



HAL
open science

La loi de Stefan et l'électrodynamique non linéaire

B. Kwal, J. Solomon

► **To cite this version:**

B. Kwal, J. Solomon. La loi de Stefan et l'électrodynamique non linéaire. Journal de Physique et le Radium, 1938, 9 (5), pp.205-208. 10.1051/jphysrad:0193800905020500 . jpa-00233580

HAL Id: jpa-00233580

<https://hal.science/jpa-00233580>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA LOI DE STEFAN ET L'ÉLECTRODYNAMIQUE NON LINÉAIRE

Par MM. B. KWAL et J. SOLOMON.

Sommaire. — On étudie certaines conséquences qu'entraînerait l'abandon de la linéarité des équations de l'électrodynamique (comme dans la théorie de Born). On étudie en particulier, dans des hypothèses très générales, ce que devient la loi de Stefan pour les très hautes températures et on classe les diverses possibilités qui s'offrent à la théorie. On examine enfin ce que devient dans une telle théorie la loi du déplacement de Wien.

Le développement de la théorie de la polarisation du vide d'une part, la théorie non linéaire de l'électrodynamique d'autre part ont conduit à envisager les conséquences de l'abandon du principe de linéarité des équations fondamentales de l'électrodynamique, autrement dit du principe de superposition. Nous nous proposons ici d'indiquer quelques-unes de ces conséquences générales, en cherchant à obtenir des résultats valables pour des formes très générales d'électrodynamique non linéaire.

1. Déduction de la loi de Stefan-Boltzmann modifiée. — Nous supposons comme dans les théories précitées que le champ électromagnétique est défini par l'intermédiaire de deux tenseurs (\vec{D}, \vec{H}) , (\vec{E}, \vec{B}) qui ne sont pas identiques par suite de l'existence d'une polarisabilité finie du vide, polarisabilité dépendant de ces champs eux-mêmes. Prenons pour variables indépendantes les vecteurs \vec{D} et \vec{B} . La densité d'énergie U sera une fonction déterminée de \vec{D} et \vec{B} , que nous ne précisons pas, de sorte que nos calculs s'appliquent à toute électrodynamique non-linéaire possible, à condition qu'elle admette la théorie de Maxwell comme cas limite, et conduire par conséquent à la loi de Stefan-Boltzmann, en première approximation; soit $U(D, B)$ cette fonction et T_{ij} le tenseur des tensions de Maxwell. En particulier on aura

$$T_{44} = (HB) + (DE) - D_z E_z - H_z B_z - 4\pi U, \quad (1)$$

et la pression de radiation p est donnée par

$$4\pi p = \overline{T_{44}}. \quad (2)$$

On remarquera de suite que par suite de l'isotropie du rayonnement noir on a

$$D_x^2 + B_x^2 = \frac{1}{3} (D^2 + B^2).$$

Nous nous proposons ici d'établir une relation entre l'énergie totale \bar{U} par unité de volume et la température absolue T . En modifiant légèrement le volume du récipient, le travail élémentaire dA effectué s'écrit

$$dA = p d\tau,$$

où τ est le volume du corps noir. Les variations d'énergie et d'entropie s'écrivent de même

$$d\bar{U} = \bar{U} d\tau + \tau \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} dT \quad (3)$$

$$dS = \frac{d\bar{U} + dA}{T}, \quad (4)$$

soit encore

$$dS = \frac{\tau}{T} \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} dT + \frac{\bar{U} + p}{T} d\tau.$$

Posons maintenant

$$\bar{U} + p = \frac{4}{3} \varphi(\bar{U}). \quad (5)$$

(On notera que dans la théorie classique, $p = \frac{\bar{U}}{3}$, de sorte que dans ce cas $\varphi(\bar{U}) \equiv \bar{U}$). Comme dS doit être une différentielle exacte, on doit avoir

$$T \frac{d\bar{U}}{dT} = \frac{\varphi(\bar{U})}{\frac{d\varphi}{d\bar{U}} - \frac{3}{4}}, \quad (6)$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\log \frac{\varphi(\bar{U})}{T} = \frac{3}{4} \int_{\bar{U}_0}^{\bar{U}} \frac{d\bar{U}}{\varphi(\bar{U})}. \quad (7)$$

La constante \bar{U}_0 doit être déterminée de manière que pour T tendant vers zéro, $\varphi(U)$ tende vers U , et U

vers l'expression classique de la loi de Stefan-Boltzmann

$$\bar{U} = \sigma T^4 \quad (8)$$

d'où

$$U_0 = \sigma^{-\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

De (6) on tire également par dérivation

$$T^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dT^2} = \frac{\varphi(\bar{U})}{\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}} - \frac{3}{4}\right)^2} - \frac{\varphi^2(\bar{U})}{\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}} - \frac{3}{4}\right)^3}. \quad (10)$$

2. Signification de la fonction $\varphi(\bar{U})$.

On a, d'après (5) et (2)

$$\bar{U} + p = \frac{1}{4\pi} ((\overline{HB}) + (\overline{DE}) - \overline{D_z E_z} - \overline{H_z B_z}).$$

Si l'on pose

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H, \quad (11)$$

et que l'on suppose que $\varepsilon = \mu^{-1}$, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière est toujours égale à c , on a immédiatement

$$\bar{U} + p = \frac{\varepsilon}{6\pi} (\overline{B^2 + E^2}) = \frac{4}{3} \varphi(\bar{U}), \quad (12)$$

de telle sorte qu'on voit bien ici que $\varphi(\bar{U})$ caractérise en quelque sorte la polarisabilité du vide dans l'électrodynamique considérée. Dans la théorie classique,

$$\varepsilon = 1, \quad \bar{U} = \frac{1}{4\pi} (B^2 + E^2)$$

et l'on a bien

$$\varphi(\bar{U}) = \bar{U}.$$

3. Discussion des différents cas possibles. —

Nous allons maintenant examiner les différentes possibilités de variation de \bar{U} avec T pour les très hautes températures qui sont compatibles avec l'équation (6).

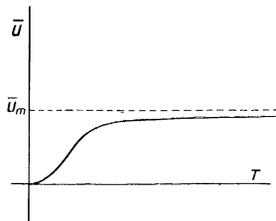


Fig. 1.

Premier cas (fig. 1). — Au voisinage de $T = 0$, on a $\bar{U} = \bar{U}_0 = \sigma T^4$, pour les très hautes températures, \bar{U} tend vers une limite \bar{U}_m .

En partant de l'équation intégrale (7), on remarque que si $\varphi(\bar{U}_m)$ reste finie, le premier membre, lorsque T augmente indéfiniment, prendra à partir d'une certaine valeur de T des valeurs négatives augmentant avec T en valeur absolue. Au contraire, le second membre tend vers une limite finie, positive. Donc dans ce cas ou bien $\varphi(\bar{U}_m)$ est nul, ou bien il est infini.

Le cas où $\varphi(\bar{U}_m)$ est nul, n'est pas possible car pour $T \simeq 0$, on a $\varphi(\bar{U}) = \bar{U}$, ainsi que $\frac{d\varphi}{d\bar{U}} = 1$; or pour que $\frac{dU}{dT} \geq 0$, on doit avoir d'après (6), $\frac{d\varphi}{d\bar{U}} > \frac{3}{4}$,

donc il est impossible que $\varphi(\bar{U}_m) = 0$.

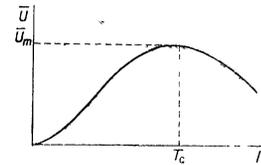


Fig. 2.

Reste le cas où $\varphi(\bar{U}_m)$ est infini. Ce cas est possible. Il correspondrait d'après (5) au cas où la densité d'énergie resterait finie tandis que la pression de radiation augmenterait indéfiniment. Ce cas, peu admissible physiquement, correspondrait par exemple à une fonction $\varphi(\bar{U})$ de la forme

$$\varphi = \bar{U} + \frac{K}{U_m - \bar{U}}.$$

Second cas (fig. 2). — La densité d'énergie passe par un maximum pour une valeur finie T_c de la température.

Pour cette température T_c , on a donc

$$\left(\frac{d\bar{U}}{dT}\right)_{T=T_c} = 0.$$

Or nous venons de voir que le cas $\varphi(\bar{U}) = 0$ est exclu. D'après (6), il faut donc que $\frac{d\varphi}{d\bar{U}}$ augmente indéfiniment lorsque T tend vers T_c . Mais d'après (10), cela entraînerait que

$$\left(\frac{d^2 U}{dT^2}\right)_{T=T_c} = 0$$

et de même pour les dérivées d'ordre quelconque de U . Ceci semble impossible physiquement. Par suite le second cas est absolument exclu.

Troisième cas (fig. 3). — Il existe une limite supé-

riente pour les températures : T tendant vers une certaine température T_c , \bar{U} augmente indéfiniment,

On a donc

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_{T=T_c} \rightarrow \infty,$$

ce qui d'après (6) est parfaitement réalisable.

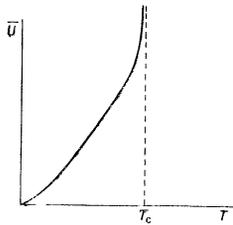


Fig. 3.

Donc la disposition de la figure 3 est possible.

Quatrième cas (fig. 4). — Il existe une tangente verticale à la courbe $\bar{U}(T)$ en un point de coordonnées \bar{U}_c, T_c .

Ce cas, d'après (6), ne peut être réalisé que si

$$\varphi(\bar{U}_c) \rightarrow \infty$$

ou si

$$\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}}\right)_{\bar{U}=\bar{U}_c} = \frac{3}{4}.$$

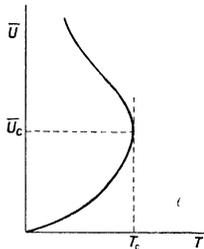


Fig. 4.

Dans la première hypothèse, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}}\right)_{\bar{U}=\bar{U}_c} \rightarrow \infty,$$

avec

$$\frac{\varphi(\bar{U}_c)}{\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}}\right)_{\bar{U}=\bar{U}_c}} \rightarrow \infty$$

ce qui n'est pas possible, car si $\bar{U} = \bar{U}_c$ est un pôle pour la fonction $\varphi(\bar{U}_c)$, c'est un pôle d'ordre supérieur pour la fonction

$$\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}}\right)_{\bar{U}=\bar{U}_c}$$

Dans la seconde hypothèse, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{d\bar{U}}\right)_{\bar{U}=\bar{U}_c} = \frac{3}{4}.$$

C'est le cas qui est réalisé dans l'électrodynamique non linéaire de Born et Infeld (1). Dans cette théorie on a en effet

$$4\pi U = b^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(D^2 + B^2)} - 1 \right]$$

avec

$$b = \frac{1}{(1,2361)^2} \cdot \frac{m^2 e^4}{e^3}$$

et

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(D^2 + B^2)}} = \frac{1}{\frac{4\pi U}{b^2} + 1}$$

d'où

$$\varphi(\bar{U}) = \bar{U} \frac{\left(1 + \frac{2\pi}{b^2} \bar{U}\right)}{1 + \frac{4\pi}{b^2} \bar{U}}.$$

On vérifie facilement que $\frac{d\varphi}{d\bar{U}} = \frac{3}{4}$ au point critique

$$\bar{U}_c = \frac{4\pi}{b^2} (\sqrt{2} - 1).$$

Comme d'autre part la relation entre \bar{U} et T (généralisation de la loi de Stefan-Boltzmann) est

$$\sigma T^4 = U \frac{\left(\frac{2\pi}{b^2} U + 1\right)}{\left(\frac{4\pi}{b^2} U + 1\right)^4},$$

on a pour la température critique

$$T_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{2}} \sqrt{b}.$$

On peut donc résumer les résultats de cette discussion de la façon suivante. Les cas suivants sont possibles :

a) Pour les très hautes températures, \bar{U} tend vers une limite \bar{U}_m . Dans ce cas, la pression de radiation doit augmenter indéfiniment.

b) La température tendant vers une température déterminée T_c , \bar{U} augmente indéfiniment. Il y a donc une température critique T_c qui ne peut être dépassée.

(1) B. KWAL et J. SOLOMON. *C. R.*, 1936, 202, 933; voir également M. BORN. *Nature*, 1938, 141, 327.

Le cas où T_c est infini est le cas réalisé dans la théorie classique.

c) Il existe une densité d'énergie \bar{U}_c qui ne peut être dépassée, correspondant à une température critique T_c . C'est le cas réalisé dans l'électrodynamique non linéaire de Born et Infeld.

4. Remarques sur le principe de superposition.

— Après avoir examiné les modifications qu'une théorie non linéaire apporte à la loi de Stefan-Boltzmann, il semble naturel de voir plus en détail les modifications que subit la loi de répartition de la densité d'énergie entre les diverses fréquences, c'est-à-dire la loi de Planck.

On sait qu'un raisonnement thermodynamique général conduit à la loi du déplacement de Wien qui lie la fréquence correspondant au maximum dans la courbe spectrale à la température absolue. On voit ici très aisément qu'une relation aussi simple ne peut exister en général : du fait par exemple que dans certains cas il existe une température maxima T_c .

Par ailleurs, les méthodes thermodynamiques qui conduisent à de tels raisonnements s'appuient essentiellement sur la possibilité (théorique) de considérer des pistons ou filtres ne laissant passer qu'une bande de fréquences bien définie. Or il est clair que cela est impossible en général dans une théorie non linéaire, car, en présence de matière ou non, il ne peut être question que le rayonnement électromagnétique ainsi sélectionné garde sa répartition spectrale : on doit au contraire s'attendre à un certain étalement de cette répartition, proportionnellement au temps. Des raisonnements généraux comme ceux auxquels nous faisons allusion ne pourraient donc avoir de validité qu'approximative si l'influence de la non-linéarité n'est pas trop grande, de manière que durant le processus thermodynamique il soit possible de négliger l'étalement de la répartition spectrale. Il est d'ailleurs évident que lorsque la non-linéarité est d'importance décisive la notion même d'onde stationnaire et de photon, basée sur le principe de superposition, nécessiterait un remaniement essentiel.

Manuscrit reçu le 5 avril 1938.

