



HAL
open science

Étude de quelques cas pratiques de convection forcée de la chaleur en régime laminaire

G. Ribaud

► **To cite this version:**

G. Ribaud. Étude de quelques cas pratiques de convection forcée de la chaleur en régime laminaire. Journal de Physique et le Radium, 1938, 9 (5), pp.195-204. 10.1051/jphysrad:0193800905019500 . jpa-00233579

HAL Id: jpa-00233579

<https://hal.science/jpa-00233579>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PRATIQUES DE CONVECTION FORCÉE DE LA CHALEUR EN RÉGIME LAMINAIRE

Par M. G. RIBAUD.

Sommaire. — Une étude complète d'un problème de convection de la chaleur doit être précédée d'une étude préalable du régime d'écoulement le long de l'obstacle, si l'on veut pouvoir intégrer l'équation générale de propagation de la chaleur laquelle suppose connue la vitesse du fluide en chaque point.

Cas du plan. — La vitesse u le long de ce plan se déduit de l'équation

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

intégrée par Blasius. Par ailleurs l'équation qui fixe la répartition des températures s'écrit :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Son intégration a été donnée par Pohlhausen ; elle conduit à l'expression suivante du coefficient de convection :

$$\alpha = 0,33 \lambda \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \sqrt[3]{\frac{c\rho\nu}{\lambda}} = 1,82 \frac{\lambda}{\delta} S^{-1/3},$$

δ désignant l'épaisseur de la couche limite dynamique et S le nombre de Stanton.

Les deux premières équations ci-dessus, divisées membre à membre, fournissent :

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = S \frac{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)};$$

il en résulte immédiatement que les profils des vitesses et des températures sont identiques lorsque $S = 1$. Dans le cas général on peut avoir une relation simple entre ces profils en tenant compte de ce que T/T_0 et u/u_0 sont uniquement fonction de y/\sqrt{x} ; en première approximation cette relation conduit à des profils pour lesquels le rapport des ordonnées est égal à $\sqrt[3]{S}$.

Cas où le régime thermique ne commence pas au bord d'attaque. — Dans beaucoup de cas, en particulier dans les montages expérimentaux de mesures du coefficient de convection α , la différence entre les températures du fluide et de la plaque ne commence qu'à partir d'une certaine distance au bord d'attaque; le calcul montre qu'à partir de ce nouveau point se produit une couche limite thermique dont l'épaisseur est proportionnelle à la racine cubique de la nouvelle abscisse x . Le coefficient de convection s'écrit alors

$$\alpha' = 0,54 \sqrt[3]{\frac{2\lambda^2 c\rho u_0}{x\delta}},$$

δ désignant l'épaisseur de la couche limite dynamique au point considéré. La valeur moyenne, sur un parcours déterminé, est nettement inférieure à celle correspondant au cas où les bords d'attaque dynamique et thermique sont confondus.

Cas d'un conduit cylindrique en régime dynamique établi. — Si le parcours du fluide dans le tuyau est assez grand pour que les régimes dynamique et thermique soient établis, le coefficient de convection à la paroi est indépendant de la vitesse. Certains auteurs, interprétant un travail de Lévêque, ont cru pouvoir en conclure que ce coefficient doit varier proportionnellement à la racine cubique de la vitesse. Un examen attentif du mémoire montre que le cas envisagé en réalité par lui, sans qu'il l'ait nettement explicité, est celui d'un tuyau dans lequel le régime dynamique serait établi (répartition parabolique des vitesses) mais dans lequel on amorcerait brusquement le régime thermique. La couche limite thermique finit par emplir tout le conduit après un parcours L donné par la relation : $\frac{L}{r} = \frac{R}{27S}$. Le coefficient de convection moyen, le long de ce parcours L , est égal à 1,5 fois sa valeur en régime thermique établi.

L'échange de chaleur par convection entre un fluide et une paroi est intimement lié au phénomène d'écoulement du fluide le long de cette paroi, aussi nous

paraît-il indispensable de rappeler d'abord l'essentiel des phénomènes d'écoulement du fluide. Nous renvoyons pour plus de détails aux ouvrages spéciaux.

Cette étude préalable nous paraît d'autant plus utile que les difficultés d'application des formules de convection de la chaleur tiennent avant tout, dans chaque cas particulier, à la connaissance imparfaite du régime d'écoulement du fluide.

Dans la suite de cet exposé nous adopterons les notations suivantes pour les constantes relatives au fluide :

μ , coefficient de viscosité.	} tée à l'unité de masse du fluide.
ρ , masse spécifique.	
ν , viscosité cinématique = $\frac{\mu}{\rho}$.	u_0 , vitesse du fluide loin de l'obstacle.
λ , coefficient de conductibilité thermique.	T_0 , température du fluide loin de l'obstacle.
c , chaleur spécifique à volume constant rapport-	δ , épaisseur de la couche limite au point d'abscisse x .

Nous utiliserons également les deux nombres sans dimensions suivants :

$$= \frac{ul}{\nu}, \text{ nombre de Reynolds;}$$

$$S = \frac{\lambda}{c\mu}, \text{ nombre de Stanton.}$$

Écoulement laminaire d'un fluide le long d'une plaque. — Nous allons rappeler d'abord ce qu'il est indispensable de connaître relativement à l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque, le courant fluide abordant la plaque parallèlement à elle avec une vitesse

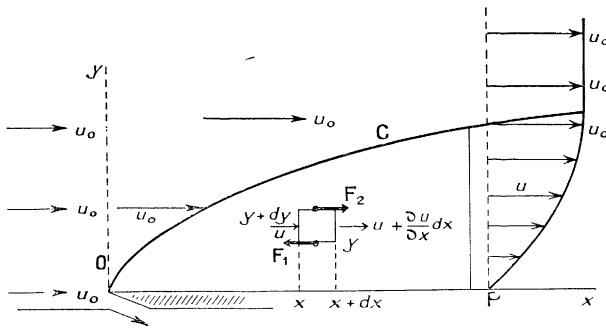


Fig. 1.

uniforme u_0 ⁽¹⁾. Le bord d'attaque 0 (fig. 1) est supposé taillé en forme de biseau de façon à ne pas introduire d'anomalie; les abscisses x seront comptées à partir de ce bord d'attaque. Du fait de la viscosité du fluide la plaque provoque un freinage progressif des différentes couches jusqu'à annuler la vitesse au contact de la plaque. Considérons le volume compris entre les plans d'abscisses x et $x + dx$ et d'ordonnées y et $y + dy$; l'on doit écrire que la résultante des forces de frottement sur les deux faces horizontales, laquelle a pour valeur

⁽¹⁾ Bien entendu les conclusions seraient les mêmes si l'on remorquait la plaque, dans le fluide immobile, avec une vitesse u_0 .

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy,$$

est égale à la force d'inertie

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} dx dy;$$

on est ainsi conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}, \tag{1}$$

qui fixe en chaque point la valeur de la vitesse ⁽¹⁾.

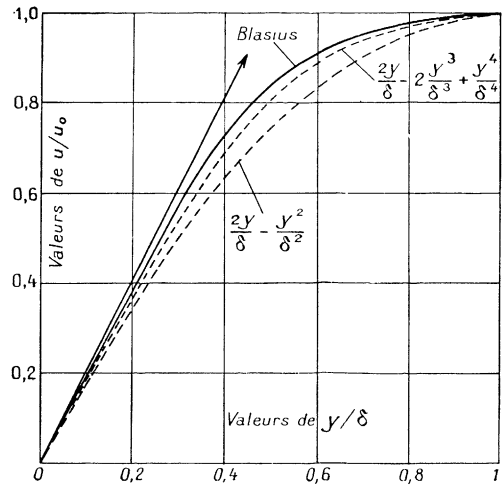


Fig. 2.

L'intégration de cette équation a été donnée par Blasius ⁽²⁾ et l'aspect des phénomènes précisé dans la suite par Prandtl et V. Karman ⁽³⁾. Le résultat de cette étude est le suivant : tant que l'on ne pénètre pas à l'intérieur d'une certaine couche appelée couche limite, la vitesse reste égale à la valeur u_0 qu'elle a loin de l'obstacle; lorsqu'on franchit la frontière C de cette couche limite la vitesse du fluide, parallèle à ox , décroît, depuis la valeur u_0 jusqu'à zéro au contact de la plaque.

Dans un plan P d'abscisse x , l'épaisseur δ de la couche limite est donnée par la relation suivante (formule de Blasius) :

$$\boxed{\delta = A \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \quad A = 5,45}; \tag{2}$$

⁽¹⁾ Nous renvoyons aux mémoires originaux et aux traités classiques au sujet de l'importance des termes négligés dans ce calcul.

⁽²⁾ BLASIUS. *Zts. f. math. und Phys.*, 1908, 56, p. 1; TOEPFER. *Id.*, 1912, 60, p. 397.

⁽³⁾ Sur ce sujet voir SADRON. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, 1935, n° 65.

d'autre part, dans l'épaisseur de la couche limite, le rapport $\frac{u}{u_0}$ est uniquement fonction du rapport $\frac{y}{\delta}$. Sa valeur est indiquée sur la figure 2. Dans les calculs approchés on peut lui substituer la formule parabolique suivante :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}. \quad (3)$$

ou la formule un peu plus approchée :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{2y}{\delta} - \frac{2y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}. \quad (3bis)$$

Il reste entendu que le calcul précédent est uniquement applicable dans la région comprise entre le bord d'attaque et la zone dans laquelle l'écoulement au voisinage de l'obstacle cesse d'être laminaire.

Écoulement laminaire dans un cylindre en régime établi. — L'écoulement laminaire d'un fluide dans un cylindre, lorsque le régime est établi, c'est-à-dire lorsque le parcours dans ce cylindre a été suffisamment long pour que la répartition des vitesses conserve un profil constant, est tout à fait classique; la théorie en est élémentaire et conduit dans une section du tuyau à une répartition des vitesses fournie par l'expression suivante :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{y}{r} \left(2 - \frac{y}{r} \right) \quad (4)$$

en désignant par y l'ordonnée à partir de la paroi, par r le rayon du cylindre et par u_0 la vitesse maximum suivant l'axe.

Définition du coefficient de convection α . — Dans le cas de l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque (fig. 1), si le fluide, loin de l'obstacle, a une température T_0 , la température de la plaque étant égale à θ , si Q est la quantité de chaleur échangée par convection par seconde et par cm^2 entre le fluide et la paroi, le coefficient de convection au point considéré est, par définition, donné par la relation :

$$\alpha = \frac{Q}{T_0 - \theta}. \quad (5)$$

Dans le cas d'une conduite cylindrique la définition reste la même, T_0 désignant la température maximum sur l'axe et θ la température de la paroi.

Hypothèse de similitude. — Certains auteurs ont admis qu'il y avait identité entre le profil des vitesses dans le fluide et celui des températures, c'est-à-dire que, dans le cas de la plaque par exemple, la répartition des températures T dans la couche limite est donnée par la même loi que la répartition des vitesses (éq. 3), autrement dit, que l'on a la relation suivante :

$$\frac{T - \theta}{T_0 - \theta} = \frac{u}{u_0} = \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}. \quad (6)$$

Dans le cas du cylindre la relation serait tout à fait analogue en y remplaçant simplement δ par le rayon r .

A partir de l'équation précédente il est aisé de calculer le coefficient de convection; la quantité de chaleur Q cédée à la paroi est en effet fournie par la relation :

$$Q = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Autrement dit, le coefficient de convection α_x au point d'abscisse x est donné par la relation .

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{\delta} \quad (7)$$

ou, en tenant compte de la formule de Blasius qui donne δ (éq. 2),

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{A} \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} = 0,365\lambda \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}}$$

Dans le cas d'une conduite cylindrique de rayon r , en régime établi, on a de même :

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{r} \quad (7bis)$$

Cette dernière relation montre en passant que le coefficient de convection dans une telle conduite, dans les limites où l'hypothèse de similitude est valable, est indépendant de la vitesse; nous reviendrons plus loin sur cette hypothèse de similitude.

Equation de propagation de la chaleur. — Lorsque l'on veut étudier complètement un problème de convection il est indispensable de faire appel à l'équation qui fixe les échanges de chaleur entre les différentes couches du fluide en mouvement, en tenant compte, bien entendu, de la répartition des vitesses au sein de ce fluide.

Dans ce qui suit nous supposons les différences de température suffisamment faibles pour que le régime d'écoulement ne se trouve pas influencé par elles, autrement dit, pour que le régime d'écoulement reste le même qu'en l'absence de différence de température; nous éviterons également d'avoir à préciser les températures moyennes auxquelles il convient de rapporter les constantes physiques du fluide. Nous nous bornerons à rappeler ici l'équation à laquelle on aboutit dans le cas d'un écoulement le long d'un plan en n'insistant pas, d'ailleurs, sur les termes négligés dans notre calcul.

Si l'on se reporte à la figure 1, lorsque le fluide traverse le volume en hachures, la quantité de chaleur accumulée par seconde entre les plans y et $y + dy$ du

fait de la conductibilité calorifique, est donnée par la relation $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy$; elle doit être égale, en régime permanent, à la quantité de chaleur transportée en une seconde par le fluide en mouvement entre les plans x et $x + dx$, quantité de chaleur qui a pour expression $\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} dx dy$, de sorte que, en définitive, l'équation qui fixe l'écoulement de chaleur est la suivante :

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (8)$$

équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{u}{u_0} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{c \rho u_0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}. \quad (8 \text{ bis})$$

Intégration de l'équation de la chaleur dans le cas du plan. Calcul du coefficient de convection.

Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous prendrons l'origine des températures sur la plaque ou, ce qui revient au même, nous désignerons par T la différence de température entre la plaque et le fluide en un point déterminé.

Intégration de Boussinesq dans le cas du fluide non visqueux. — Dans son calcul du coefficient de convection le long d'un plan, Boussinesq ⁽¹⁾ admet que la vitesse reste uniforme et égale à u_0 le long du plan, autrement dit que le fluide n'est pas visqueux. L'équation aux dérivées partielles qui définit la température en chaque point s'écrit alors :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{c \rho u_0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Pour la résolution de cette équation nous suivrons une marche très légèrement différente de celle de Boussinesq; elle conduit évidemment au même résultat, mais présente l'avantage de pouvoir être transposée dans le cas d'un fluide visqueux. Elle consiste à faire le changement de variable $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ ⁽²⁾. L'équation aux dérivées

partielles précédente s'écrit alors, en posant

$$\frac{T}{T_0} = f(z) \quad \text{et} \quad a^2 = \frac{c \rho u_0}{\lambda}$$

$$f'' + \frac{z}{2a^2} f' = 0;$$

⁽¹⁾ BOUSSINESQ. *J. Math. pures et appliq.*, 1903, p. 283.

⁽²⁾ Si l'on se reporte au début de cet article (formule 3) cela revient à écrire que T/T_0 est uniquement fonction de y/δ , comme c'est le cas pour u/u_0 .

équation qui s'intègre immédiatement et fournit, en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^z e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz}{\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz} = \frac{\int_0^\theta e^{-\theta^2} d\theta}{\int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta}, \quad (10)$$

$$\text{avec : } \theta = \frac{z}{2a} = \frac{y}{2a\sqrt{x}}. \left(\int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right).$$

Le coefficient de convection α_x à la paroi, au point d'abscisse x , est alors donné par

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\lambda}{I_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

ou

$$\boxed{\alpha_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c \rho u_0 \lambda}{x}}} = 0,565 \lambda \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} S^{-1/2}. \quad (11)$$

Intégration de Pohlhausen. — Pohlhausen ⁽¹⁾ a donné la solution du problème dans le cas d'un fluide visqueux; nous allons rappeler son calcul en le mettant sous une forme un peu différente.

L'équation peut s'écrire, avec les notations qui précèdent :

$$\frac{u}{u_0} \frac{\partial T}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Si nous adoptons encore ici la variable nouvelle $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ ⁽²⁾, si nous désignons en outre par $\varphi(z)$ la

fonction $\frac{u}{u_0}$ donnée par l'intégration de Blasius, et par

$f(z)$ la fonction $\frac{T}{T_0}$, il vient immédiatement :

$$z \varphi f' + 2a^2 f'' = 0.$$

Si nous supposons connue la fonction φ , l'intégration de cette dernière équation est immédiate et fournit :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^z e^{-\int_0^{\varphi(z)} \frac{z}{2a^2} dz} dz}{\int_0^\infty e^{-\int_0^{\varphi(z)} \frac{z}{2a^2} dz} dz}. \quad (12)$$

On trouvera dans le mémoire de l'auteur le résultat du calcul établi à partir des valeurs de la fonction $\varphi(z)$ calculées par Blasius.

On peut se proposer de résoudre le problème en limitant la fonction φ au premier terme de son développement en série (éq. 3 et 3 bis)

⁽¹⁾ POHLHAUSEN. *Z. f. angew. Math. u. Mech.*, 1924, p. 415.

⁽²⁾ Blasius adopte une variable un peu différente $\frac{y}{2} \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}}$, qui, à une constante numérique près, représente y/δ .

$$\varphi = \frac{2z}{A} \sqrt{\frac{u_0}{\nu}}$$

la formule générale donnée ci-dessus s'écrit alors :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^\theta e^{-\theta^3} d\theta}{\int_0^\infty e^{-\theta^3} d\theta} = \frac{\int_0^\theta e^{-\theta^3} d\theta}{I_3} \quad (13)$$

en posant :

$$\theta^3 = \frac{z^3}{3a^2 A} \sqrt{\frac{u_0}{\nu}} \quad (13bis)$$

Dès lors l'expression du coefficient de convection ⁽¹⁾ se calcule aisément comme plus haut et s'écrit :

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{I_3 \sqrt{3} A} \sqrt{\frac{u_0}{\nu}} \sqrt{\frac{c\rho\nu}{\lambda}} = 0,443\lambda \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} S^{-1/3}. \quad (14)$$

Le calcul complet, effectué par Pohlhausen, fournit une expression tout à fait identique, mais dans laquelle seul le facteur numérique (0,332) diffère du précédent.

Rapprochement des diverses formules donnant le coefficient de convection le long d'un plan. — On peut se proposer de comparer les trois formules 7, 11 et 14 obtenues plus haut pour le coefficient de convection.

En introduisant, dans ces formules, l'épaisseur δ de la couche limite *dynamique* donnée par la formule de Blasius, il vient respectivement :

Hypothèse de similitude et profils paraboliques :	}	(15)
Vitesse uniforme (Boussinesq) :		
Répartition des vitesses de Blasius (Pohlhausen) :		

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= 2 \frac{\lambda}{\delta} \\ \alpha_x &= 3,07 S^{-1/2} \frac{\lambda}{\delta} \\ \alpha_x &= 1,82 S^{-1/3} \frac{\lambda}{\delta} \end{aligned} \right\}$$

Il est intéressant de chiffrer numériquement la différence entre les coefficients de $\frac{\lambda}{\delta}$ dans ces trois formules, pour quelques cas pratiques, par exemple celui d'un gaz diatomique ($S=1,36$), de l'eau à 20° ($S=0,15$), de l'eau à 100° ($S=0,6$) et d'une huile ($S=0,01$) (voir tableau suivant).

Comme l'on devait s'y attendre, dans chaque cas la formule de Boussinesq donne des valeurs de α nettement trop élevées. Quant à l'hypothèse de similitude et à la formule de Pohlhausen, les valeurs qu'elles fournissent sont d'autant plus rapprochées que S est plus voisin de 1. La similitude des profils thermique et

dynamique donne des valeurs trop fortes lorsque $S > 1$ et trop faibles lorsque $S < 1$. Ces derniers résultats peuvent être prévus à priori comme nous allons le montrer.

	GAZ DIATOMIQUE $S = 1,36$	EAU A 20° $S = 0,15$	EAU A 100° $S = 0,6$	HUILE $S = 0,01$
Profils paraboliques	2	2	2	2
Boussinesq	2,65	7,7	4	30,7
Pohlhausen	1,62	3,4	2,25	8,5

Discussion de la validité de l'hypothèse de similitude. Lien entre les profils thermique et dynamique dans le cas du plan. — Si l'on se reporte à l'équation (1) qui fixe la répartition des vitesses le long du plan et à l'équation (8) qui fixe la répartition des températures, on obtient immédiatement, en les divisant membre à membre :

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = S \frac{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} \quad (16)$$

Les conditions aux limites étant les mêmes pour T et u ⁽¹⁾. Cette équation montre que si $S = 1$, les profils des vitesses et des températures sont identiques. Si l'on admet que ces deux profils sont paraboliques,

on a $\alpha_x = 2 \frac{\lambda}{\delta}$; la loi de répartition correcte fournie par l'intégration de Blasius donne une valeur un peu plus faible $\alpha_x = 1,82 \frac{\lambda}{\delta}$.

On peut se proposer de rechercher le lien qui existe entre les profils thermique et dynamique, lorsque S est différent de l'unité. On arrive aisément au résultat en supposant, comme nous l'avons déjà fait plus haut, que $\frac{u}{u_0}$ et $\frac{T}{T_0}$ sont uniquement fonction de $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ et représentés par les fonctions :

$$\frac{u}{u_0} = \varphi(yx^{-1/2}) \quad \frac{T}{T_0} = f(yx^{-1/2}).$$

En effectuant les dérivations et transportant dans l'équation (16) il vient immédiatement :

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = S \frac{f''(z)}{f'(z)},$$

équation qui, en tenant compte des conditions aux limites, est identique à la suivante :

⁽¹⁾ Le coefficient de convection moyen entre 0 et x est égal à $2\alpha_x$.

⁽¹⁾ T et u représentent ici en réalité $\frac{T - \theta}{T_0 - \theta}$ et $\frac{u}{u_0}$.

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(0)} = \left[\frac{f'(z)}{f'(0)} \right]^S. \quad (17)$$

Cette dernière équation fixe, dans le cas général, le lien entre le profil des vitesses et celui des températures.

Si l'on se reporte à la formule 13 et si l'on admet qu'en première approximation $\frac{T}{T_0}$ et $\frac{u}{u_0}$ sont de la forme :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^\theta e^{-\theta^3} d\theta}{I_3} \quad \frac{u}{u_0} = \frac{\int_0^\omega e^{-\omega^3} d\omega}{I_3}.$$

on obtient immédiatement :

$$\frac{f'}{f'_0} = e^{-\theta^3} \quad \frac{f'}{f'_0} = e^{-\omega^3}.$$

Ces expressions, transportées dans la formule 17, donnent alors :

$$\omega = \theta \sqrt[3]{S}. \quad (18)$$

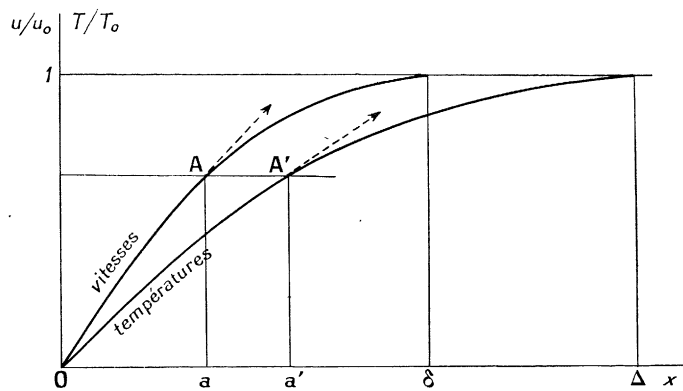


Fig. 3.

Si l'on se reporte à la figure 3 qui représente les profils des vitesses et des températures, la relation précédente revient à dire que, pour obtenir des valeurs u/u_0 et T/T_0 égales, il faut choisir des valeurs de y dont le rapport est égal à $\sqrt[3]{S}$ ($\frac{0a'}{0a} = \sqrt[3]{S}$)⁽¹⁾. La même relation traduit également le fait que les pentes des profils des vitesses en A et A' sont entre elles comme $\sqrt[3]{S}$.

La figure 3 est tracée dans le cas de S supérieur à l'unité (gaz); si S est inférieur à 1 (cas de l'eau), la courbe des températures est tout entière à gauche de celle des vitesses; en d'autres termes l'épaisseur de la couche dans laquelle la température du fluide est perturbée par l'obstacle est inférieure à l'épaisseur de la couche limite dynamique.

(1) Cela revient également à dire que la couche limite thermique a une épaisseur Δ égale à l'épaisseur δ de la couche limite dynamique multipliée par $\sqrt[3]{S}$ (fig. 3).

Cette remarque nous amène à définir la notion de *couche limite thermique* que nous rapprocherons de celle de couche limite dynamique.

Notion de couche limite thermique dans le cas d'un fluide non visqueux de vitesse uniforme. — Il est intéressant de noter que, dans le cas d'un fluide qui serait dénué de viscosité, cas étudié par Boussinesq, on peut définir une couche limite thermique, c'est-à-dire une couche dans laquelle la température à l'infini T_0 est modifiée par le plan le long duquel s'écoule le fluide.

Si nous nous reportons à l'équation 10 qui donne le résultat de l'intégration de l'équation de Fourier et si nous traçons la fonction représentée par cette équation, nous voyons que la valeur de T_0 est pratiquement atteinte pour une valeur de θ égale à 2,5, ce qui revient à dire que la température cesse d'être perturbée à partir d'une distance à la plaque égale à Δ et dont la valeur est fixée par la relation :

$$\Delta = 5 \sqrt{\frac{\lambda x}{c_p u_0}}. \quad (19)$$

On remarquera la très grande analogie entre cette formule et celle de Blasius qui fixe l'épaisseur de la couche limite dynamique. Elle n'en diffère que par la substitution de la quantité $\frac{\lambda}{c_p}$ (diffusivité) à la quantité ν (viscosité cinématique); comme la couche limite dynamique, la couche thermique a une épaisseur proportionnelle à \sqrt{x} et inversement proportionnelle à $\sqrt{u_0}$.

Nous avons montré ailleurs⁽¹⁾ que l'on pouvait arriver au même résultat par des développements analogues à ceux donnés par Karman dans l'établissement de la formule fixant l'épaisseur de la couche limite dynamique.

Convection le long d'une plaque lorsque le régime thermique commence à une certaine distance du bord d'attaque. — Dans les expériences de mesures du coefficient de convection forcée le long d'une plaque (Jürges, Elias), pour des raisons pratiques le régime thermique ne débute qu'à une distance sensible du bord d'attaque (fig. 4).

Nous n'avons trouvé nulle part la discussion de ce problème qui se pose évidemment de façon toute différente du cas traité plus haut dans lequel les régimes thermique et dynamique commencent tous deux au bord d'attaque.

Désignons par l_0 la distance OO' du bord d'attaque thermique au bord amont de la plaque de mesures (fig. 5); désignons en outre respectivement par l et x les abscisses comptées à partir de O et de O' . En un

(1) G. RIBAUD. *C. R. Ac. Sc.*, 1936, 202, p. 32.

point d'abscisse x la couche limite dynamique a une épaisseur δ donnée par la formule :

$$\delta = A \sqrt{\frac{\nu(l_0 + x)}{u_0}} = A \sqrt{\frac{\nu l}{u_0}}$$

La répartition des vitesses dans le plan d'abscisse x peut s'exprimer, en première approximation, par la formule parabolique :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{y}{\delta} \left(2 - \frac{y}{\delta} \right).$$

Nous allons nous borner à effectuer l'intégration de l'équation de la chaleur au voisinage immédiat de O' , et en nous limitant, dans l'expression de u/u_0 , au premier terme : $u/u_0 = \frac{2y}{\delta}$.

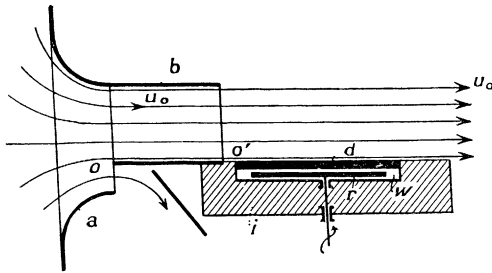


Fig. 4.

L'équation générale (forme 8 bis) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2c\rho u_0}{\lambda\delta} y \frac{\partial T}{\partial x};$$

équation qui admet une solution de la forme $T = f(yx^p)$ avec $p = -1/3$. En posant $z = y/\sqrt[3]{x}$, l'équation aux dérivées partielles précédente devient :

$$\frac{f''}{f'} = -\frac{2c\rho u_0}{3\lambda\delta} z^2,$$

qui s'intègre immédiatement et fournit, en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^\theta e^{-\theta^3} d\theta}{\int_0^\infty e^{-\theta^3} d\theta},$$

expression tout à fait analogue à la formule (13), mais dans laquelle

$$\theta = \frac{y}{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{\frac{2c\rho u_0}{9\lambda\delta}} \quad (20)$$

L'expression précédente peut se traduire en disant qu'à partir de O' s'amorce une couche limite thermique

dont l'épaisseur varie proportionnellement à $\sqrt[3]{\frac{x}{u_0}}$ (1).

Il est bien entendu qu'ici l'hypothèse de similitude des profils des vitesses et des températures ne garde aucun sens.

Nous allons préciser le mieux possible les ordres de grandeur relatifs; pour cela explicitons d'abord la formule donnant la valeur de l'épaisseur Δ' de la couche limite thermique qui s'amorce en O' . Le tracé de la fonction $e^{-\theta^3}$ montre que cette fonction est pratiquement nulle pour $\theta = 1,8$, de sorte que l'épaisseur Δ' se trouve fixée par la relation :

$$\Delta' = 1,8 \sqrt[3]{\frac{9\lambda\delta x}{2c\rho u_0}} \quad (21)$$

Il est intéressant de la rapprocher de la formule qui fixe la valeur de la couche limite Δ obtenue quand le phénomène thermique commence au bord d'attaque O (fig. 4); il suffit pour cela de se reporter à la formule 13 bis, et l'on obtient immédiatement, en désignant par l la distance du point M considéré au bord d'attaque O :

$$\Delta = 1,8 \sqrt{l} \sqrt[3]{\frac{9\lambda A}{3c\rho u_0} \sqrt{\frac{\nu}{u_0}}} = 1,8 \sqrt[3]{\frac{9\lambda\delta l}{3c\rho u_0}} \quad (22)$$

La dernière partie de l'expression précédente ne diffère de l'expression 21 que par le remplacement de x par l (2) et l'on peut immédiatement écrire la relation suivante entre Δ et Δ' :

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad (23)$$

On remarquera que, dans cette expression, ne figurent plus u_0 ni les constantes thermiques du fluide.

Si nous nous souvenons par ailleurs qu'entre l'épaisseur δ de la couche limite dynamique et celle Δ de la couche thermique on a (3) la relation :

$$\Delta = \delta \sqrt[3]{S},$$

nous pouvons tracer les courbes fixant les diverses couches limites dans le cas de l'eau à 20° (fig. 5 b) et

(1) Au lieu de $\sqrt[3]{\frac{x}{u_0}}$ dans le cas où O et O' coïncident. Ceci n'est bien entendu valable qu'au voisinage de O' où δ reste sensiblement égal à δ_0 .

(2) Il doit bien en être ainsi pour que, à la limite, lorsque O' vient se confondre avec O , les deux expressions soient identiques. On remarquera toutefois qu'au dénominateur du dernier radical 22 figure le coefficient numérique 3, alors qu'au radical 21, figure le coefficient 2; il n'est pas douteux que cette différence tient uniquement aux approximations faites au cours des intégrations.

(3) Voir le renvoi situé page 200.

dans celui de l'air (fig. 5 a). On voit que le phénomène thermique, amorcé en O', rejoint celui qui eût été amorcé en O, après un parcours pratiquement égal à 1,5 fois OO'.

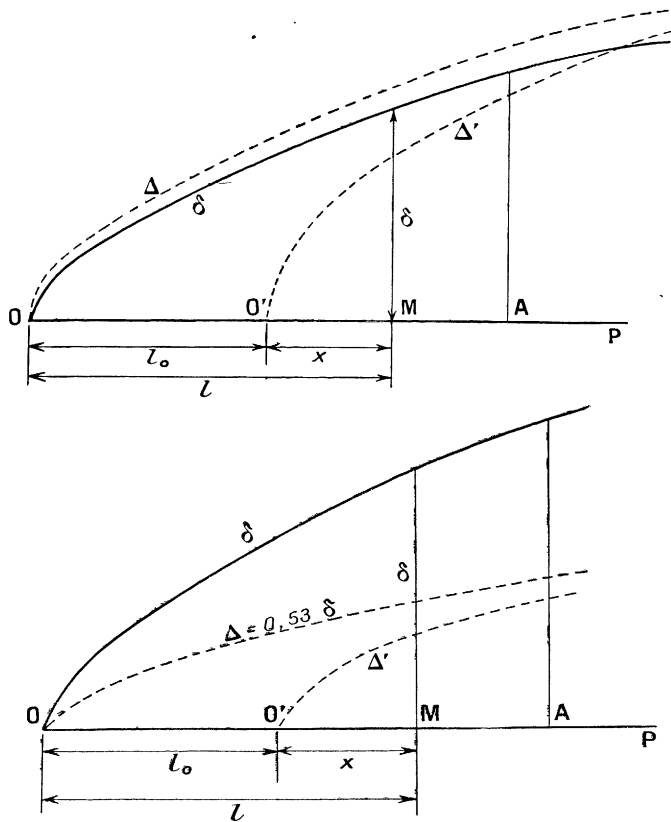


Fig. 5 a et b.

Les valeurs des coefficients de convection se déduisent sans difficulté des expressions de Δ et Δ' ; en particulier, si l'origine du régime thermique est en O' le coefficient de convection α' au point M est fourni par l'équation :

$$\alpha' = \frac{1}{I_3 \sqrt[3]{9}} \sqrt[3]{\frac{2\lambda^2 c_p u_0}{\delta x}} \quad (1) \quad (24)$$

Si le phénomène thermique commence au bord d'attaque O le coefficient de convection α au point M, fourni par l'expression 14, est lié à α' par la relation simple :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{l}{x}} \quad (25)$$

Pour comparer utilement les deux cas envisagés ci-dessus, nous allons effectuer numériquement le calcul du coefficient de convection moyen α_1 le long d'une

(1) Le coefficient devant le radical a pour valeur numérique 0,54.

fraction de plan O'A dont la longueur dans le sens d'écoulement, est égale à la distance OO' (1). Plus exactement nous comparons ce coefficient moyen à ce qu'il eût été α_2 si le plan avait été disposé entre O et O'. Cela revient à comparer les intégrales

$$\alpha_2 = \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \int_0^l \frac{1}{\sqrt[3]{x\sqrt{1+x}}} dx.$$

Une intégration graphique fournit pour le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ la valeur 0,76; autrement dit, si le phénomène thermique s'amorce à une certaine distance du bord d'attaque, le coefficient de convection moyen est nettement inférieur à ce qu'il est dans le cas où les phénomènes dynamique et thermique s'amorcent tous deux au bord d'attaque. Il serait intéressant de confirmer le fait par des mesures systématiques.

Convection de la chaleur dans une conduite cylindrique en régime laminaire.

Cas de la conduite cylindrique avec régimes dynamique et thermique établis. — Nous n'insisterons pas sur les phénomènes concernant la circulation du fluide à partir de l'entrée du tuyau. Au voisinage immédiat du bord d'attaque, si le phénomène thermique et le phénomène dynamique commencent simultanément, on se trouve pratiquement dans le cas de la plaque (2). Les phénomènes se compliquent ensuite, aussi bien au point de vue dynamique qu'au point de vue thermique, dès que le terme de courbure (en $\frac{1}{y}$) intervient dans les équations d'écoulement du fluide et de propagation de la chaleur.

Les phénomènes ne redeviennent simples qu'à partir du moment où les couches limites dynamique et thermique emplissent tout le diamètre du tuyau; on sait qu'alors le profil des vitesses est rigoureusement parabolique (Poiseuille) (3). Si l'on admet, comme nous l'avons fait plus haut, que le profil des températures est identique à celui des vitesses (hypothèse de similitude) on arrive immédiatement à l'expression suivante du coefficient de convection (form. 7 bis) :

$$\alpha = \frac{4\lambda}{D} \quad (D, \text{diamètre du tuyau}).$$

On remarque en particulier que α est indépendant de la vitesse.

Le résultat précédent suppose la validité de l'hypothèse de similitude; pour serrer le problème de plus près il convient d'intégrer l'équation de Fourier qui,

(1) Ce sont approximativement les conditions de la figure 4.
(2) Le coefficient de convection est alors nettement plus élevé qu'en régime établi.
(3) Nous précisons ici encore que ce profil n'est valable que si le nombre de Reynolds est inférieur à sa valeur critique.

dans le cas du cylindre, avec origine sur l'axe, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{C_p u}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \tag{26}$$

et, comme $u = u_0 \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$ [u_0 , vitesse sur l'axe] :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{C_p u_0}{\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{26 bis}$$

L'intégration de cette équation, qui nécessite l'emploi des fonctions de Bessel, a été donnée par Nüsselt ⁽¹⁾, puis précisée par Lévêque ⁽²⁾ elle conduit à l'expression :

$$\alpha = 3,66 \frac{\lambda}{D}, \tag{27}$$

expression identique à celle fournie par l'hypothèse de similitude, au coefficient numérique près (3,66 au lieu de 4). La divergence des coefficients numériques montre, en passant, que les profils des vitesses et températures ne sont pas rigoureusement identiques; la courbe des températures est un peu au-dessous de celle des vitesses ⁽³⁾, les tangentes à la paroi sont entre elles comme 3,66 et 4.

Cas d'une conduite circulaire en régime dynamique établi dans laquelle on provoque en un point le régime thermique. — Dans son travail, Lévêque (*loc. cit.*), à propos de la convection dans une conduite, examinant le cas des grandes vitesses, a été amené à étudier ce qu'il a appelé le cas du « plateau avec mouvement de Poiseuille ». Certains auteurs, interprétant le travail de Lévêque, ont cru devoir en conclure qu'aux grandes vitesses, dans une conduite cylindrique, le coefficient de convection varie proportionnellement à la racine cubique de la vitesse. En réalité Lévêque n'a pas explicité les conditions physiques auxquelles s'applique son calcul, et un examen attentif montre qu'il est valable pour une conduite circulaire dans laquelle le régime dynamique est déjà établi (régime de Poiseuille) et, en un point de laquelle, la paroi possède une température brusquement différente de celle du fluide. En ce point s'amorce une couche limite thermique dont l'épaisseur croît progressivement jusqu'à atteindre l'axe du tube, pour donner finalement, après un parcours suffisant, l'état définitif dans lequel les régimes dynamique et thermique sont établis; ce dernier état est précisément celui que nous avons étudié dans le paragraphe précédent.

Épaisseur de la couche limite thermique. — A partir du point où s'amorce le régime thermique

⁽¹⁾ NÜSSELT. *Festschrift Techn. Hochschule Karlsruhe*, 1923.

⁽²⁾ LÉVÊQUE. *Thèse*, Paris, 1928. *Annales des Mines*, avril-juin 1928.

⁽³⁾ Elle n'est pas parabolique.

dans le tuyau, il convient d'appliquer l'équation de Fourier exactement comme nous l'avons fait dans le cas du plan, avec toutefois cette différence qu'au voisinage de la paroi la vitesse u varie suivant la loi :

$$u/u_0 = \frac{2y}{r} - \frac{y^2}{r^2}.$$

Le calcul se présente évidemment de façon tout à fait analogue à celui du plan, du moins tant que la couche limite thermique reste assez voisine de la paroi pour que, dans l'équation de Fourier, le terme en $1/y$ reste négligeable.

Il est intéressant ici, comme dans le cas du plan, de considérer l'épaisseur Δ de la couche thermique; si l'on se reporte à l'équation 20 et si l'on admet encore que T atteigne la valeur T_0 pour $\theta = 1,8$, l'épaisseur Δ est fournie par la relation :

$$\Delta = 1,8 \sqrt[3]{\frac{9\lambda x r}{2 c_p u_0}}, \tag{28}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta}{r} = 3 \sqrt[3]{\frac{S}{R}} \sqrt[3]{\frac{x}{r}}. \tag{28 bis}$$

Pour préciser les ordres de grandeur prenons le cas d'un Reynolds égal à 1 000, et le cas de l'air ou d'un gaz diatomique ($S = 1,36$); il vient :

$$\frac{\Delta}{r} = 0,34 \sqrt[3]{\frac{x}{r}}.$$

Pour que la couche limite thermique finisse par emplir toute la section du tube il faut $\Delta/r = 1$ et par suite $x/r = 27$. De façon générale cette condition sera remplie si le parcours L à partir du début du phénomène thermique est donné par la relation :

$$\frac{L}{r} = \frac{R}{27S}.$$

A la vérité le calcul précédent n'est valable qu'au voisinage immédiat de la paroi, il cesse d'être rigoureux quand on se rapproche de l'axe; on peut toutefois considérer qu'il donne une idée satisfaisante des ordres de grandeur.

Valeur du coefficient de convection. — De façon tout à fait analogue à ce que nous avons écrit dans le cas du plan on a :

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{\Delta} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 c_p u_0}{x r}} = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{r} \sqrt[3]{\frac{R}{S}} \sqrt[3]{\frac{r}{x}}. \tag{29}$$

Ce coefficient de convection, infini au bord d'attaque thermique, tend vers la limite $\frac{2\lambda}{r}$ lorsque l'épaisseur Δ croît de 0 à r .

On peut, ici encore, considérer le coefficient de convection moyen entre 0 et x ; il est lié au coefficient vrai au point d'abscisse x par la relation :

$$\alpha_{0x} = \frac{3}{2} \alpha_x.$$

En particulier, entre le bord d'attaque thermique et le point où le régime thermique est établi ($x = L$) le coefficient de convection est égal à $3 \lambda/r$; *il est 1,5 fois plus grand qu'en régime thermique établi.*

Les considérations précédentes montrent combien il importe, dans chaque cas, de posséder une idée aussi nette que possible du régime d'écoulement si l'on veut calculer avec quelque précision les échanges calorifiques par convection; elles montrent également que les

formules classiques, valables dans le cas où les régimes thermique et dynamique s'amorcent en même temps, cessent de l'être si le régime thermique s'amorce au bout d'un certain parcours après le début du régime dynamique.

Sans épuiser tous les cas que l'on peut rencontrer dans la pratique, nous nous sommes préoccupés de fixer les formules et valeurs numériques dans le cas du plan et dans le cas du cylindre en régime dynamique établi.

Nous nous sommes également efforcés de préciser la notion de couche limite thermique et d'expliciter, dans le cas du plan, le lien numérique entre les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique, ainsi que le lien étroit entre les profils thermique et dynamique.

Toutes les formules précédentes ne sont bien entendu valables qu'en régime d'écoulement laminaire; elles cesseraient de l'être dès que le régime d'écoulement devient turbulent.

Manuscrit reçu le 6 mars 1938.