



HAL
open science

Sur les limites d'application de la géométrie métrique en physique nucléaire. I

J. Mariani

► **To cite this version:**

J. Mariani. Sur les limites d'application de la géométrie métrique en physique nucléaire. I. Journal de Physique et le Radium, 1939, 10 (6), pp.296-306. 10.1051/jphysrad:01939001006029600 . jpa-00233675

HAL Id: jpa-00233675

<https://hal.science/jpa-00233675>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES LIMITES D'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE. I.

Par J. MARIANI.

Collège de France. Physique théorique.

Sommaire. — On sait que le problème de la structure de l'atome est lié à celui des discontinuités de l'action, qui résultent de l'existence de la constante h et entraînent la stabilité des orbites électroniques de Bohr que la mécanique classique n'explique pas ; ce problème a été résolu en montrant que cette dernière emploie les procédés de l'optique géométrique, qui ne sont plus justifiés dans le domaine atomique et en réalisant le passage à la mécanique ondulatoire.

D'une manière tout à fait analogue, le problème des particules élémentaires, qui n'est pas résolu à l'heure actuelle, fait intervenir une nouvelle constante universelle r_0 , de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm, qui représente le quantum élémentaire de longueur (rayon de l'électron $\frac{e^2}{m_0 c^2}$ ou rayon des noyaux légers) et se trouve lié à la stabilité des corpuscules matériels et des noyaux.

On suppose, dans le présent exposé, que ces deux problèmes connexes admettent des solutions analogues ; mais pour résoudre le problème des corpuscules élémentaires, il faut introduire l'idée nouvelle que ce n'est plus seulement la mécanique classique qui est en défaut dans les domaines spatiaux de l'ordre de grandeur de r_0 , mais encore la géométrie métrique usuelle, qui repose sur la possibilité de mesurer des longueurs aussi petites que l'on veut ; on montre que les raisons qui conduisent à envisager la limitation du domaine de validité de la géométrie métrique sont analogues à celles qui conduisent à une limitation des procédés de la mécanique classique dans le domaine de l'atome de Bohr ; pour cela, on met la géométrie métrique sous forme hamiltonienne, et on montre de plus que la détermination de la distance de deux points s'effectue par des méthodes tout à fait équivalentes à celles d'un optique géométrique nouvelle, dont on précise la portée en faisant jouer à la constante r_0 le rôle d'une longueur d'onde et en même temps celui de la constante h dans le passage de la fonction d'action hamiltonienne S à la phase φ , en théorie de de Broglie ($S = \frac{h}{2\pi} \varphi$) ; ces méthodes sont alors en défaut quand la géométrie métrique étudiée est celle d'un espace courbe dont le rayon de courbure est de l'ordre de grandeur de r_0 ; on admet que cette circonstance est réalisée pour le domaine spatial occupé par les corpuscules élémentaires et les noyaux atomiques.

La courbure ainsi introduite joue le rôle d'un champ de forces attractif spécial, le « champ nucléaire », entièrement distinct du champ de gravitation d'Einstein et chargé d'interpréter la stabilité et l'attraction mutuelle des corpuscules élémentaires ; la méthode de quantification des longueurs qui en résulte sera donnée prochainement ; la constante h n'apparaît pas pour le moment explicitement dans la théorie.

1. But de l'exposé. — Dans un mémoire récent, Heisenberg (1) a indiqué la nécessité d'introduire en microphysique un quantum élémentaire de longueur, permettant d'interpréter l'existence du rayon de l'électron r_0 ; celui-ci se manifeste expérimentalement par la production de gerbes et d'explosions, consécutives à la rencontre d'un électron et d'un photon de grande énergie, qui devrait permettre de localiser cet électron dans un domaine spatial de dimensions linéaires plus petites que $r_0 \sim 10^{-13}$ cm, en le supposant au repos par rapport au système de référence choisi ; d'autres physiciens, entre autres Bohr et Pauli, ont également insisté sur cette nécessité (2) ; aucune tentative n'a pourtant été faite pour expliquer théoriquement l'introduction d'une telle longueur élémentaire ; le présent exposé a pour but de présenter la géométrie usuelle sous une forme permettant d'introduire une limitation de ce genre.

2. Position du problème. — Si l'on admet l'existence du rayon fini de l'électron, cela signifie que, dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires au repos par rapport à ce dernier, les axiomes

de la géométrie métrique usuelle ne sont plus valables au delà de la sphère minima définie par l'équation :

$$r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 ; \quad (1)$$

nous ne savons pas encore si tous les axiomes de la géométrie — même les axiomes purement topologiques — sont en défaut, ou si c'est seulement une partie des notions géométriques habituelles qui perd sa signification dans des domaines spatiaux aussi petits, mais nous sommes sûrs que les axiomes métriques, en vertu de (1) ne peuvent continuer à être admis sans conteste.

D'autre part, il paraît raisonnable d'admettre que la limitation indiquée par (1) est indépendante de la nature physique du corpuscule élémentaire ou du système de corpuscules élémentaires (noyaux atomiques) considérés ; nous devons nous attendre à ce que, dans certains cas, le quantum de longueur soit plus grand que r_0 , mais jamais plus petit ; c'est d'ailleurs ce que l'expérience confirme, car les dimensions des noyaux et la longueur d'onde de Compton relative au proton $\frac{h}{M_p c}$ sont justement de l'ordre de grandeur de r_0 ; il est difficile de ne voir là qu'une coïncidence ; d'autre part, nous savons que l'interprétation des propriétés nucléaires exige une modification de nos conceptions habituelles, en particulier en ce qui concerne la loi de Coulomb, qui régit la

(1) HEISENBERG. *Ann. der Phys.*, 1938, **32**, 20 ; *Z. Physik*, 1938, **110**, 251 ; voir également : N. BOHR, Congrès de Physique nucléaire Rome, 1932, p. 119 ; A. MARCH, *Z. Physik*, 1936, **104**, 93 ; J. SOLOMON, *J. Physique*, 1931, p. 321.

(2) *Handbuch der Physik*. Quantentheorie.

théorie des champs ; comme, depuis Einstein, nous sommes habitués à associer intimement celle-ci à la structure de l'espace, nous sommes conduits à l'idée que cette dernière doit différer notablement, à l'échelle nucléaire, de la structure spatiale habituelle.

D'un autre côté, la localisation spatiale de constituants élémentaires à l'intérieur du domaine nucléaire, suivant les méthodes de la géométrie métrique, n'est certainement pas possible ; on en trouve la preuve dans un raisonnement de Bohr ⁽¹⁾ pour calculer le défaut de masse des noyaux en fonction de leurs dimensions ; si r_0 représente le rayon de l'atome d'hélium et si l'on admet que la position d'un proton à l'intérieur du noyau d'hélium ne peut pas être déterminée avec une précision supérieure à r_0 , le domaine de variation Δp de la quantité de mouvement du proton est fixé dans ces conditions par la relation d'incertitude :

$$\Delta p \sim \frac{h}{2\pi r_0} \quad (2)$$

ce qui donne pour la particule l'énergie cinétique moyenne :

$$\bar{E}_{\text{cin}} \sim \frac{1}{2M} \left(\frac{h}{2\pi r_0} \right)^2 \quad (M = \text{masse du proton}) \quad (3)$$

le défaut de masse de l'hélium est alors de :

$$4 \times \frac{1}{2M} \left(\frac{h}{2\pi r_0} \right)^2 = 0,01 \times Mc^2 \quad (4)$$

alors que la valeur expérimentale est de : $0,029. Mc^2$; les deux valeurs sont donc du même ordre de grandeur ; on en conclut que la spécification de la position des particules lourdes à l'intérieur du noyau d'hélium ne doit pas avoir grande signification physique et que c'est cette incertitude sur la position qui est en grande partie responsable de l'énergie de liaison du noyau d'hélium.

La constante r_0 paraît donc traduire une limitation universelle de la possibilité d'application des procédés de mesure de la géométrie métrique à la physique nucléaire et non à l'électron seul.

Nous admettrons, à titre expérimental, que, dans tout domaine spatial de dimensions linéaires de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm, les axiomes de la géométrie métrique sont en défaut ; il doit donc en être ainsi, si notre hypothèse est exacte, à l'intérieur des noyaux atomiques et des particules matérielles élémentaires, quelles que soient leur charge et leur masse propre.

Si nous voulions tenir compte des exigences de la relativité restreinte, nous devrions évidemment remplacer la condition (1) par la condition invariante, portant sur l'intervalle d'univers :

$$\pm r_0^2 = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2, \quad (5)$$

⁽¹⁾ N. BOHR. *Loc. cit.* ; HEISENBERG. Rapport au Congrès Solvay, 1933, Structure et propriétés des noyaux atomiques.

dont (1) constitue la projection sur l'hyperplan spatial $t = t_0$ ⁽¹⁾, avec le choix du signe —.

La signification de la condition (1) est très particulière ; on ne peut pas interpréter cette dernière en disant que l'espace est constitué par une sorte de réseau dont les mailles auraient la longueur r_0 ; en effet, la théorie des champs nous montre que l'interaction coulombienne $\pm \frac{KZe^2}{r^2}$ entre deux particules de charges respectives $\pm Ke$ et $\pm Ze$, supposées ponctuelles, de vitesse relative petite par rapport à c , et à la distance r l'une de l'autre à l'instant t , varie d'une manière continue lorsque r varie : le terme longitudinal d'action coulombienne n'est pas quantifié ; par conséquent r varie lui-même d'une manière continue, sans restriction ; l'expérience nous apprend seulement qu'il existe une distance minima r_0 , au-dessous de laquelle la loi de Coulomb cesse justement d'être applicable, et où on ne peut pas se servir de la notion usuelle de distance.

Nous avons donc affaire à une limitation d'un caractère spécial, ce qui nous montre que la solution de la difficulté ne peut certainement pas être recherchée dans le recours à un espace lacunaire ou ponctué dans lequel la distance r ne serait jamais susceptible que de variations discontinues, multiples entiers de r_0 (par exemple, les espaces de Linsfield) ; autour d'un point pris comme centre, nous pouvons tracer des sphères concentriques de rayon r de plus en plus grand et telles que deux sphères de la famille ayant respectivement pour rayons r et $r' > r$ peuvent être aussi rapprochées l'une de l'autre que nous le voulons ($[r' - r]$ peut être infinitésimal), mais la famille commence, non à la sphère de rayon nul, mais à celle de rayon minimum r_0 .

Une quantification correcte de la géométrie doit rendre compte de ce fait ; pour trouver le moyen d'introduire cette quantification et d'expliquer ainsi la stabilité des corpuscules élémentaires, reportons-nous au problème analogue qui s'est posé à la mécanique ondulatoire, quand il s'est agi d'interpréter la stabilité des orbites électroniques et rappelons comment elle l'a résolu : en général, pour une particule libre, les conditions de l'optique géométrique sont vérifiées et la théorie classique est valable dans ce cas pour tout l'espace ; ce n'est que dans l'intérieur de l'atome, c'est-à-dire dans des domaines très petits qu'il est nécessaire d'introduire des conditions de Quanta qui définissent les états stationnaires ; ces conditions de Quanta sont rendues inévitables par le fait que l'optique géométrique n'est plus valable dans ce domaine.

Notre façon de procéder consistera à rapprocher les deux problèmes, celui de la stabilité de l'atome de Bohr et celui de la stabilité des corpuscules élémen-

⁽¹⁾ Cette projection est admissible dans le cas de phénomènes qui varient lentement au cours du temps, comme on le verra par la suite.

taires et à rechercher s'ils n'admettent pas des solutions analogues ; cela va nous conduire à nous demander si, de même que la mécanique classique peut être regardée comme une optique géométrique d'un caractère particulier (conditionnée par la constante h puisque $S = \frac{h\varphi}{2\pi}$) les procédés de la géométrie métrique

ne pourraient pas être assimilés à ceux d'une optique géométrique spéciale, que nous regarderons provisoirement comme tout à fait indépendante de celle qui est associée par L. de Broglie à la mécanique classique ; l'optique ondulatoire qu'il serait nécessaire d'introduire quand se présenteraient dans cette géométrie les phénomènes de diffraction serait alors responsable de la défaillance des principes de la géométrie métrique dans le domaine nucléaire et électronique et rendrait compte en même temps de la stabilité des corpuscules élémentaires et de leurs assemblages ; ce programme étant tracé, voyons comment nous allons passer à son exécution.

3. Exposé de la méthode suivie. — Nous voulons démontrer que lorsque l'on aborde des domaines spatiaux de l'ordre de grandeur de $r_0 \sim 10^{-13}$ cm, la géométrie métrique usuelle doit laisser la place à une sorte de géométrie « quantique » ou « ondulatoire » dont l'un des objectifs principaux est de prévoir une limitation caractéristique de la notion de longueur et d'écarter les difficultés qui s'opposent à l'édification d'une théorie cohérente des édifices nucléaires.

Le raisonnement suivi pour parvenir à ce but comporte plusieurs articulations que nous allons mettre en évidence pour la clarté de l'exposition ; tout d'abord, nous allons montrer que la mise en équation d'un problème de dynamique des systèmes en mécanique newtonienne, qui consiste, comme on le sait, à déterminer la forme fonctionnelle de l'équation d'Hamilton-Jacobi $\frac{\partial S}{\partial t} + H(p_i, q^i) = 0$, est entièrement équivalente à la détermination de la métrique riemannienne d'une extension en configuration E'_n dont les coordonnées q^1, \dots, q^n seront définies plus loin ; une fois ce point établi, nous établirons une sorte de réciproque en montrant que la détermination métrique d'un espace ponctuel quelconque E_n défini par les coordonnées x^1, \dots, x^n revient à se donner dans cet espace une famille de surfaces $F(x^1, \dots, x^n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = C$, définie par une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre entièrement analogue à l'équation d'Hamilton-Jacobi de la mécanique analytique, ce qui équivaut à mettre la géométrie métrique sous forme d'un schéma hamiltonien ; la détermination métrique d'un tel espace s'effectue donc au moyen des procédés connus de la mécanique analytique, qui ont ainsi une portée plus générale que celle qui leur est d'ordinaire attribuée.

(1) S'étant l'action hamiltonienne, μ la phase.

Les méthodes de la géométrie métrique et celles de la mécanique analytique étant ainsi reconnues équivalentes, nous introduirons l'analogie bien connue depuis Hamilton et de Broglie entre les procédés de cette dernière et ceux de l'optique géométrique ; en raison de l'équivalence entre la mécanique analytique et la géométrie métrique, précédemment démontrée, nous pourrions alors établir l'équivalence des procédés de la géométrie métrique et de l'optique géométrique, en introduisant une fonction d'onde $\chi = e^{i\varphi}$, une surface de phase φ proportionnelle à la quadrique qui fixe la métrique en chaque point et une longueur d'onde λ , qui sert d'ailleurs de coefficient de proportionnalité.

Il restera à étudier les conditions de validité de cette optique géométrique ; on trouvera que cette dernière est en défaut chaque fois que la longueur d'onde λ est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure R de l'espace ; pour que l'optique géométrique ne soit pas valable, la première condition à remplir est donc que la géométrie soit non-euclidienne ; nous admettrons que cette éventualité se produit dans le domaine nucléaire, ce qui revient à supposer R de l'ordre de grandeur de la constante $r_0 \sim 10^{-13}$ cm ; l'optique géométrique ainsi définie est évidemment distincte de celle de de Broglie.

4. Le problème fondamental de la dynamique analytique et la géométrie métrique de l'extension en configuration qui lui est associée.

— Considérons un système matériel qui se déplace dans l'espace euclidien ordinaire en fonction du temps newtonien t ; soient q^1, \dots, q^n , les coordonnées généralisées du système, $V(q^1, \dots, q^n)$ son énergie potentielle, $2T = a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$ son énergie cinétique, E son énergie totale constante ; la fonction d'action qui décrit l'état du système à chaque instant est : $S = S^0 - Et$; en particulier, si le système matériel considéré est regardé comme un point dans l'extension en configuration définie par les q^1, \dots, q^n , la trajectoire suivie par un tel point matériel entre deux positions quelconques sera définie par la condition : $\delta \int dS^0 = 0$ avec :

$$dS^0 = \sqrt{2(E - V)} \sqrt{a_{ik} dq^i dq^k} = \sqrt{2(E - V)} ds \quad (6)$$

où $ds = \sqrt{a_{ik} dq^i dq^k}$ est l'élément linéaire fondamental qui définit conventionnellement la métrique de l'espace $q^{(1)}$; le problème de la dynamique des systèmes est ainsi ramené à un problème de dynamique du point matériel dans l'espace q ; à son tour, ce dernier peut être réduit à un problème purement géométrique, en introduisant une extension en configuration nouvelle, dont les coordonnées q^i sont telles que :

$$dq^i = \sqrt{2(E - V)} dq^i \quad (7)$$

(1) Ce procédé a été utilisé en particulier par SCHRÖDINGER, Mémoires sur la Mécanique ondulatoire. tr. Proca, Alcan, éd., p. 22 ; voir également L. BRILLOUIN, Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité, Masson, éd., p. 137.

et qui est par conséquent applicable conformément sur la multiplicité définie par les q^i ; l'action maupertuisienne s'écrira alors :

$$\int dS^0 = \int \sqrt{a_{ik} dq^i dq^k} \quad (8)$$

en fonction des q^i et l'élément linéaire de cet espace sera entre 2 points P et Q :

$$\int_P^Q ds' = \int_P^Q \sqrt{a_{ik} dq^i dq^k} = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma_1} dS^0 \quad (9)$$

(Σ_0 est la surface qui passe par P , Σ_1 celle qui passe par Q).

On voit donc que l'action maupertuisienne peut être regardée comme définissant une surface ou une famille de surfaces dans l'extension q' ; la distance de deux surfaces voisines de la famille donne l'élément linéaire de l'espace; la connaissance de dS^0 est donc absolument équivalente à celle de l'élément linéaire qui définit la métrique de l'espace q' ; nous connaissons donc la nature de la géométrie métrique qui règne en chaque point de l'espace q' , si nous avons pu résoudre le problème mécanique qui consiste en la détermination de la fonction S^0 ou encore l'équation de l'énergie relative à S^0 ; on précise la relation entre les surfaces S^0 et les trajectoires de longueur ds' qui en sont les caractéristiques de la manière suivante : étant donnée une surface $S^0 = C^{te}$, choisie parmi la famille des surfaces $S = S^0(q^1, \dots, q^n)$ — Et exprimée en fonction des q' de manière à pouvoir être regardée comme une fonction de points dans l'extension q' , on définit les trajectoires orthogonales à cette surface en chaque point de la manière suivante⁽¹⁾ : la condition de perpendicularité des deux directions dq^i et δq^i dans l'espace q' étant donnée par :

$$a_{ik} dq^i \delta q^k = 0 \quad (10)$$

et tout déplacement δq^h effectué sur la surface $S^0 = C^{te}$ satisfaisant à :

$$\frac{\partial S^0}{\partial q^k} \delta q^k = 0, \quad (11)$$

⁽¹⁾ Voir figure.

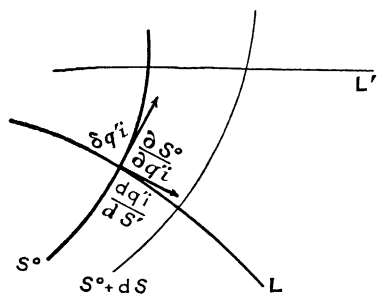


Fig. 1

on exprime que la ligne L qui a en q^i la direction dq^i est perpendiculaire en ce point à la surface S^0 en écrivant que :

$$a_{ik} dq^i \delta q^k = 0, \quad (12)$$

la différentielle d se rapportant à un déplacement sur la ligne et la différentielle δ à un déplacement sur la surface (voir fig. 1); les vecteurs de composantes $a_{ik} \frac{dq^k}{ds'}$ et $\frac{\partial S^0}{\partial q^i}$ sont donc collinéaires puisqu'en vertu de (11) le vecteur $\frac{\partial S^0}{\partial q^i}$ est orthogonal à la surface S^0 en q^i ; il est facile de voir que l'on a :

$$a_{ik} \frac{dq^k}{ds'} = \frac{\partial S^0}{\partial q^i} \quad (13)$$

en raison de (9), si le déplacement $dS^0 = \frac{\partial S^0}{\partial q^i} dq^i$ de la surface S^0 s'effectue normalement à S^0 en q^i en fonction de l'arc s' ; en effet, dans ces conditions :

$$a_{ik} \frac{dq^i}{ds'} \frac{dq^k}{ds'} = \frac{\partial S^0}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds'} = 1. \quad (14)$$

en raison de (9); finalement on obtient :

$$a_{ik} \frac{dq^i}{ds'} \frac{dq^k}{ds'} = a^{ik} \frac{\partial S^0}{\partial q^i} \frac{\partial S^0}{\partial q^k} = 1; \quad (15)$$

le membre de gauche de la relation (15) peut être pris comme définition du carré de la longueur du vecteur unité $u^i = \frac{dq^i}{ds'}$ en q^i ; suivant la définition usuelle, nous pouvons admettre que l'espace q' est pourvu en chaque point q^i d'une détermination métrique quand nous aurons spécifié ce que nous entendons par longueur d'un vecteur unitaire u^i attaché en q^i ; l'équation :

$$a_{ik} u^i u^k = 1 \quad (16)$$

définit donc la métrique; mais en raison de (15), cette équation est identique à :

$$a^{ik} \frac{\partial S^0}{\partial q^i} \frac{\partial S^0}{\partial q^k} = 1, \quad (17)$$

équation différentielle qui définit la famille de surfaces S^0 dont les géodésiques de l'espace q^i sont les trajectoires orthogonales, comme le montre l'équation aux variations :

$$\delta \int dS^0 = \delta \int ds' = 0 \quad (18)$$

On peut donc définir en chaque point la métrique de l'espace q' par deux procédés entièrement équiva-

⁽¹⁾ Voir G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 11, p. 480; APPELL, Traité de Mécanique et L. BRILLOUIN, loc. cit.

lents : le premier, qui est généralement usité, consiste à se donner en chaque point un vecteur unitaire u^i et la condition (16), qui définit le carré de la longueur de ce vecteur ; le second consiste à se donner la famille de surfaces S^0 , ou plutôt l'équation aux dérivées partielles (17) qui définit implicitement cette famille de surfaces comme famille de quadriques ; l'équation (17) n'est pas autre chose que l'équation d'Hamilton-Jacobi de la mécanique analytique ; en effet, nos définitions nous donnent, en faisant le changement de variables (7) dans (17) :

$$\frac{1}{2} a^{ih} \frac{\partial S^0}{\partial q^i} \frac{\partial S^0}{\partial q^h} + V = E, \quad (19)$$

ce qui est bien l'équation en question ; quand le problème mécanique se rapporte à un point matériel unique, on a, en coordonnées cartésiennes rectangulaires : $q^i = x, y, z$ et $a^{ih} = \frac{1}{m} \delta^{ih}$, m étant la masse du point matériel.

5. Définition de la métrique riemannienne par les procédés de la mécanique analytique. —

Nous venons de montrer que la dynamique newtonienne des systèmes peut être assimilée à une géométrie métrique riemannienne dans l'extension en configuration E'_n ; ce sont naturellement les procédés de la dynamique qui ont dans ce cas une signification concrète, l'espace E'_n étant purement figuratif ; mais ce qui nous intéresse, c'est justement le cas en quelque sorte réciproque : l'espace concret étant donné avec sa métrique, peut-on montrer que les procédés employés pour parvenir à la détermination de cette métrique sont équivalents à ceux d'une mécanique analytique correspondante (d'où, naturellement, les grandeurs physiques auront été éliminées, comme on le verra plus loin).

Plus généralement, étant donné un espace E_n pourvu d'une métrique riemannienne, est-il possible de montrer que la détermination d'une telle métrique en chaque point de E_n revient à se donner dans cet espace une équation aux dérivées partielles comparable à l'équation d'Hamilton-Jacobi, permettant de fixer une famille de surfaces dont les trajectoires orthogonales sont les géodésiques de E_n ?

La réponse, comme nous allons le voir est affirmative ; en gros, on peut dire que fixer la métrique d'un espace donné consiste à se donner une famille de lignes qui définissent la distance d'un point à un autre et qui peuvent être regardées comme les caractéristiques, au sens d'Hadamard, d'une famille de surfaces, solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi ; dans certains cas particuliers privilégiés, les lignes ainsi définies coïncident avec les trajectoires de la dynamique du point matériel ; le choix d'une forme quadratique pour le carré de l'élément linéaire est équivalent au choix d'une forme quadratique pour le carré de la fonction de Hamilton correspondante ; naturellement, on

peut faire des choix différents qui conduiront à des métriques plus générales, comme celle de Finsler, par exemple ; nous nous en tiendrons à la métrique riemannienne.

Soient x^1, \dots, x^n les coordonnées générales d'un espace de Riemann E_n ; soit :

$$ds^2 = g_{ih} dx^i dx^h \quad (20)$$

le carré de l'élément linéaire qui fixe la métrique en chaque point, les g_{ih} étant les composantes du tenseur métrique fondamental d'Einstein ; ds est l'arc d'une certaine ligne L (la géodésique) qui joint les points P et Q infiniment voisins ; imaginons que le petit déplacement $dx^i = \frac{dx^i}{ds} ds$ le long de la ligne L soit orthogonal en P à la surface :

$$F(x^1, \dots, x^n) = C^te \quad (21)$$

et que le déplacement δx^i s'effectue sur la surface en sorte que l'on a comme tout à l'heure :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \delta x^i = 0; \quad (22)$$

les déplacements dx^i perpendiculaires à la surface F sont donc définis par :

$$g_{ih} dx^i \delta x^h = 0 \quad (23)$$

d'où, si les conditions (22) et (23) doivent être équivalentes pour des δx^i quelconques.

$$g_{ih} \frac{dx^h}{ds} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x^i} \quad (24)$$

λ étant un facteur de proportionnalité qu'on peut toujours poser égal à 1 ; on a alors comme précédemment :

$$g_{ih} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^h}{ds} = g^{ih} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^h} = 1; \quad (25)$$

$dF = \sqrt{g_{ih} dx^i dx^h}$ est la quadrique élémentaire qui définit la métrique en P ; l'équation (25) est analogue à l'équation d'Hamilton-Jacobi étudiée précédemment, mais la surface F n'a plus rien à voir avec l'action hamiltonienne et se définit uniquement par des considérations purement géométriques.

Ainsi, dans tout espace de Riemann, on peut toujours construire une famille de surfaces F telles que les lignes L dont l'arc détermine la distance de deux points P et Q , conformément aux principes de la géométrie métrique définis par (20) soient les trajectoires orthogonales en chaque point à cette famille de surfaces ; nous montrerons plus loin, dans le cas particulier de l'espace euclidien comment une équation telle que :

$$\int dF = \int \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} \quad (26)$$

peut être regardée comme l'équation directrice d'une transformation de contact qui permet de définir les grandeurs géométriques canoniquement conjuguées aux x^i .

En fait, la mise en équation du problème qui se pose à la mécanique analytique et à la géométrie métrique est effectuée quand on a donné les équations différentielles définissant une certaine famille de courbes dans un espace donné sous la forme :

$$\frac{dy^i}{ds} = j^i(Y^k, s) \tag{27}$$

$$\left(\text{avec } \begin{cases} i = l, \dots, n \\ k = l, \dots, 2n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} i = l, \dots, 2n \\ k = l, \dots, 2n \end{cases} \right)$$

équations qui sont d'ailleurs équivalentes à la seule équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial S}{\partial s} + H(Y^k, s) = 0; \tag{28}$$

pour la mécanique analytique, les courbes ainsi définies sont les trajectoires parcourues par le point matériel dans des conditions déterminées par la nature du problème.

La géométrie métrique requiert de même l'intervention des courbes définies par (27), mais dans un but différent, qui consiste à déterminer la distance de deux points quelconques ; pour le faire, on est obligé de faire passer par ces deux points une courbe de propriétés bien définies ; naturellement, la nature de cette courbe est indépendante des points considérés, ou encore du point initial et de la direction de la courbe en ce point ; elle appartient donc à une famille à $(2n - 1)$ paramètres de géodésiques ; leur longueur donne la mesure de la distance entre deux points.

Du reste, la condition $\delta \int ds = 0$ qui définit l'une des propriétés fondamentales de la droite est identique de forme au principe de variation de la mécanique qui définit les géodésiques d'un espace figuratif ; on peut donc bien associer un schéma dynamique spécial à l'espace métrique.

6. Relations entre la géométrie métrique de l'extension E'_n et l'optique géométrique. — L'origine de la mécanique ondulatoire a été la relation de de Broglie, que nous avons rappelée précédemment :

$$S = \frac{h}{2\pi} \varphi \tag{29}$$

entre l'action hamiltonienne S et la phase φ d'un phénomène périodique défini par la fonction d'onde :

$$\psi = e^{i\varphi} = e^{\frac{2\pi i}{h}(S^0 - Et)}; \tag{30}$$

qu'en résulte-t-il pour la détermination métrique dans l'espace E'_n ? Si l'on substitue à S^0 la phase :

$$\varphi^0 = \frac{2\pi}{h} S^0$$

l'équation (17) donne :

$$a^{ih} \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^i} \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^h} = \frac{4\pi^2}{h^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \tag{31}$$

$$\lambda = h \tag{32}$$

est la longueur d'onde associée au processus ondulatoire déterminé par les surfaces de phase φ^0 dans l'extension E'_n ; en effet (13) est maintenant remplacé par :

$$a_{ih} \frac{dq^i}{ds'} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^h} \tag{33}$$

ce qui permet d'écrire :

$$a_{ih} \frac{dq^i}{ds'} \frac{dq^h}{ds'} = 1$$

sous la forme :

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^h} \frac{dq^h}{ds'} = 1, \tag{34}$$

d'où :

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{d\varphi^0}{ds'}, \tag{35}$$

la différentielle $d\varphi^0$ étant relative à un déplacement qui s'effectue sur la courbe normale à la surface en q^i ; on voit alors que λ n'est pas autre chose que la longueur qu'il faut compter le long de la courbe pour obtenir un déplacement corrélatif unité de la surface φ_0 supposée entraînée dans le déplacement ; c'est donc en même temps la mesure du chemin qu'il faut parcourir le long de la courbe donnée pour que le phénomène périodique décrit par ψ se retrouve en phase ; c'est donc bien la longueur d'onde, qui est ainsi une constante universelle ; naturellement, ce fait est dû à notre choix particulier de l'extension en configuration ; en effet, si on prenait l'extension habituelle q

définie par $dq^i = \frac{dq^i}{\sqrt{2(E-V)}}$, on aurait :

$$a^{ih} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^h} = \frac{8\pi^2(E-V)}{h^2}, \tag{36}$$

et pour un point matériel unique, avec des coordonnées cartésiennes $\left(a^{ih} = \frac{\delta^{ih}}{m} \text{ comme p. 300} \right)$.

$$\delta^{ih} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^h} = \frac{8\pi^2 m (E-V)}{h^2} = \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \tag{37}$$

puisque : $2T = mv^2$; la longueur d'onde dans l'espace q est donc bien la longueur d'onde de de Bro-

glie $\lambda = \frac{h}{m\nu}$; toutefois, dans la géométrie ondulatoire que nous voulons développer, la longueur d'onde se présentera toujours sous l'aspect particulièrement simple donné par (32).

Si nous regardons maintenant comme rigoureuse l'équation des ondes de de Broglie :

$$\Delta\psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

ou

$$\begin{aligned} a^{ih} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^i \partial q^h} + \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} a^{ih} + \frac{8\pi^2 (E - V)}{h^2} \psi \\ = a^{ih} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^i \partial q^h} + a^{ih} \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} + \frac{4\pi^2}{h^2} \psi = 0 \end{aligned}$$

dans l'espace q' , ce qui revient à considérer les trajectoires définies par (18) comme les bicaractéristiques, au sens d'Hadarnard, de (38), il y aura des cas où la détermination de la métrique dans des domaines bien définis de l'espace E'_n deviendra impossible; en effet, cette détermination est liée par l'identité (15) à la validité de l'équation d'optique géométrique (31); or,

en posant $\psi = e^{i\varphi} = e^{i\varphi_0 - \frac{2\pi i}{h} Et}$ et en substituant dans (38), on obtient, comme L. Brillouin ⁽¹⁾ :

$$a^{ih} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q^h} - \frac{4\pi^2}{h^2} = i\Delta\varphi_0 \quad (39)$$

si bien que la détermination métrique de l'espace E'_n n'est possible que si la courbure de la surface φ n'est pas trop accentuée dans le domaine de la longueur d'onde, c'est-à-dire en l'absence des phénomènes de diffraction; on voit clairement que de tels phénomènes se présentent quand la métrique de l'espace E'_n est telle que les trajectoires orthogonales aux surfaces S^0 , qui conditionnent cette métrique, constituent des géodésiques fermées, de sorte qu'une surface mobile en fonction du temps de manière à coïncider successivement avec chacune des surfaces S^0 de la famille, revient sur elle-même et que cette circonstance se présente dans un domaine de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ : le rayon de courbure R de l'espace E'_n dans cette région est comparable à λ ; il est essentiel que cette condition soit réalisée, car si l'espace E'_n est partout euclidien, le rayon de courbure est infini et l'approximation de l'optique géométrique est toujours valable; on sait que la condition $R \sim \lambda$ est réalisée pour un électron ponctuel parcourant son orbite dans l'atome de Bohr; dans ces conditions, il est impossible de définir dans les domaines correspondants de E'_n la métrique de cet espace; on peut voir comment se présente l'impossibilité de cette détermination simplement en ayant recours aux anciennes conditions de quanta de Bohr-Sommerfeld

et aux relations d'incertitude d'Heisenberg; nous avons, en effet, dans l'atome :

$$\oint dS^0 = \oint \sum_i p^i dq^i = nh, \quad (40)$$

si les q^i sont les coordonnées oscillantes spéciales de Sommerfeld; en raison de la relation (9) on en déduit que la longueur des trajectoires de l'espace E'_n correspondant, qui sont dans ce domaine des géodésiques fermées, est égale à nh ; l'application de la relation d'incertitude donne d'ailleurs :

$$\Delta S^0 \geq h \quad (41)$$

en sorte que l'incertitude sur la longueur de la trajectoire ou la distance de deux points dans ce domaine de E'_n est égale au moins à h ; d'autre part, en dehors de ce domaine, comme les conditions de l'optique géométrique sont vérifiées, une telle limitation est superflue; on voit l'analogie avec le fait signalé plus haut que la limitation des procédés de la géométrie métrique n'avait lieu que dans les domaines spatiaux occupés par les corpuscules élémentaires et non dans l'espace ambiant, où la loi de Coulomb est valable.

Naturellement, il faut supposer que toutes les géodésiques tracées dans le domaine litigieux sont atteintes par les conditions de quanta et pas seulement celles qui sont effectivement suivies par l'électron; en fait l'espace E'_n est purement figuratif et son caractère riemannien conventionnel et il ne faudrait pas pousser trop loin l'analogie.

La mécanique ondulatoire ou même l'ancienne théorie quantique de Bohr-Sommerfeld nous apparaissent ainsi comme une véritable limitation de la validité de la géométrie métrique d'un certain espace de configuration E'_n , la notion de longueur au sens strictement métrique du terme, étant seule atteinte par les conditions de quanta; il existe ainsi des régions de l'espace E'_n où l'on ne peut pas déterminer de distance entre deux points, P et Q plus petite que h ; remarquons que h joue à la fois dans ces conditions le rôle de quantum élémentaire de longueur et de longueur d'onde du phénomène périodique associé; cela tient à ce que, comme l'a fait remarquer L. Brillouin, ⁽¹⁾ la longueur d'onde joue le rôle de l'étalon naturel de longueur.

7. Relations entre les espaces métriques et l'optique géométrique. — Il reste à franchir une dernière étape pour parvenir à notre but; au lieu de l'espace fictif E'_n , nous devons faire intervenir, comme au paragraphe 5, l'espace physique ou l'espace-temps, si nous voulons tenir compte de la relativité, et lui associer de même une optique géométrique; pour plus de généralité, nous considérons l'espace n -dimensionnel E_n du paragraphe 5.

⁽¹⁾ *J. de Physique*, 1926, p. 321.

⁽¹⁾ L. BRILLOUIN - Les tenseurs en mécanique et en élasticité, MASSON, éd. 1938, p. 195.

On parvient à introduire les considérations et les procédés de l'optique en introduisant dans l'espace E_n un phénomène périodique défini en chaque point par la fonction d'onde :

$$\chi = e^{i\varphi} \tag{42}$$

ou par :

$$\varphi = \frac{1}{i} \log \chi \tag{42'}$$

où $\varphi(x^1, \dots, x^n) = C$ est le facteur de phase ; ici, il semble que nous soyons obligés de faire appel à une hypothèse étrangère à la géométrie, puisque nous postulons sans justification d'aucune sorte l'existence du phénomène périodique dans l'espace physique, exactement comme L. de Broglie dans ses premiers travaux ; ce phénomène périodique est alors aussi étranger à la structure de l'espace physique que la théorie des champs dans la physique newtonienne ; le progrès essentiel accompli par Einstein a consisté à montrer, au moins dans le cas du champ gravifique, que l'existence des champs de forces était étroitement liée à la nature même de l'espace-temps ; la mécanique ondulatoire de de Broglie-Schrödinger-Dirac se trouve donc par rapport à la fonction d'onde dans la même situation que la physique newtonienne par rapport à la théorie des champs : la fonction ψ et les champs n'ont rien à voir avec la nature de l'espace ; il semblerait que nous adoptions le même point de vue en introduisant sans justification (42) ; mais nous montrerons plus loin que (42') n'est qu'un aspect de la formule purement géométrique de Cayley, d'où l'on peut déduire les métriques non euclidiennes (φ peut être alors purement imaginaire et χ a une signification purement géométrique) ; nous procédons donc d'une manière comparable à celle d'Einstein ; mais, pour la clarté de l'exposition, nous préférons montrer tout d'abord pourquoi il est nécessaire de faire appel aux géométries non euclidiennes si nous voulons justifier la nécessité de l'introduction des considérations ondulatoires ; l'intervention de la formule de Cayley viendra plus tard.

Nous admettons que la phase φ est liée à la surface F définie précédemment par la relation :

$$F = \lambda \varphi \tag{43}$$

où λ est une constante universelle dont il est facile de spécifier la nature ; en effet, elle correspond à la longueur d'onde du phénomène, ce que l'on peut montrer par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent ; la relation (25) devient alors :

$$g^{ih} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^h} = \frac{1}{\lambda^2} g_{ih} u^i u^h = \frac{1}{\lambda^2} \tag{44}$$

avec :
$$g_{ih} u^i = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x^h} ; \tag{45}$$

(44) est appelé l'équation de l'optique géométrique ; les surfaces φ de la famille, solutions de cette équation,

se déduisent l'une de l'autre par la construction d'Huyghens ; une surface mobile qui se déplace en fonction d'un paramètre en coïncidant successivement avec chacune des surfaces fixes, progresse dans l'espace E_n comme le ferait un front d'onde ; naturellement, ce déplacement n'a pas besoin de correspondre à un mouvement réel, puisque nous restons dans le domaine de la géométrie.

Nous supposons que la constante λ est égale au facteur fondamental $r_0 \sim 10^{-13}$ cm, dont nous avons précédemment rappelé le rôle en physique atomique ; si nous voulons que l'optique géométrique ne soit plus valable dans des domaines spatiaux de cette dimension, nous sommes obligés d'admettre que l'espace y possède une courbure et que cette courbure a la valeur énorme 10^{26} cm⁻² ; à l'extérieur de ces domaines, occupés par les particules élémentaire est les noyaux, il n'est plus question de courbure ; r_0 jouera alors dans l'espace physique un rôle comparable à celui de la constante de Planck dans l'extension en configuration E'_n que nous avons étudiée précédemment.

8. Définition de la métrique euclidienne au moyen d'un schéma hamiltonien. — Nous allons brièvement indiquer sur un exemple comment la spécification de la métrique est équivalente à un schéma hamiltonien ; nous avons pris comme exemple la métrique euclidienne ; si nous voulons symboliser le fait qu'en chaque point de l'espace euclidien ordinaire (x, y, z) on peut procéder à des mesures de distances dans toutes les directions à partir d'un point donné $P(x^0, y^0, z^0)$, nous devons mettre en évidence le fait que la formule de distance :

$$r^2 = (x - x^0)^2 + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2 \tag{49}$$

est valable quel que soit r et pour une valeur donnée de r , quel que soit le point x, y, z ; cela revient à associer au point P la famille de sphères concentriques :

$$F(x, y, z; x^0, y^0, z^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - x_0^i)^2} \tag{49}$$

le point P étant arbitraire, x^0, y^0, z^0 sont des constantes arbitraires ; (49) représente alors l'équation directrice d'un groupe de transformations de contact, qui exprime la possibilité du transport d'étalons rigides au sens euclidien, dans toutes les directions quels que soient P et r ; différentions (49) en tenant compte de ces arbitraires ; on a :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial x_0^i} dx_0^i = p_i dx^i - p_i^0 dx_0^i, \tag{50}$$

(¹) Nous appellerons tour à tour les coordonnées x, y, z ou x^i ($i = 1, 2, 3$) pour les besoins de l'écriture.

ce qui est bien l'équation de Pfaff génératrice de la transformation ; les p_i sont canoniquement conjugués aux x^i ; ce sont des coefficients de direction, définis par :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = p_i = \frac{x^i - x_0^i}{\sqrt{\sum_i (x^i - x_0^i)^2}} = \frac{x^i - x_0^i}{r};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0^i} = -p_i = -p_i; \quad (51)$$

les relations (51) sont bien formellement identiques à celles que donne la mécanique analytique ; les formules de la transformation de contact considérée, que j'ai déjà étudiée dans un précédent article ⁽²⁾, sont :

$$x^i = x_0^i + \frac{p_i}{\sqrt{\sum_i p_i^2}} r = x_0^i + a^i, \quad (52)$$

avec :

$$a^i = \frac{p_i}{\sqrt{\sum_i p_i^2}} r; \quad (52)$$

elles expriment bien la possibilité d'un déplacement d'éталons rigides dans toutes les directions à partir de P ; au point P correspond alors la sphère (49) ; définissons une fonction H des x et des p par :

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 1; \quad (53)$$

la transformation (52) peut être déterminée par l'intégration des équations canoniques :

$$\frac{dx^i}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{p_i}{\sqrt{\sum_i p_i^2}} = p_i = \frac{x^i - x_0^i}{r};$$

$$\frac{dp_i}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = 0, \quad (54)$$

en remarquant que $H = \sqrt{\sum_i p_i^2} = 1$, on a :

$$x^i = x_0^i + p_i r, \quad \text{d'où} \quad \sum_i (x^i - x_0^i)^2 = \sum_i p_i^2 r^2$$

et :

$$\sqrt{\sum_i (x^i - x_0^i)^2} = \sqrt{\sum_i p_i^2} r = Hr;$$

considérons les surfaces : $F = F^0 - Hr$; elles satisfont bien à l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + H(x^i, p_i) = 0; \quad (55)$$

⁽²⁾ *J. de Physique*, janvier 1939.

les surfaces concentriques (49) se déduisent l'une de l'autre par la construction d'Huyghens ; aux équations mécaniques qui expriment la conservation de l'impulsion correspondent les équations géométriques $p_i = C^{te}$ qui se déduisent de (52) et expriment la conservation de la direction initialement choisie, quand on suit un rayon r déterminé ; au principe de la conservation de l'énergie $H = E = C^{te}$ correspond le principe de la conservation de la longueur du vecteur unitaire p_i ; la mécanique rationnelle n'a donc nullement le monopole du schéma hamiltonien.

Les mêmes transformations sont valables en relativité restreinte, avec une dimension de plus ; le rôle particulier du temps s'exprime par le fait que le schéma géométrique est remplacé par un schéma cinématique ; l'équation $H = C^{te}$ exprime la constance de la vitesse de la lumière.

9. Définition de la vitesse de phase dans l'espace-temps. — Le caractère cinématique de l'espace-temps permet de démontrer facilement que les surfaces de phase φ se déplacent avec la vitesse de la phase par des considérations purement cinématiques ; le ds^2 étant pris sous la forme :

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3; c\sqrt{g_{44}} = \gamma); \quad (56)$$

on aura en posant :

$$\beta = \frac{v}{\gamma} \quad (57)$$

la relation :

$$ds = \gamma dt \sqrt{1 - \beta^2}; \quad (58)$$

la phase d'univers est :

$$d\varphi = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\gamma^2 dt^2 - dr^2};$$

la longueur d'onde d'univers se définit par la condition :

$$\lambda = \int_{\tau^0}^{\tau^1} \gamma d\tau$$

où τ^0 et τ^1 sont les coordonnées temporelles propres des points-événements séparés par un intervalle de l'ordre de la longueur d'onde d'univers λ ; pour une coupe à temps constant, les trajectoires spatiales sont données par l'extrémale de :

$$\int \frac{d\sigma}{\lambda} = \int d\tau^0 = \int \frac{u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + u_3 dx^3}{\lambda} = \frac{(\vec{v} \cdot d\vec{r})}{\lambda \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (59)$$

(u_i = composantes spatiales de la vitesse d'univers ; \vec{v} = vitesse ordinaire.)

D'autre part, les mêmes rayons peuvent se définir comme les extrémales de $\int \frac{dr}{\lambda'}$ où $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$ et λ' est la longueur spatiale du phénomène périodique : $\lambda' = \int_{t_0}^{t_1} V dt$, V étant la vitesse spatiale de la phase, on a :

$$\lambda = \frac{\gamma}{v_0} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{1}{v_0} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau,$$

et de même pour une vitesse V lentement variable dans le domaine de la longueur d'onde spatiale :

$$\lambda' = V \int_{t_0}^{t_1} dt = VT = \frac{V}{v} \quad \text{avec} \quad v = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

l'égalité $\int \frac{dr}{\lambda'} = \int \frac{d\sigma}{d\lambda}$ donne alors :

$$\int \frac{(\nu dr)}{\gamma \sqrt{1 - \beta^2}} = \int \gamma \frac{dr}{V \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (60)$$

$$\text{d'où :} \quad \nu V = \gamma^2; \quad (61)$$

c'est la formule de de Broglie (1) ; on remarque qu'il n'intervient dans ces considérations ni masse propre, ni charge, ni énergie, ni grandeur physique d'aucune sorte : le schéma est purement cinématique ; nous n'avons eu besoin que d'introduire les vitesses ν et V qui sont fournies par le rôle spécial joué par le temps.

10. Définition de la géométrie métrique homogène comme schéma canonique à partir de la géométrie projective. — On peut montrer par une méthode indépendante, qui se rattache à la définition des coniques de von Staudt (2) que la construction d'une géométrie métrique homogène quelconque suppose la détermination simultanée des notions complémentaires de position et de direction, qui sont caractéristiques du schéma canonique.

Considérons un espace affine n -dimensionnel ; les transformations qui opèrent dans cet espace :

$$x'^i = A^i_k x^k \quad (62)$$

laissent invariant le système de plans :

$$p'_i x'^i = p_i x^i = C^{te}; \quad (63)$$

les x^i forment les composantes d'un tenseur du premier ordre contrevariant, le vecteur ; de même, les p_i forment les composantes d'un tenseur du premier ordre covariant, le doublet ; ces deux grandeurs n'ont pas de relations directes l'une avec l'autre en

géométrie affine ou dans la géométrie projective à $(n - 1)$ dimensions, qui lui est méridiquement isomorphe ; la géométrie métrique est caractérisée par l'intervention de la dualité involutive :

$$p_i = B_{ik} y^k = y_i; \quad p'_i = B'_{ik} y'^k = y'_i \quad (B_{ik} = B_{ki}) \quad (64)$$

alors l'équation (63) devient :

$$B_{ik} x^i y^k = B'_{ik} x'^i y'^k = C^{te} = C; \quad (65)$$

c'est la forme polaire de la forme quadratique :

$$B_{ik} x^i x^k = C \quad (66)$$

qui se définit par la considération des points doubles ; ces considérations appartiennent à la théorie bien connue des polaires réciproques, que nous ne pouvons songer à développer ici (1) ; bornons-nous à constater que (65) est l'équation directrice de la transformation de contact (64) qui peut s'en déduire par les relations :

$$\frac{\partial C}{\partial x^i} = B_{ik} y^k = p_i; \quad \frac{\partial C}{\partial y^k} = B_{ik} x^i = -\pi_k \quad (67)$$

si bien qu'on a encore l'équation de Pfaff :

$$d = \frac{\partial C}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial C}{\partial y^i} dy^i = p_i dx^i - \pi_i dy^i \quad (68)$$

les p_i sont bien conjugués des x^i au sens de la mécanique classique ; ils diffèrent de ceux que nous avons employés précédemment en géométrie euclidienne, car nous avons maintenant : $p_i = x_i$, tandis que dans le paragraphe 8, on avait $p_i = \frac{x^i}{r}$ en posant $x^i_0 = 0$.

Le procédé précédent pour obtenir la géométrie a ceci d'intéressant qu'il permet d'exprimer l'existence d'un domaine où la géométrie métrique n'est plus valable d'une manière analogue à celle par laquelle Heisenberg a défini les limites de validité de la mécanique classique, avant l'apparition de la mécanique ondulatoire ; il suffit pour cela de généraliser les conditions quantiques d'Heisenberg en posant :

$$p_i x^k - p_k x^i = x_i x^k - x_k x^i = \alpha \delta_i^k \quad (68)$$

$$x^i x^k - x^k x^i = 0 \quad (69)$$

$$p_i p_k - p_k p_i = x_i x_k - x_k x_i = 0; \quad (70)$$

ces relations supposent que le tenseur métrique fondamental est un opérateur ; on voit que l'on peut continuer à parler de géométrie affine ou projective dans l'espace x ou dans l'espace p , mais qu'il devient

(1) Voir « Ondes et Mouvements », G. Villars, éd., p. 20.

(2) VON STAUDT. Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, 2, 3 ; Nürnberg, 1860.

(1) Voir les traités de géométrie classiques ; également, L. GODAUX, La géométrie, Paris et Liège, 1931.

impossible de définir la géométrie métrique, si α n'est pas infinitésimal ; de (68) on peut tirer :

$$\Delta p_i \Delta x^i \geq \alpha \quad \text{ou} \quad \Delta x_i \Delta x^i \geq \alpha \quad (71)$$

on voit que α n'est pas autre chose que r_e^2 ; la géométrie métrique est donc acceptable si l'on peut négliger le rayon de l'électron ; on remarque de plus qu'en géométrie euclidienne $p_i = x_i = x^i$, en sorte que α est nécessairement nul ; on voit que l'adoption de la géométrie euclidienne est incompatible avec la non-commutabilité ; cela est en relation avec le fait que les rayons de l'optique géométrique associée à la géométrie euclidienne sont des droites ; l'annulation de la courbure empêche dès lors l'apparition des phénomènes de diffraction.

11. Conclusion de la première partie. — En résumé, de même que la mécanique analytique est associée, suivant le schéma de de Broglie à une optique géométrique L et à une géométrie métrique riemannienne de l'extension en configuration q' , de même une géométrie métrique donnée est associée à un schéma hamiltonien et à une optique géométrique M ; la validité de l'optique L est liée à la courbure même de l'espace ; la mécanique ondulatoire restreint l'application de la notion de trajectoire ; de

même, la géométrie ondulatoire restreint l'application de la notion de longueur ; mais comme elle n'apparaît que dans des domaines spatiaux de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm, il s'ensuit que la mécanique ondulatoire a pu être associée avec une optique géométrique de l'espace physique sans qu'il en résulte de graves inconvénients, puisque le rayon de l'orbite de Bohr est de l'ordre de grandeur de 10^{-8} cm et la longueur d'onde de de Broglie de 10^{-10} cm ; au contraire, quand la longueur d'onde d'univers de de Bro-

glie $\lambda = \frac{h}{m_0 c}$ est de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm

(ce qui a lieu pour les protons), ou quand la longueur d'onde ordinaire est du même ordre (électrons d'énergie ~ 137 mc²) les considérations métriques ordinaires ne sont plus valables et leur emploi conduit aux difficultés qui ont été déjà signalées (niveaux d'énergie infinies, défaut de stabilité de l'électron) ; un cas intéressant est, comme nous le montrerons dans l'article suivant, celui du noyau atomique où les considérations d'optique géométrique, quoiqu'approximatives, conduisent à des résultats assez peu éloignés des résultats expérimentaux.

(A suivre.)

Manuscrit reçu le 1^{er} février 1930.