



HAL
open science

Thermodynamique et géométrie affine

Léon Brillouin

► **To cite this version:**

Léon Brillouin. Thermodynamique et géométrie affine. Journal de Physique et le Radium, 1935, 6 (8), pp.359-360. 10.1051/jphysrad:0193500608035900 . jpa-00233345

HAL Id: jpa-00233345

<https://hal.science/jpa-00233345>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THERMODYNAMIQUE ET GÉOMÉTRIE AFFINE.

Par LÉON BRILLOUIN.

Sommaire. — Tous les diagrammes de la thermodynamique relèvent de la géométrie affine; des grandeurs p, v, T , n'ayant aucune commune mesure définissent un espace sans ds^2 ; c'est ce qui explique les notations si caractéristiques des dérivées partielles thermodynamiques.

1. Géométrie affine. — Je voudrais présenter quelques remarques générales, qui devraient, à mon avis, précéder tout exposé de la thermodynamique; je crois qu'elles aideraient les étudiants à mieux comprendre les méthodes de cette science.

Considérons deux variables x et y ; le raisonnement s'étend à un nombre quelconque de variables; nous faisons de la géométrie affine si nous considérons x et y comme les coordonnées dans un plan, sans ajouter l'hypothèse qu'on puisse comparer ces deux grandeurs. Les unités e_x et e_y suivant les deux axes ne sont pas comparables et peuvent être choisies arbitrairement. C'est dire que notre géométrie ne s'intéresse qu'aux propriétés qui restent invariantes dans une dilatation arbitraire parallèlement à x ou y .

Considérons un segment oblique OR; nous le définissons par ses deux composantes x et y (fig. 1), mais

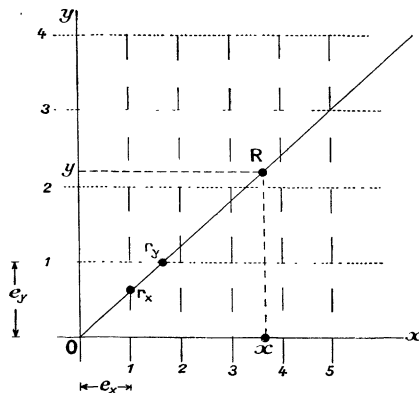


Fig. 1.

nous n'avons aucun moyen de définir la longueur OR; une formule

$$\overline{OR}^2 = x^2 + y^2$$

n'aurait aucun sens, puisque x et y ne sont pas comparables et n'ont pas commune mesure.

Nous pouvons toutefois procéder à des changements de variables, si nous savons définir deux fonctions X et Y des anciennes coordonnées x, y ,

$$X = f_1(x, y) \quad Y = f_2(x, y). \quad (1)$$

Les X et Y pourront être utilisés comme nouvelles variables; les fonctions f_1 et f_2 leur donnent une définition précise.

2. Une fonction et ses dérivées partielles. — Nous pouvons aussi définir une troisième grandeur

$$z = f(x, y) \quad (2)$$

et considérer x, y, z comme trois coordonnées d'un espace affine; nous saurons calculer les dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \quad (3)$$

l'indice inférieur indiquant qu'une certaine coordonnée, x ou y est maintenue constante. Supposons que nous voulions étudier la variation de z le long du chemin OR, et que ce dernier soit défini par une condition

$$F(x, y) = C^{te}. \quad (4)$$

Le long de OR, nous n'avons pas d'unité de longueur naturelle; nous pouvons employer comme unité

Soit r_x , segment dont la projection sur Ox est 1.

Soit r_y , — — — — — Oy est 1.

Nous pouvons ainsi définir une dérivée, en comparant la variation δz à la variation δx de la composante x , pour un déplacement le long de OR; ce sera

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_F \quad (5)$$

On définirait de même la dérivée $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_F$; la formule (5) est bien connue en thermodynamique.

Tous les diagrammes de la thermodynamique relèvent de la géométrie affine; les variables p, v, T , que l'on utilise, ont chacune leur unité de mesure, mais ces unités ne sont pas comparables; aucune méthode physique ne permet de comparer un intervalle de température δT à une variation de pression δp . Dans l'espace affine x, y, z , la relation (2) nous définit une surface. Sur cette surface, nous pouvons tracer des courbes de niveau (z constant) ou faire des sections verticales, à x ou y constant; mais nous ne pouvons définir la pente d'une ligne, ni parler de ligne de plus grande pente; cela résulte immédiatement du fait qu'il est impossible de mesurer une distance le long d'un chemin oblique, dans le plan x, y ; on retrouve ce fait par le raisonnement suivant: traçons un plan coté de notre

surface, en prenant pour e_x et e_y (unités suivant x et y) des longueurs de 1 cm ; nous aurons une certaine ligne de plus grande pente en un point P ; prenons maintenant $e_x = 1$ cm et $e_y = 2$ cm ; la ligne apparente de plus grande pente est changée. Or, nous ne pouvons comparer les unités e_x et e_y d'aucune façon ; il nous est donc impossible de définir univoquement une ligne de pente.

3. Géométrie métrique. — Nous retrouvons la géométrie usuelle, si nous savons définir une métrique, c'est-à-dire la distance de deux points quelconques dans l'espace x, y, z ; toutes les notions de pente, courbure,

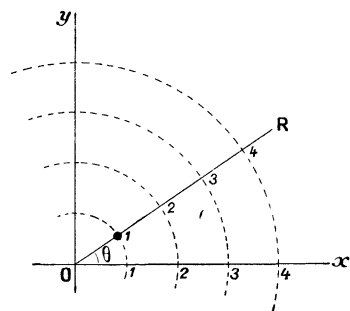


Fig. 2.

reprentent alors leur valeur. Il pourrait être intéressant de distinguer le cas où x et y sont comparables entre eux, mais pas comparables à z et celui où les trois grandeurs sont de même nature. Nous trouverons facilement des exemples du premier type : les diagrammes météorologiques définissent p (pression at-

mosphérique) comme fonction de deux coordonnées géographiques x, y : on peut alors tracer les courbes de niveau et les lignes de plus grande pente ; mais on ne peut définir d'une manière rigoureuse la valeur de la pente, ni la courbure de la surface.

Pour les dérivées partielles d'une fonction z , on pourra continuer à se servir des définitions du paragraphe précédent ; mais on préfère en général choisir la même unité suivant les deux axes x, y ; et utiliser cette unité naturelle r le long du chemin oblique OR ; la dérivée le long du chemin oblique sera

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_F \cos \theta = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_F \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Ces formules sont presque évidentes, et se déduisent alors directement des rapports des échelles choisies, suivant la direction oblique OR, sur les figures 1 et 2.

J'ai l'impression qu'il y aurait intérêt à introduire, dans l'enseignement élémentaire de la géométrie des courbes et surfaces ⁽¹⁾, la distinction entre géométrie affine et métrique. L'enseignement y gagnerait en précision, et l'on trouverait de nombreux exemples dans les sciences expérimentales, car presque tous les diagrammes relèvent de la géométrie affine, sans métrique ; la thermodynamique, en tous cas, est tout entière bâtie sur ce schéma.

⁽¹⁾ Cette note développe et précise quelques remarques, que j'ai introduites très succinctement dans un petit livre, à paraître en octobre prochain.

L. BRILLOUIN. *Notions élémentaires de mathématiques pour les Sciences expérimentales*, Masson, Paris 1935.