



**HAL**  
open science

## La théorie des matrices et la propagation des ondes

Léon Brillouin

► **To cite this version:**

┆ Léon Brillouin. La théorie des matrices et la propagation des ondes. Journal de Physique et le Radium, 1936, 7 (10), pp.401-410. 10.1051/jphysrad:01936007010040100 . jpa-00233444

**HAL Id: jpa-00233444**

**<https://hal.science/jpa-00233444v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

## LE RADIUM

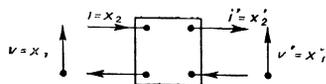
### LA THÉORIE DES MATRICES ET LA PROPAGATION DES ONDES

Par LÉON BRILLOUIN.

Professeur au Collège de France.

**Sommaire.** — La théorie des filtres et des lignes électriques conduit tout naturellement à l'introduction de matrices à deux lignes et deux colonnes, dont le déterminant est égal à 1. On obtient ainsi une représentation physique très claire des propriétés du *groupe linéaire*  $C_2$ . La propagation des ondes, le long d'une ligne de cellules de filtre, se ramène à la recherche des axes et des valeurs propres de la matrice. Lorsqu'on passe aux lignes continues, on doit introduire des matrices ( $\epsilon$ ) de propriétés différentes, et l'on forme une équation matricielle linéaire, qui est bien plus générale que les équations posées de manière usuelle dans les problèmes de propagation d'ondes. Comme exemples, l'auteur montre la généralisation des équations de Mathieu et Hill (lignes périodiques), le passage aux équations de Pauli et Dirac pour l'électron, la propagation sur des lignes polyphasées, et la propagation des rayons X dans les cristaux.

**1. Les matrices et la théorie des filtres électriques en électrotechnique.** — Plusieurs auteurs ont déjà remarqué l'utilité de la méthode des matrices dans la théorie des quadripôles constituant des filtres électriques ; j'ai développé ce point de vue dans un exposé publié à la *Revue Générale de l'Electricité* (1936, t. 39, p. 3) auquel je renvoie pour les détails <sup>(1)</sup> et les références ; j'en veux donner ici un résumé, avant de passer à une extension des résultats, et d'étudier de plus près le parallélisme entre cet exemple et ceux que connaissent les théoriciens de la physique.



Quadripole (a)

Fig. 1.

Les techniciens appellent quadripôle un réseau terminé par deux bornes d'entrée (à gauche) et deux bornes de sortie (à droite), les voltages et courants à l'entrée sont  $v$  et  $j$  ; à la sortie,  $v'$  et  $j'$  ; les sens sont ceux indiqués sur la figure 1 : le réseau est alimenté en courant alternatif de pulsation  $\omega$ , et ne contient que des éléments à caractéristiques linéaires ; posons alors

$$v = x_1 \quad j = x_2 \quad v' = x'_1 \quad j' = x'_2 \quad (1)$$

le quadripôle nous donnera deux relations linéaires que nous pourrions écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 & x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 & \text{ou} & \quad x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Un théorème général montre que les déterminants sont égaux à 1

$$|a| = |b| = 1 \quad (3)$$

et la résolution fournit alors les relations

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Le quadripôle est donc caractérisé par une matrice ( $a$ ) à deux lignes et deux colonnes, ou par la matrice inverse ( $b$ ) ; les relations (2) se résument ainsi

$$(b) = (a)^{-1} \quad x = (a).x' \quad x' = (b).x \quad (2 \text{ bis})$$

Si l'on connecte deux quadripôles  $a$  et  $a'$  l'un derrière l'autre, l'ensemble constitue un quadripôle dont la matrice  $A$  est le produit des deux matrices (fig. 2), car on a

$$\begin{aligned} x &= (a).x' = (a).(a').x'' & (A) &= (a).(a') \\ x'' &= (b').x' = (b').(b).x & (B) &= (A)^{-1} = (b').(b) = (a')^{-1}.(a)^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Dans ces formules, l'ordre doit être respecté ; les

<sup>(1)</sup> Voir aussi *Bulletin Soc. fr. Electriciens*, n° 63, mars 1936.

techniciens savent qu'il n'est pas en général indifférent de placer les quadripôles dans l'ordre  $a$ ,  $a'$  ou dans l'ordre inverse  $a'$ ,  $a$ . Cet exemple d'électrotechnique illustre donc d'une manière claire la non-commutativité dans la multiplication des matrices.

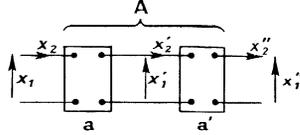


Fig. 2.

On peut avoir à considérer le quadripôle retourné bout pour bout, de matrice  $a''$ ,  $b''$ ; cette opération entraîne un changement de signe sur les courants  $x_2$  et  $x'_2$ , et fournit les matrices suivantes :

quadripôle retourné

$$\begin{pmatrix} b''_{11} & b''_{12} \\ b''_{21} & b''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Il sera très important de noter la forme particulière de matrice d'un quadripôle symétrique, qui est identique à son quadripôle retourné ; sa matrice sera caractérisée par la condition

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{ou} \quad b_{11} = b_{22}. \quad (7)$$

Pour éviter toute confusion avec les matrices symétriques, nous emploierons de préférence le mot « *inversible* » pour cette qualité.

La condition (3) n'a rien à voir avec la conservation de l'énergie ; il faut ici préciser que si *toutes les résistances sont nulles*, on doit avoir

$$b_{11} \text{ et } b_{22} \text{ réels ; } b_{12} \text{ et } b_{21} \text{ imaginaires purs.} \quad (8)$$

On peut d'ailleurs obtenir conservation de l'énergie dans d'autres conditions que celles définies en (8) ; il peut y avoir des résistances non nulles, dont les unes sont positives et les autres sont négatives, de sorte que leurs effets se compensent. Ce cas se présente avec les dispositifs comportant les lampes amplificatrices.

On peut préciser la condition que la puissance  $P$  fournie au quadripôle par les sources extérieures soit positive ou nulle. Cette condition sera plus générale que celle obtenue précédemment en (8), puisqu'elle laisse la possibilité d'utiliser dans certaines parties du circuit des résistances négatives ; compte tenu des signes des courants des deux côtés on a

$$P = \text{Re} (vj^* - v'j'^*) = \text{Re} (x_1 x_2^* - x'_1 x'_2)^* \geq 0 \quad (9)$$

où  $\text{Re}$  représente la partie réelle et l'astérisque indique l'imaginaire conjuguée. Le détail du calcul n'offre qu'un intérêt minime ; il aboutit aux trois conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} (b_{11} b_{21}^*) &\leq 0 & \text{ou} & & \text{Re} \left( \frac{b_{11}}{b_{21}} \right) &\leq 0 \\ \text{Re} (b_{22} b_{21}^*) &\leq 0 & \text{ou} & & \text{Re} \left( \frac{b_{22}}{b_{21}} \right) &\leq 0 \\ \left( \text{Re} \frac{1}{b_{21}} \right)^2 &\leq \text{Re} \left( \frac{b_{11}}{b_{21}} \right) \text{Re} \left( \frac{b_{22}}{b_{21}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ces conditions (10) sont plus larges que les relations (8). Le quadripôle non dissipatif s'obtient en prenant partout le signe d'égalité ; les mêmes conditions doivent être valables pour le quadripôle retourné (6), ce que l'on voit aussitôt puisque les conditions (10) contiennent  $b_{11}$  et  $b_{22}$  symétriquement.

Si toutes les résistances sont nulles, on a les relations (8), qui satisfont évidemment aux conditions (10).

Tous ces résultats nous montrent que la théorie des quadripôles et des filtres électriques se ramène à celle du groupe linéaire  $C_2$  (Van der Waerden. *Gruppen theoretische Methode*. Springer, Berlin, 1932. p. 57).

## 2. Ligne de quadripôles et propagation d'ondes.

— Considérons une ligne, formée d'une suite infinie de quadripôles identiques connectés les uns derrière les autres ; soient  $x_{1,n}$  et  $x_{2,n}$  le voltage et le courant à une jonction ;  $x_{1,n+1}$  et  $x_{2,n+1}$  le voltage et le courant à la jonction suivante ; ces grandeurs seront reliées par des formules du type (2). Nous aurons une propagation sous forme d'onde simple si la relation se réduit à

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &= \xi x_{1,n} \\ x_{2,n+1} &= \xi x_{2,n}. \end{aligned}$$

la comparaison avec (2) nous montre que  $\xi$  doit satisfaire à la condition

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - (b_{11} + b_{22}) \xi + 1 = 0. \quad (11)$$

$\xi$  est donc défini par l'équation aux valeurs propres de la matrice  $b$  ; le fait essentiel, c'est que la condition (3) nous montre que les deux racines  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  sont inverses l'une de l'autre, et peuvent être écrites

$$\xi_1 = e^{-\gamma} \quad \xi_2 = e^{+\gamma} \quad \gamma, \text{ constante de propagation (11 bis)}$$

ce qui correspond aux ondes se propageant soit vers la droite, soit vers la gauche ; dans ces deux cas la vitesse de propagation et le coefficient d'affaiblissement sont les mêmes : ce résultat est vrai pour les quadripôles dissymétriques aussi bien que pour les quadripôles symétriques (matrices inversables ou non).

Dans la propagation d'une onde unique, les grandeurs  $x_1$  et  $x_2$  varient proportionnellement, et l'on a

$$K = \frac{x_1}{x_2} = \frac{b_{12}}{\xi - b_{11}} = \frac{\xi - b_{22}}{b_{21}}. \quad (12)$$

Cette relation donne en général deux valeurs de la grandeur  $K$ , appelée *impédance itérative* ; ces deux

valeurs  $K_1$  et  $K_2$  correspondent aux deux racines  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de l'équation caractéristique; elles sont reliées aux pentes  $p_1$  et  $p_2$  des axes de la matrice ;

$$K_1 = \frac{1}{p_1} \quad K_2 = -\frac{1}{p_2}. \quad (13)$$

On sait que deux matrices ayant mêmes directions d'axes principaux sont commutables; c'est ce que les techniciens expriment en disant qu'entre deux quadripôles ayant mêmes impédances itératives il ne se produit pas de réflexion, de sorte qu'on peut échanger l'ordre des quadripôles sans rien modifier au résultat.

Pour un quadripôle *symétrique* ou *inversible*, les impédances itératives  $K_1$  et  $K_2$  correspondant aux deux sens de propagation sont égales. La matrice (b) peut être aisément exprimée en fonction des paramètres essentiels: impédances itératives  $K_1$ ,  $K_2$  et constante de propagation  $\gamma$ , et l'on trouve

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_2 e^\gamma + K_1 e^{-\gamma}}{K_1 + K_2} & -\frac{2 K_1 K_2}{K_1 + K_2} \operatorname{sh} \gamma \\ 2 & \frac{K_1 e^\gamma + K_2 e^{-\gamma}}{K_1 + K_2} \operatorname{sh} \gamma \end{pmatrix}. \quad (14)$$

L'intérêt de cette décomposition c'est que si l'on prend une *ligne finie*, formée de  $n$  quadripôles identiques, il suffit de remplacer dans cette formule  $\gamma$  par  $n\gamma$  et l'on obtient la matrice représentant la ligne.

La ligne infinie présente des bandes d'arrêt et des *bandes passantes*; on dit qu'une fréquence est située dans une bande passante, si la propagation se fait *sans affaiblissement*, ce qui nécessite

$$\begin{aligned} \gamma &= i\beta \quad \text{imaginaire pur} \\ \left. \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\} &= \cos \beta \pm i \sin \beta. \end{aligned} \quad (15)$$

Or l'équation (11) nous fournit

$$\left. \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\} = b \pm i \sqrt{1 - b^2} \quad \text{avec} \quad b = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}). \quad (16)$$

La comparaison de ces deux formules nous indique que l'absence d'affaiblissement s'obtient lorsqu'on a

$$b \text{ réel} \quad |b| \leq 1$$

c'est-à-dire

$$b_{11} + b_{22} \text{ réel} \quad |b_{11} + b_{22}| \leq 2. \quad (17)$$

Cette condition ne coïncide pas avec celle (8) du quadripôle sans résistance, ni avec la relation (10) de non-dissipation. Cette condition est bien connue des techniciens et leur permet d'établir des « filtres électriques », c'est-à-dire des lignes de quadripôles laissant passer certaines fréquences, mais en arrêtant d'autres. L'importance pratique de ces résultats a provoqué de très nombreux travaux et des discussions extrêmement détaillées sur les différents types de modèles de quadripôles et leurs rendements pratiques.

Tous les théoriciens connaissent une méthode clas-

sique pour étudier le rôle d'une ligne: appliquant à l'entrée de la ligne certaines valeurs  $x_{1,0}$ ,  $x_{2,0}$  on décompose la perturbation ainsi définie en deux ondes se propageant séparément vers la droite et vers la gauche; à la sortie de la ligne il suffit de recomposer les deux ondes pour obtenir les valeurs  $x_{1,n}$  et  $x_{2,n}$  terminales. Cette méthode est identique à celle des mathématiciens qui, pour étudier une matrice, la rapportent à ses axes de manière à la mettre sous la forme diagonale

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

La formule globale (14) indiquée plus haut, résume le résultat de ce calcul.

### 3. Propagation des rayons X dans un cristal (Mauguin).

— Les formules que nous venons de rappeler représentent la forme la plus générale que l'on connaisse, pour les équations de propagation d'ondes suivant une ligne discontinue, composée d'éléments identiques. Suivant les problèmes, les quantités qui figurent sous les dénominations  $x_1$  et  $x_2$  pourront avoir les significations les plus variées, mais tout le cadre général restera le même. Seules les définitions d'énergie et de dissipation sont différentes sur chaque exemple. Voici un problème tout à fait différent qui se ramène exactement au schéma que nous venons d'étudier.

Mauguin a présenté récemment dans ce journal (t. 7, juin 1936, p. 233) une théorie très claire de la propagation des ondes dans un cristal. Il considère une suite de plans réfléchissants équidistants, plans d'atomes dans le cristal, et appelle  $\rho$  et  $\tau$  les coefficients de réflexion et transmission (complexes en général) sur chaque plan;  $q$  est le coefficient de déphasage ( $e^{-iq}$ ) dans la propagation d'un plan au suivant;  $t_p$  et  $r_p$  sont les amplitudes des ondes transmises et réfléchies, au niveau du plan numéro  $p$ . Les équations (1) et (2) de Mauguin s'écrivent

$$\begin{aligned} r_{p-1} &= \rho t_{p-1} + \tau q r_p \\ q^{-1} t_p &= \rho q r_p + \tau t_{p-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ces deux équations sont identiquement semblables à celles que nous avons trouvées (éq. 2) pour un quadripôle électrique.

Posons

$$t_p = x_{1,p} \quad r_p = x_{2,p} \quad (20)$$

et résolvons de manière à exprimer  $x_{1,p-1}$  et  $x_{2,p-1}$  en fonction de  $x_{1,p}$  et  $x_{2,p}$ . Nous trouvons

$$\left. \begin{aligned} x_{1,p-1} &= \frac{1}{\tau q} x_{1,p} - \frac{\rho q}{\tau} x_{2,p} \\ x_{2,p-1} &= \frac{\rho}{\tau q} x_{1,p} + \left( \tau q - \frac{\rho^2 q}{\tau} \right) x_{2,p}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Dans ce problème, nous rencontrons donc une matrice  $a$  dont voici l'expression

$$(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau q} & -\frac{\rho q}{\tau} \\ \frac{\rho}{\tau q} & \tau q - \frac{\rho^2 q}{\tau} \end{pmatrix} \quad |a| = 1. \quad (22)$$

Le déterminant de la matrice est égal à 1, tout comme pour le quadripôle; avec des coefficients  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $q$  arbitraires, il n'y a pas conservation de l'énergie; la conservation exige une condition supplémentaire

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1 \quad (23)$$

ce que Mauguin explicite ainsi

$$\rho = i \sin u e^{ia} \quad \tau = \cos u e^{ia}.$$

L'expression de l'énergie n'a pas ici la même forme que pour les lignes électriques.

Considérons un cristal d'épaisseur infinie, nous obtiendrons des bandes passantes et des bandes d'arrêt, qui correspondront ici aux cas de transmission totale des rayons X incidents, ou bien de réflexion totale. La réponse à cette question est donnée par la formule (17).

$$|b_{11} + b_{22}| = |a_{11} + a_{22}| \leq 2, \text{ réel; bande passante.} \quad (24)$$

C'est exactement la condition de Mauguin, qui trouve une transmission complète ou une réflexion totale suivant que  $|A|$  est inférieur ou supérieur à 2 avec (*loc. cit.*, p. 234 et 239)

$$A = \tau q + \frac{1}{\tau q} - \frac{\rho^2 q}{\tau} = a_{11} + a_{22}. \quad (25)$$

La coïncidence des résultats est donc rigoureuse; on pourrait aussi vérifier l'identité des formules établies par Mauguin, pour un cristal limité, avec celle que j'ai donnée plus haut (éq. 14) pour le quadripôle représentant une ligne de longueur finie; on se rappellera qu'il faut alors remplacer  $\gamma$  par  $n\gamma$ .

Mauguin calcule (p. 234) les ondes transmises et réfléchies par une série de  $n$  plans, constituant une lame cristalline d'épaisseur finie. Ses formules s'expriment au moyen de polynômes  $P_n$  dont voici la valeur :

$$P_n(A) = \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}} \quad \text{avec} \quad x + \frac{1}{x} = A. \quad (26)$$

Or cette dernière définition de  $x$ , donnée par Mauguin se ramène à notre équation (11), si l'on tient compte de la correspondance (25) des notations; le  $x$  de Mauguin est identique à  $\xi$ , et dès lors

$$x = \xi = e^{\gamma} \quad P_n(A) = \frac{\text{sh } n\gamma}{\text{sh } \gamma}. \quad (27)$$

**4. Passage de la ligne de quadripôles à une ligne continue.** — Nous avons étudié jusqu'ici des lignes formées de cellules finies; chacun des éléments de la ligne produisait une transformation finie, représentée par une matrice ( $b$ ). Un quadripôle infiniment

petit sera un élément qui transforme infiniment peu les variables, de sorte qu'on retrouve à la sortie presque les mêmes valeurs qu'à l'entrée; la matrice ( $b$ ) correspondante diffère très peu de la matrice unité. Appelons  $dz$  une longueur infiniment petite de la ligne, la matrice ( $b$ ) correspondant au segment  $dz$  pourra s'écrire ainsi

$$(b) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} dz & \varepsilon_{12} dz \\ \varepsilon_{21} dz & 1 + \varepsilon_{22} dz \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\text{ou encore } (b) = e^{(\varepsilon)dz} \quad (29)$$

en appelant ( $\varepsilon$ ) la matrice composée des éléments  $\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ . Conformément à la règle générale, le déterminant  $|b|$  doit être égal à l'unité, ce qui exige

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} \quad (30)$$

la condition  $|b| = 1$  est ainsi remplie au premier ordre. La matrice ( $b$ ) agissant sur deux grandeurs associées  $x_1$  et  $x_2$  les transforme en

$$x'_1 = x_1 + dx_1 \quad x'_2 = x_2 + dx_2 \quad (31)$$

ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x'_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ x'_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{cases} \quad (32)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 & \frac{dx}{dz} &= (\varepsilon).x \\ \frac{dx_2}{dz} &= \varepsilon_{21}x_1 - \varepsilon_{11}x_2 & & \end{aligned} \quad (33)$$

en tenant compte de (30). Si le quadripôle est symétrique (inversible) sa matrice ( $b$ ) doit satisfaire à la condition supplémentaire

$$b_{11} = b_{22} \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0. \quad (34)$$

La condition (30) nous impose ce résultat.

C'est ainsi que se présentent les choses en télégraphie; on définit un câble au moyen des éléments  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  qui sont la résistance, la self-inductance, la perditance et la capacité par unité de longueur  $z$  de la ligne; on obtient alors

$$\frac{dV}{dz} = (R + i\omega L)I \quad \frac{dI}{dz} = (G + i\omega C)V$$

ce qui correspond à

$$\frac{dx_1}{dz} = \varepsilon_{12}x_2 \quad \frac{dx_2}{dz} = \varepsilon_{21}x_1 \quad \begin{cases} \varepsilon_{12} = R + i\omega L \\ \varepsilon_{21} = G + i\omega C \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

La ligne est donc constituée de quadripôles infinitésimaux symétriques inversables, mais ce n'est pas le cas général, et nous verrons qu'il n'y a pas incompatibilité entre la conception de quadripôles infiniment petits,

capables de constituer une ligne continue, et la notion d'asymétrie des quadripôles. La propagation des ondes s'obtient en ramenant la matrice à ses axes, comme pour les quadripôles finis; en effet, si je demande

$$\frac{dx_1}{dz} = \gamma x_1 \quad \frac{dx_2}{dz} = \gamma x_2 \quad \gamma, \text{ constante de propagation}$$

les équations (33) me donnent

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11} - \gamma) x_1 + \epsilon_{12} x_2 &= 0 \\ \epsilon_{21} x_1 - (\epsilon_{11} + \gamma) x_2 &= 0 \\ \left| \begin{array}{cc} \epsilon_{11} - \gamma & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & -\epsilon_{11} - \gamma \end{array} \right| &= \gamma^2 - \epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12} \epsilon_{21} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de propagation  $\gamma$  (imaginaire en général) est donc donné par l'équation aux axes de la matrice  $(\epsilon)$ , dont les valeurs propres sont  $\pm \gamma$ . Dans le cas symétrique inversable, on retrouve la solution des téléphonistes

$$\epsilon_{11} = 0. \quad \gamma = \sqrt{\epsilon_{12} \epsilon_{21}} \quad K = \frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{21}}}$$

$K$  est l'impédance itérative de la ligne, et possède la même valeur pour les deux sens de propagation, correspondant aux deux signes de  $\gamma$ .

Passons au cas général, non inversable à coefficients constants; nous trouvons

$$\gamma = \pm \sqrt{\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{12} \epsilon_{21}}. \quad (38)$$

Nous aurons ici deux valeurs  $K_1$  et  $K_2$  de l'impédance itérative;  $K_1$  correspond à la propagation de gauche à droite ( $-\gamma$ ) et  $K_2$  à la propagation de droite à gauche ( $+\gamma$ ).

$$\left. \begin{array}{l} + K_1 \\ - K_2 \end{array} \right\} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\epsilon_{12}}{\pm \gamma - \epsilon_{11}} = \frac{\pm \gamma + \epsilon_{11}}{\epsilon_{21}}. \quad (39)$$

Les conditions sont tout à fait semblables à celles que nous avons trouvées pour les quadripôles dissymétriques finis, et les définitions sont les mêmes. Cette ligne de quadripôles infinitésimaux dissymétriques présente une étroite parenté avec une ligne ordinaire, dont les coefficients varieraient exponentiellement.

Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{\epsilon_{11} z} & x_2 &= X_2 e^{-\epsilon_{11} z} \\ A_{12} &= \epsilon_{12} e^{-2\epsilon_{11} z} & A_{21} &= \epsilon_{21} e^{2\epsilon_{11} z} \end{aligned}$$

et nous trouvons

$$\frac{dX_1}{dz} = A_{12} X_2 \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21} X_1. \quad (40)$$

La ligne caractérisée par la matrice  $(\epsilon)$  admet des solutions particulières sous forme d'ondes

$$x_1 = x_{10} e^{\pm \gamma z} \quad x_2 = x_{20} e^{\pm \gamma z}$$

où  $\gamma$  est défini par (38), nous en tirons les solutions applicables à la ligne (A) à variation exponentielle

$$X_1 = X_{10} e^{(-\epsilon_{11} \pm \gamma) z} \quad X_2 = X_{20} e^{(\epsilon_{11} \pm \gamma) z},$$

Sur cette ligne exponentielle, il y a donc propagation avec la constante  $\gamma$  de (38) et en plus transformation, avec un rapport de transformation  $e^{\epsilon_{11} z}$ : tout se passe comme si l'on avait une ligne constante ordinaire suivie d'un transformateur dont le rapport serait une fonction exponentielle de la longueur de ligne  $z$ . Le coefficient  $\epsilon_{11}$  peut être imaginaire, auquel cas notre ligne (A) a des propriétés variant périodiquement.

La même transformation s'applique aussi bien à une ligne de coefficients variables; supposons  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{21}$ ,  $\epsilon_{11}$  fonctions de  $z$  et posons

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \epsilon_{11} dz & x_1 &= X_1 e^{\varphi} & x_2 &= X_2 e^{-\varphi} \\ A_{12} &= \epsilon_{12} e^{-2\varphi} & A_{21} &= \epsilon_{21} e^{2\varphi} \end{aligned}$$

et nous sommes ramenés à

$$\frac{dX_1}{dz} = A_{12}(z) X_2 \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21}(z) X_1. \quad (41)$$

Nous pouvons chercher la matrice représentant le quadripôle équivalent à une ligne de longueur  $z$  finie; le problème se pose ainsi: appelons  $b(z)$  la matrice, qui exprimera les données à la sortie (en  $z$ ) en fonction des données à l'entrée ( $z = 0$ )

$$x_i(z) = b_{i1}(z) x_1(0) + b_{i2}(z) x_2(0) \quad i = 1, 2.$$

Prenons une section de longueur  $z$  et ajoutons un élément  $dz$  à la suite; la règle de multiplication (5) des matrices nous donne

$$b(z + dz) = b(dz) \cdot b(z) = (1 + \epsilon dz) \cdot b(z) \quad (42)$$

en utilisant l'expression (28) pour  $b(dz)$ .

Ce résultat s'explique ainsi

$$\frac{d}{dz} b_{ik} = \sum_l \epsilon_{il} b_{lk}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{db_{11}}{dz} = \epsilon_{11} b_{11} + \epsilon_{12} b_{21} \\ \frac{db_{21}}{dz} = \epsilon_{21} b_{11} - \epsilon_{11} b_{21} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{db_{12}}{dz} = \epsilon_{11} b_{12} + \epsilon_{12} b_{22} \\ \frac{db_{22}}{dz} = \epsilon_{21} b_{12} - \epsilon_{11} b_{22} \end{array} \right\} \quad (43)$$

Cela nous fait deux jeux d'équations du type (33); le premier porte sur  $b_{11}$ ,  $b_{21}$  et le second sur  $b_{12}$ ,  $b_{22}$ . Si donc nous savons résoudre les équations (33), nous pouvons calculer le quadripôle  $b(z)$  équivalent à la ligne.

Prenons l'exemple de la ligne à coefficients  $z$  constants, qui fournit comme solution les ondes ayant la constante de propagation  $\gamma$  et les impédances itératives  $K_1$ ,  $K_2$  indiquées en (39); la matrice en  $z = 0$  nous fournit les valeurs initiales des  $b$

$$b(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous chercherons pour les deux groupes  $b_{11}$ ,  $b_{21}$  et  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  des combinaisons linéaires des exponentielles  $e^{\pm \gamma z}$  qui satisfassent aux conditions initiales et aux rela-

tions (39); les voici

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{K_1 + K_2} (K_2 e^{\gamma z} + K_1 e^{-\gamma z}) \\ b_{12} &= \frac{-K_1 K_2}{K_1 + K_2} (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}) \\ b_{21} &= \frac{-1}{K_1 + K_2} (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}) \\ b_{22} &= \frac{1}{K_1 + K_2} (K_1 e^{\gamma z} + K_2 e^{-\gamma z}) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

La matrice  $b(z)$  garde bien un déterminant 1 et représente un quadripôle fini dissymétrique; pour les lignes usuelles,  $\varepsilon_{11}$  est nul,  $K_1$  et  $K_2$  sont égaux; la ligne forme un quadripôle symétrique inversable et nous retrouvons les formules de Kennelly. L'expression (44) est exactement du type (14) déjà indiqué pour un quadripôle fini ou une ligne de quadripôles.

La ligne a une résistance nulle si les conditions (8) sont remplies par la matrice (28), ce qui donne

$$\varepsilon_{11} \text{ réel; } \quad \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21} \text{ imaginaires purs.} \quad (45)$$

**5. Lignes continues périodiques; équations de Mathieu et Hill généralisées.** — L'exemple le plus étendu de ligne continue périodique nous est fourni par les équations (33), où nous supposons que les coefficients  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  et  $\varepsilon_{21}$  sont des fonctions périodiques de  $z$  ayant une même période commune  $L$ . On voit facilement que la solution générale s'obtient par superposition de deux solutions particulières de la forme indiquée par Floquet pour l'équation de Mathieu :

$$\left. \begin{aligned} x_1(z) &= e^{\pm \gamma z} f_1(z) \\ x_2(z) &= e^{\pm i z} f_2(z) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$f_1$  et  $f_2$  étant deux fonctions périodiques de période  $L$ . Cet exemple contient comme cas particulier les équations de Mathieu et de Hill. L'équation de Hill s'obtient avec la matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

ou  $F(z)$  est une fonction périodique de période  $L$ ; en effet, les équations (33) deviennent alors

$$\frac{dx_1}{dz} = x_2 \quad \frac{dx_2}{dz} = Fx_1 \quad \text{donc} \quad \frac{d^2 x_1}{dz^2} = Fx_1 \quad (48)$$

C'est bien la forme de Hill : l'exemple de Mathieu consiste à prendre pour  $F$  un sinus ordinaire.

En examinant la matrice (47) nous remarquons que le cas de Hill correspond à une ligne constituée d'éléments symétriques inversables qui ne satisfait pas à la condition (45) de résistances nulles. Un certain nombre d'exemples plus généraux peuvent se ramener à la forme de Hill; c'est ce que nous allons examiner. Nous opérerons la transformation (41)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int \varepsilon_{11} dz \\ \frac{dX_1}{dz} &= A_{12} X_2 \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21} X_1 \\ A_{12} &= \varepsilon_{12} e^{-2\gamma} \quad A_{21} = \varepsilon_{21} e^{2\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

La fonction  $\varepsilon_{11}$  est périodique en  $z$ ; si j'ajoute un segment  $L$  de longueur égale à la période,  $\varphi$  augmente de  $I$

$$\varphi(z + L) = \varphi(z) + I \quad I = \int_0^L \varepsilon_{11} dz \quad (50)$$

$I$  n'est nul que si  $\varepsilon_{11}$  a une valeur moyenne nulle. Après une période  $L$  nous notons que  $A_{12}$  et  $A_{21}$  sont respectivement multipliés par  $e^{-2I}$  et  $e^{+2I}$ . Les équations (49) se transforment ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{A_{12}} \frac{dX_1}{dz} \right) &= A_{21} X_1 \\ \frac{d^2 X_1}{dZ^2} &= \frac{A_{21}}{A_{12}} X_1 \quad \text{avec} \quad Z = \int A_{12} dz. \end{aligned} \quad (51)$$

nous voici ramenés à une équation qui ressemble à celle de Hill, mais la fonction

$$F = \frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{12}} e^{4\gamma} \quad (52)$$

n'est périodique que si  $\varepsilon_{11}$  a une moyenne nulle, de sorte que  $I$  soit aussi nul; dans ce cas seulement nos équations se ramènent au type Hill.

Nous pouvons donc ramener au type Hill les équations correspondant à une ligne périodique, composée d'éléments dissymétriques non inversables, pourvu que les dissymétries soient compensées, de sorte qu'une section de longueur  $L$  se retrouve symétrique inversable.

Si l'on sait former les solutions des équations (33), on peut intégrer les relations (43) et former la matrice correspondant à une section  $L$  de la ligne; on ramènera ainsi l'étude de la ligne continue périodique à celle d'une ligne de quadripôles identiques; mais il faut commencer, de toutes façons, par rechercher les solutions des équations (33) à coefficients périodiques.

**6. Normalisation des matrices ( $\varepsilon$ ); matrices de Pauli.** — Les lignes continues nous ont conduit à introduire les matrices

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{11} \end{pmatrix} \quad (28)$$

ces matrices jouissent de la propriété que leur carré est diagonal :

$$(\varepsilon)^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\varepsilon| & 0 \\ 0 & -|\varepsilon| \end{pmatrix} \quad (53)$$

en appelant  $|\varepsilon|$  le déterminant de la matrice. Dans ces conditions, il est naturel de mettre en facteur un

coefficient  $E(z)$  convenable et de normaliser la matrice de façon que son carré se réduise à l'unité :

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon| = -1 \\ (\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & -\sqrt{1 - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Cela sera toujours possible, sauf dans le cas exceptionnel où la matrice initiale aurait un déterminant nul; si nous supposons maintenant, nos matrices normalisées suivant cette règle (54) nous devons poser les équations générales (33) de propagation en y mettant en évidence le facteur  $E(z)$ ; nous écrirons  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  au lieu de  $x_1$  et  $x_2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} &= E(z) [\varepsilon_{11}\varphi_1 + \varepsilon_{12}\varphi_2] \\ \frac{d\varphi_2}{dz} &= E(z) [\varepsilon_{21}\varphi_1 - \varepsilon_{11}\varphi_2] \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ou encore symboliquement

$$\frac{d\varphi}{dz} = E \cdot (\varepsilon) \cdot \varphi. \quad (56)$$

La normalisation (54) présente divers avantages; la matrice  $(\varepsilon)^{-1}$  est égale à  $(\varepsilon)$  de sorte que (55) peut se résoudre et s'écrire

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} (\varepsilon) \frac{d\varphi}{dz} &= \varphi \\ \frac{1}{E} \left[ \varepsilon_{11} \frac{d\varphi_1}{dz} + \varepsilon_{12} \frac{d\varphi_2}{dz} \right] &= \varphi_1 \\ \frac{1}{E} \left[ \varepsilon_{21} \frac{d\varphi_1}{dz} - \varepsilon_{11} \frac{d\varphi_2}{dz} \right] &= \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Sous la forme symbolique (56) ou (57) on voit la parenté de nos équations avec celles que l'on a l'habitude d'écrire pour la propagation des ondes. *Supposons  $E$  et  $(\varepsilon)$  constants, indépendants de la coordonnée  $z$* , nous voyons que l'opérateur suivant est égal à 1

$$\frac{1}{E} (\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} = 1.$$

Élevons au carré; nous pouvons permuter les opérations  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $(\varepsilon)$  puisque les  $\varepsilon$  sont constants :

$$\frac{1}{E} (\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{E} (\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{E^2} (\varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{E^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ce qui signifie

$$\frac{1}{E^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \varphi \quad (59)$$

nous retrouvons l'équation usuelle de propagation, puisqu'il est toujours sous-entendu que les  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont

périodiques en  $t$  avec la pulsation  $\omega$ . Tout ceci se rapporte à une dimension, avec propagation le long d'une ligne; nous pouvons maintenant chercher à écrire les équations analogues pour un espace isotrope à trois dimensions  $x_1, x_2, x_3$ ; nous introduirons 3 matrices  $(\varepsilon)_1, (\varepsilon)_2$  et  $(\varepsilon)_3$  et un coefficient  $E$  constants, nous poserons une relation

$$(\varepsilon)_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + (\varepsilon)_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + (\varepsilon)_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} = E \varphi. \quad (60)$$

Cherchons alors à appliquer l'opération symbolique qui vient de réussir en (59), pour une dimension, et formons

$$\left[ (\varepsilon)_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\varepsilon)_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + (\varepsilon)_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right]^2;$$

cette expression se réduira à

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} = E^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta \varphi = E^2 \varphi \quad (61)$$

si nous avons les relations

$$(\varepsilon)_i^2 = 1 \quad (\varepsilon)_i (\varepsilon)_k + (\varepsilon)_k (\varepsilon)_i = 0 \quad i \neq k. \quad (62)$$

Les premières conditions correspondent simplement à notre normalisation (54); le second jeu de relations implique la non-commutativité.

Ces relations sont satisfaites par les trois matrices de Pauli :

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon)_1 &= 2m_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ (\varepsilon)_2 &= 2m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (\varepsilon)_3 &= 2m_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Ces trois matrices sont bien du type général  $(\varepsilon)$ , normalisé (54); on vérifie facilement qu'il est impossible de trouver une quatrième matrice de rang 2 satisfaisant aux relations (62). Ces matrices sont en outre hermitiques, caractère nouveau que nous n'avons pas rencontré jusqu'ici dans cet article.

La solution générale consistera à prendre trois combinaisons linéairement indépendantes de ces trois matrices.

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon)_i &= 2 [a_{i1}m_1 + a_{i2}m_2 + a_{i3}m_3] \quad i = 1, 2, 3 \\ \sum_k a_{ik}a_{jk} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

La forme générale d'équation aux dérivées partielles donnant la propagation des ondes est donc (60), qui représente un système de deux équations simultanées entre deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et où figurent les trois matrices (63) de Pauli ou bien trois combinaisons (64) de ces matrices.

Les deux premières matrices de Pauli sont « inver-

sables » au sens que nous avons donné à ce terme en parlant des quadripôles ; la troisième matrice n'est pas inversable. Cela correspond bien au fait que, dans la mécanique ondulatoire de l'électron, ces matrices se rapportent au moment magnétique d'un électron ayant son spin dirigé suivant l'axe  $z_3$ . La méthode à laquelle nous avons été conduit ici est calquée sur le procédé de linéarisation de Dirac, pour l'équation ondulatoire de l'électron. Nous ne pouvons toutefois pas encore aborder directement le problème de l'équation de Dirac, car celle-ci fait intervenir quatre matrices  $a_i$  d'ordre 4, satisfaisant d'ailleurs aux conditions (62) ; or, jusqu'à présent nous n'avons utilisé et rencontré que des matrices du second ordre. L'exemple suivant va nous permettre cette généralisation.

**7. Lignes électriques triphasées et polyphasées.**

— Considérons un sextipôle, comme celui de la figure 3, que nous supposons intercalé dans une

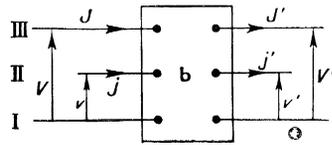


Fig. 3.

ligne triphasée ; nous avons 4 données à l'entrée  $v, j, V, J$  et autant à la sortie ; à l'intérieur du sextipôle se trouve un réseau électrique absolument quelconque, à caractéristiques linéaires (1) ; les 4 données à la sortie seront notées  $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$  et les 4 données à l'entrée  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  ; le sextipôle sera caractérisé par une matrice à 4 lignes et 4 colonnes

$$\varphi'_i = \sum_k b_{ik} \varphi_k. \tag{65}$$

En général, si je prends une ligne à  $2n + 1$  fils, et que j'intercale une cellule présentant  $2n + 1$  bornes, à gauche et autant à droite, j'obtiendrai un système linéaire caractérisé par une matrice de rang  $2n$ .

En physique théorique, on a rencontré des matrices de rang 4 (Dirac) et de rang 8 ou 16 (De Broglie) ; la parité est bien la même dans les deux cas.

La théorie générale de ces multipôles nous entraînerait trop loin, et serait d'ailleurs assez curieuse à établir : les théorèmes généraux qui, dans le cas du quadripôle, donnent la condition  $|b| = 1$  (éq. 3) nous fournissent pour le sextipôle triphasé un système de 6 conditions ; mais leur forme est très différente, et conduit à de tout autres conséquences. Ainsi, dans le cas du quadripôle, nous avons vu qu'on obtient les ondes simples en rapportant la matrice à ses axes ; et la condition (3) entraîne le fait que les ondes se propageant de droite à gauche ou de gauche à droite ont la

(1) R. JULIA et J. FALLOU ont considéré un problème analogue, mais avec la restriction que la cellule soit toujours équilibrée sur les trois phases, *C. R.* 1936, 202, p. 1767.

même constante de propagation. Pour les sextipôles triphasés, on trouve encore les ondes simples en rapportant la matrice à ses axes, mais les 6 conditions auxiliaires ne semblent pas permettre de trouver de relation simple entre les 4 types d'ondes possibles, ni même de prédire combien de ces ondes se propageront vers la droite ou vers la gauche.

Je laisserai donc de côté ce problème général, pour considérer seulement les sextipôles construits par juxtaposition de quadripôles.

Numérotions les variables de la manière suivante :

$$\begin{matrix} v & j & V & J & v' & j' & V' & J' \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & \varphi'_4. \end{matrix}$$

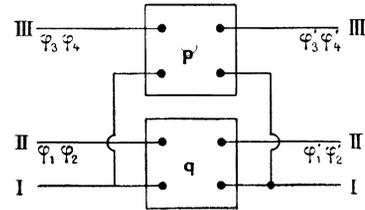


Fig. 4.

Nous disposerons un quadripôle  $p$  sur les fils I et III et un quadripôle  $q$  sur les fils I et II, suivant le schéma de la figure 4 ; nous aurons donc

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_1 &= q_{11} \varphi_1 + q_{12} \varphi_2 & \varphi'_3 &= p_{11} \varphi_3 + p_{12} \varphi_4 \\ \varphi'_2 &= q_{21} \varphi_1 + q_{22} \varphi_2 & \varphi'_4 &= p_{21} \varphi_3 + p_{22} \varphi_4. \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

Le sextipôle correspondant est alors représenté par la matrice

$$(b) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

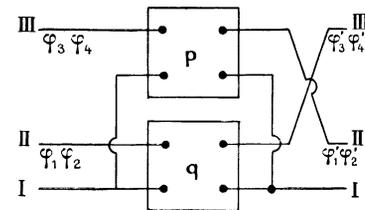


Fig. 5.

La figure 5 représente un montage analogue, mais où l'on a croisé les fils à la sortie ; la matrice correspondante devient

$$(b') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & p_{22} \\ q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

Supposons maintenant que nos quadripôles tendent vers zéro; les matrices  $p$  et  $q$  prennent la forme (28)

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \pi_{11} dz & \pi_{12} dz \\ \pi_{21} dz & 1 - \pi_{11} dz \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \chi_{11} dz & \chi_{12} dz \\ \chi_{21} dz & 1 - \chi_{11} dz \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (69)$$

La matrice ( $b$ ) de (67) va donc s'écrire

$$(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dz \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 & 0 \\ \chi_{21} & -\chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{11} & \pi_{12} \\ 0 & 0 & \pi_{21} & -\pi_{11} \end{pmatrix}. (70)$$

Nous aurons des quadripôles inversables, si  $\chi_{11}$  et  $\pi_{11}$  sont nuls; sinon nos quadripôles ne peuvent être inversés, et le sextipôle  $b$  non plus.

**8. Les équations de Dirac, pour l'électron libre.** — Les équations de Dirac s'obtiennent par le processus de linéarisation de l'équation relativiste de l'électron libre (1).

$$p_4^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - m_0^2 = 1 \quad c = 1 \quad (71)$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha_4 \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La formule (75) représente donc le système de 4 équations simultanées

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z_1} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial z_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z_3} + \frac{2\pi i m_0}{h} \psi_1 = 0. \\ \text{II.} \quad & \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z_1} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial z_2} + \frac{\partial \psi_4}{\partial z_3} + \frac{2\pi i m_0}{h} \psi_2 = 0. \\ \text{III.} \quad & -\frac{\partial \psi_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_3} + \frac{2\pi i m_0}{h} \psi_3 = 0. \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha_4 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

où l'on remplace les  $p$  par les opérateurs différentiels

$$p_i = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad p_4 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (72)$$

on obtient ainsi

$$(p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0) \psi = 0 \quad (73)$$

avec des matrices  $\alpha$  du 4<sup>e</sup> ordre qui satisfont aux relations

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 0 \quad i \neq k. \quad (74)$$

Multiplions à gauche par  $\alpha_k$  pour nous rapprocher de la forme (60) que nous avons trouvée pour trois dimensions; remplaçons les  $p$  par les opérateurs et nous trouvons

$$\left[ \alpha_4 \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha_2 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \alpha_3 \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{2\pi i}{h} m_0 \right] \psi = 0 \quad (75)$$

en prenant la vitesse  $c$  de la lumière égale à 1. La fonction d'onde  $\psi$  possède 4 composantes  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  et les matrices  $\alpha_i$  ont 4 lignes et 4 colonnes :

$$-\alpha_1 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha_4 \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\text{IV.} \quad -\frac{\partial \psi_4}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z_3} + \frac{2\pi i m_0}{h} \psi_4 = 0.$$

La première équation correspond aux valeurs des  $\alpha$  sur leur première ligne, et ainsi de suite. L'ordre des lignes des matrices ( $\alpha$ ) donne donc l'ordre des équations I, II, III, IV et n'a aucune importance réelle. Rangons ces équations dans l'ordre III, IV, I, II. Cela revient à intervertir les lignes des matrices  $\alpha$  et à les écrire ainsi

$$-\alpha_4 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha_4 \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

(1) L. DE BROGLIE: *L'électron magnétique*, Hermann, Paris, 1934, p. 137 et 227.

Sous cette forme, on voit que les trois dernières matrices sont du type  $\pi\chi$  de (70); les matrices  $(-\alpha_1\alpha_1)$  et  $(-\alpha_1\alpha_2)$  ont le caractère symétrique (ou inversable), tandis que la matrice  $(-\alpha_1\alpha_3)$  est dissymétrique (non inversable) avec  $\gamma_{11} = 1$  et  $\pi_{11} = -1$ . Ce caractère n'est pas fortuit, puisque la direction  $z_3$  est celle du spin de l'électron, tandis que  $z_1$  et  $z_2$  sont perpendiculaires à l'axe du spin. La matrice  $\alpha_4$  associée à l'axe du temps  $t$  est de nature différente, et ressemble à la matrice (68) des quadripôles à fils croisés.

La comparaison des matrices de Dirac avec les matrices  $(\varepsilon)$  que nous avons rencontrées dans la physique classique peut se faire aussi d'une autre façon, qui me paraît plus instructive que la précédente. Les matrices  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  de Dirac, à 4 lignes et 4 colonnes, seront considérées comme formées au moyen des 3 matrices de Pauli (63) et des deux matrices 0 et 1.

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elles s'écrivent alors ainsi

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} (0) & (\varepsilon)_2 \\ (\varepsilon)_2 & (0) \end{pmatrix} & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} (0) & (\varepsilon)_1 \\ (\varepsilon)_1 & (0) \end{pmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} (0) & -(\varepsilon)_3 \\ -(\varepsilon)_3 & (0) \end{pmatrix} & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} (1) & (0) \\ (0) & -(1) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (79)$$

Ces formules font ressortir le caractère suivant : les matrices  $\alpha$  ont la structure générale trouvée en (28) et (30), mais elles sont constituées non pas avec des éléments simples, mais au moyen des matrices de Pauli, qui sont elles-mêmes du type général (28).

Cette constitution apparaît encore plus clairement, si l'on se reporte à un tout récent mémoire de Dirac, sur les équations ondulatoires relativistes de particules de spin élevé (*Proc. Roy. Soc.*, A 155, 1936, p. 447). Dirac y envisage des matrices de spin  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$  de rang élevé, et il est conduit à former les combinaisons

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} (\alpha_z) & (\alpha_x - i\alpha_y) \\ (\alpha_x + i\alpha_y) & -(\alpha_z) \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} (\beta_z) & (\beta_x - i\beta_y) \\ (\beta_x + i\beta_y) & -(\beta_z) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (80)$$

Le caractère hermitique est bien visible; en outre, ce sont, de nouveau, des structures du type (28)-(30) à éléments matriciels, avec la caractéristique essentielle que les deux composantes de la diagonale principale sont égales et de signes opposés. Cette circonstance comporte la même conséquence déjà notée à propos des matrices  $(\varepsilon)$  : à toute onde se propageant dans un certain sens avec une constante de propagation  $\gamma$  correspond une onde de même caractère, avec constante  $-\gamma$ , c'est-à-dire se propageant exactement en sens inverse. En effet, on obtient les  $\gamma$  en rendant la matrice A diagonale; sa forme est alors nécessairement la suivante :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ 0 & & & & -\gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & & & & 0 & -\gamma_2 & 0 & \dots \\ 0 & & & & 0 & 0 & -\gamma_3 & \dots \end{pmatrix}$$

**9. Conclusion.** — Tous les problèmes de propagation d'ondes de la physique classique se ramènent donc à l'étude du *groupe linéaire*  $c_2$  à deux variables; il serait fort intéressant de reprendre à ce sujet, la discussion géométrique très détaillée que Ph. Le Corbeiller a donnée, sur les propriétés de ce groupe (Thèse, Paris 1926); du point de vue pédagogique, il y aurait grand intérêt à partir systématiquement de cette forme d'équations, pour l'étude de la propagation des ondes. Les quelques exemples physiques que j'ai présentés ici seraient faciles à compléter et à étendre, et l'on préparerait ainsi l'étude des équations de Pauli et Dirac, dont la forme cesserait de surprendre, puisqu'elle se présenterait comme une généralisation simple de faits élémentaires. Ce mode de présentation suggère d'ailleurs une nouvelle discussion des équations de Dirac, qui apparaissent ainsi sous un jour inédit. La propriété des matrices « *inversables* », que nous avons étudiée, n'avait jamais été soulignée jusqu'à présent.