (40)$$

la première relation obtenue correspond à l'indice $i = 3$, la deuxième à l'indice $i = 4$. En réalité les relations qui correspondent à l'indice $i = 1$ et à l'indice $i = 2$ sont également vérifiées : en effet

ces quatre relations ne sont pas indépendantes; compte tenu des propriétés des vecteurs u_i et s_i (orthogonalité, module carré égal à $+$ ou -1) et des équations (27) et (28), de ces quatre relations il en est deux seulement d'indépendantes, qui peuvent être choisies arbitrairement; leur vérification entraîne celle des deux autres.

Nous avons donc remplacé dans notre système d'équations les relations (36) par les relations (40). Nous allons maintenant porter notre attention sur les équations (37); nous pouvons éliminer φ , qui n'a pas de caractère tensoriel, en formant les six expressions

$$\partial_i(\partial_j\varphi) - \partial_j(\partial_i\varphi).$$

le calcul est pratiquement inabordable par suite de la complication de l'expression (39) qui figure dans le second membre. On s'en tire en utilisant l'invariance relativiste de la théorie de Dirac et en imaginant d'utiliser des axes particuliers pour lesquels, en un point donné de l'espace-temps au voisinage duquel nous raisonnons, les vecteurs orthogonaux u_i et s_i soient chacun réduits à avoir une seule composante. Il est facile ensuite de revenir aux axes orthogonaux quelconques. Ainsi trouvons-nous

$$\begin{aligned} \partial_j(\partial_i\varphi) - \partial_i(\partial_j\varphi) &= \partial_i g_j - \partial_j g_i + \frac{h}{\gamma} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \partial_j s_1 & \partial_j s_2 & \partial_j s_3 & \partial_j s_4 \\ \partial_j s_1 & \partial_j s_2 & \partial_j s_3 & \partial_j s_4 \end{vmatrix} \\ &- \frac{h}{\gamma} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \partial_j u_1 & \partial_j u_2 & \partial_j u_3 & \partial_j u_4 \\ \partial_j u_1 & \partial_j u_2 & \partial_j u_3 & \partial_j u_4 \end{vmatrix} = 0; \end{aligned} \quad (41)$$

il a fallu introduire un nouveau paramètre g_i défini par

$$Dg_i = \frac{e}{c} D \left[\cos \tau_i \left(Du_i + \frac{1}{e} \partial^j \mu_{ij} \right) - \frac{1}{e} \sin \tau_i \partial^j v_{ij} \right]; \quad (42)$$

le vecteur Dg_i semble généraliser le vecteur densité d'impulsion-énergie de la théorie classique. Ce que nous avons appelé le transport de matière au paragraphe 2 prend une expression assez compliquée; une partie du transport de matière est liée au courant électrique vrai, comme au paragraphe 2, à condition de multiplier au préalable la densité de courant correspondant par $-\cos \tau_i$. De même un transport de matière est lié au courant de magnétisme, toujours avec la même relation de proportionnalité, à condition de multiplier au préalable la densité de ce courant par $+\sin \tau_i$.

Les équations (41), où les g_i seraient les inconnues, sont intégrables, cela résulte de la manière même dont elles ont été obtenues, mais ce résultat peut s'établir aussi directement en profitant des propriétés des vecteurs u_i et s_i qui figurent dans les deux déterminants.

Dans les formules (40) et (42) explicitons les densités de polarisation en fonction des vecteurs u et s_i ; il vient, compte tenu de (27) et (28), les relations respectivement équivalentes

$$\alpha_{ijk} u^k s^l \partial_j \tau_i + s^i \partial_j u_i - u^i \partial_j s_i = s^i \partial_i u_j. \quad (43)$$

$$-g_i = \frac{e}{c} F_i + m_0 c \cos \tau_i u_i + \frac{1}{5} h \left[(u_i s_j - u_j s_i) \partial_j \tau_i - \frac{1}{D} \alpha_{ijk} \partial_l D u^k s^l \right]. \quad (44)$$

A toute solution des équations de Dirac correspond une solution des équations tensorielles. La réciproque n'est pas vraie. La discussion des solutions de ces équations nécessite donc une étude, que nous n'aborderons pas dans cet article. Voici néanmoins quelques remarques.

Il est d'abord bien entendu que nous considérons seulement, à propos des équations tensorielles, les solutions qui sont uniformes (sauf peut-être en ce qui concerne le paramètre τ_i), continues et dérivables. Alors D a partout nécessairement le même signe. C'est par convention le signe positif.

Avec les équations de Dirac, u_4 est partout positif. Avec les équations tensorielles, il n'est pas impossible *a priori* que u_4 puisse changer de signe d'un point à l'autre. Nous laisserons ces solutions de côté. Mais il existe certainement des solutions pour lesquelles u_4 est partout négatif. Soit une certaine solution

$$u_i, s_i, \tau_i, D, u_i > 0, \quad (45)$$

qui correspond à un certain potentiel imposé V_i ; changeons V_i en $-V_i$; nous obtenons immédiatement une solution du nouveau problème avec

$$-u_i, s_i, \tau_i, D, u_i < 0; \quad (46)$$

si (45) représente un électron négatif, (46) représente un électron positif. Mais nous pouvons trouver encore une autre solution du nouveau problème :

$$u_i, -s_i, \tau_i + \pi, D, u_i > 0. \quad (47)$$

S'il est permis de faire abstraction de la formule

$$j_i = -e D u_i,$$

l'électron (47) est un électron positif, comme le montrera clairement le paragraphe suivant.

Limitons-nous maintenant aux solutions pour lesquelles u_4 est positif. Ce sont des solutions du système de Dirac seulement si le paramètre a_7 défini par (32) est positif. Nous indiquerons rapidement que ce paramètre est sûrement positif si $\cos \tau_i$ est négatif, mais que si $\cos \tau_i$ est positif un choix approprié des axes peut rendre a_7 négatif (u_4 restant toujours positif après le changement), au moins dans certains domaines. Comme on va le voir, le cas où $\cos \tau_i$ est positif se rattache à l'électron positif tel qu'il est interprété par (47). Il semble donc que les équations tensorielles diffèrent assez profondément des

équations de Dirac pour ce qui concerne les deux sortes d'électricité. Il est d'ailleurs impossible d'approfondir cette question en l'absence de théorie du rayonnement.

5. Approximation non quantique. — Nos équations tensorielles permettent aisément de trouver ce que devient l'électron quand la constante de Planck tend vers zéro. L'équation (28) nous montre qu'à la limite

$$\sin \tau_i = 0;$$

par suite,

$$\cos \tau_i = \pm 1.$$

Les équations (44) et (41) deviennent respectivement

$$g_i = -\frac{e}{c} F_i - m_0 c u_i \cos \tau_i \quad (45)$$

$$\partial_i g_j - \partial_j g_i = 0; \quad (46)$$

le mouvement de l'électricité est celui que nous avons rencontré en électrodynamique classique, lorsque le champ défini par V comprend seulement le champ imposé et que le rotationnel d'Univers du vecteur impulsion-énergie est nul. Tenons compte seulement des solutions telles que u_4 soit positif; le cas $\cos \tau_i = -1$ correspond à l'électron ordinaire, le cas $\cos \tau_i = +1$ correspond à l'électron positif. L'équation (11) est alors valable.

Le système des équations limites comprend aussi l'équation de conservation de l'électricité. Par contre le spin et le tenseur de polarisation sont annulés. Toutefois l'équation (43), qui régit l'évolution du vecteur unitaire s_i , parallèle au vecteur densité de spin, conserve une signification. Elle s'écrit

$$u_j \partial_j s_i = -s^i (\partial_j u_j - \partial_j u_i); \quad (47)$$

une fois résolues les équations (45) et (46) on peut résoudre d'une part l'équation de conservation, ce qui donne D et d'autre part l'équation (47) : elle donne l'évolution du spin, devenu infiniment petit, le long d'une trajectoire de courant. Le spin ne joue plus qu'un rôle passif, qu'il est néanmoins intéressant d'examiner. L'équation (13) permet d'éliminer

$$\partial_i u_j - \partial_j u_i,$$

de l'équation (47), qui s'écrit maintenant

$$u_j \partial_j s_i = \pm \frac{e}{m_0 c^2} F_i s^i; \quad (48)$$

en même temps notons l'expression actuelle de la densité de polarisation

$$j_{ij} = \mp \frac{e h}{2 m_0 c} \alpha_{ijk} u^k s^l. \quad (49)$$

Cette évolution du spin est identique à celle imaginée par Kramers (?). Dans la théorie élémentaire

(?) H. A. KRAMERS, *Physica*, 1034, I, p. 825.

taire des aimants, un aimant placé dans un champ magnétique est soumis à un couple. La généralisation relativiste la plus simple possible donne le tenseur densité de moment mécanique angulaire

$$\mu_{ik}F_j^k - \mu_{jk}F_i^k. \quad (30)$$

ou, d'après (49),

$$\pm \frac{eh}{2m_0c} D\alpha_{ijkl}(s_m F^{mk}u_l - u_m F^{mk}s_l);$$

compte tenu des propriétés générales de u_i , s_i , de (46), la relation (48) est équivalente à la relation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} hcu_m \partial^m (\alpha_{ijkl} u^k s^l) \\ & = \pm \frac{eh}{2m_0c} \alpha_{ijkl} (s_m F^{mk}u_l - u_m F^{mk}s_l), \end{aligned} \quad (31)$$

ce qui montre l'identité des formules de Kramers et des nôtres. Kramers raisonnait en fait sur un modèle ponctuel, mais il serait facile de ramener notre approximation, qui est une approximation d'« optique géométrique », au modèle ponctuel. Le tenseur

$$\frac{1}{2} hc\alpha_{ijkl} u^k s^l$$

joue le même rôle, à propos de l'action des couples, que le vecteur

$$m_0 c u_i,$$

à propos de l'action des forces.

Il serait sans doute intéressant de reprendre ce traitement classique du spin en remplaçant le champ imposé ou champ extérieur par le champ total et en essayant de formuler les théorèmes de conservation suivant la méthode préconisée par Henriot (8).

6. Approximation non relativiste. — On développe cette approximation en regardant $\frac{1}{c}$, u_1 , u_2 , u_3 comme infiniment petits; cependant $\frac{e}{c} V$ reste fini. Nous supposerons de plus que s_i a une direction à peu près invariable, par exemple celle de Oz ; alors s_3 est voisin de $+1$, s_1 , s_2 , s_4 sont du premier ordre, $\sin \gamma$ du second. On peut regarder $\cos \gamma$ comme constant et, nous limitant au cas de l'électron ordi-

naire, comme égal à -1 . Le champ magnétique n'est pas arbitraire: il doit être parallèle à Oz . Une fonction S permet d'éliminer les vitesses u_1 , u_2 , u_3 par les relations

$$\begin{aligned} m_0 c u_1 &= \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{e}{c} V_1, \\ m_0 c u_2 &= \frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{e}{c} V_2, \\ m_0 c u_3 &= \frac{\partial S}{\partial x_3} + \frac{e}{c} V_3; \end{aligned}$$

cette fonction doit vérifier la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial t} - eV_4 + \frac{1}{2m_0} \\ & \times \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{e}{c} V_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{e}{c} V_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3} + \frac{e}{c} V_3 \right)^2 \right] \\ & + \frac{eh}{2m_0c} H_3 - \frac{h^2}{2m_0} \frac{\Delta \sqrt{Du_4}}{\sqrt{Du_4}} = 0. \end{aligned}$$

à laquelle il faut adjoindre l'équation de conservation de l'électricité. Nous avons ainsi obtenu l'équation de Schrödinger du problème sous la forme que lui a donnée Madelung (9). Le présent article consiste donc essentiellement en la généralisation des idées de Madelung.

7. Conclusion. — Nous pensons avoir précisé la signification des grandeurs tensorielles relatives à l'électron magnétique ainsi que les relations qui existent entre elles. Ces relations montrent que l'électron magnétique peut être traité comme un fluide continu, électrisé et polarisé, et qu'il apparaît alors comme pourvu d'un caractère foncièrement classique, tant du moins que l'on ne considère que le champ électro-magnétique imposé.

Dans ce domaine restreint, on peut prétendre que la mécanique ondulatoire de l'électron n'est rien d'autre qu'une conséquence de son aimantation: en effet les propriétés ondulatoires paraissent étroitement liées à l'existence du tenseur de polarisation. Il ne faut toutefois pas oublier que notre système tensoriel n'est pas strictement équivalent à celui de Dirac.

(9) F. MADELUNG, *Loc. cit.*

(8) E. HENRIOT, *Loc. cit.*