Sur la théorie quantique du rayonnement

L. Rosenfeld, J. Solomon

SUR LA THÉORIE QUANTIQUE DU RAYONNEMENT;

par L. ROSENFELD et J. SOLOMON.

Sommaire. — Dans le présent travail, on s'est efforcé de montrer que la difficulté de l'énergie infinie au zéro absolu de la radiation pouvait être levée si l'on se laisse guider par l'analogie avec la matière, sans modification des conditions de quantification admises actuellement, par un changement dans la forme de la densité d'énergie électromagnétique, changement en accord avec les équations de Maxwell et avec le principe de correspondance. Les nouvelles variables utilisées consistent essentiellement en combinaisons complexes du champ électrique et du champ magnétique. Ces modifications permettent un traitement correct et particulièrement simple de la question des fluctuations. La question de l'interaction du champ électromagnétique et de la matière n'est pas abordée dans ce travail.

Introduction. — Parmi les difficultés que rencontre actuellement la théorie des quanta, il en est une qui a été rencontrée dès les débuts de la mécanique quantique ; c'est la question de l'énergie au zéro absolu du rayonnement. Dans la mécanique quantique comme dans la théorie électromagnétique classique, le rayonnement présent dans une enceinte est considéré comme équivalent à une infinité de résonateurs harmoniques ayant respectivement pour fréquences les fréquences propres de résonance de l'enceinte et dont les échanges d'énergie donnent lieu à la loi de répartition de Planck. L'énergie appartenant à chacun de ces résonateurs doit être quantifiée conformément aux règles de la mécanique quantique. Or, l'on sait que contrairement à l'ancienne théorie des quanta, l'énergie d'un oscillateur de fréquence ν n'est plus égale à $n\,h\,\nu$, mais à $\left(n+\frac{1}{2}\right)h\,\nu$, n étant un nombre entier arbitraire ; l'introduction de ce facteur $\frac{1}{2}$ dans la quantification des oscillateurs harmoniques a été justifiée par la concordance avec l'expérience pour le cas des spectres de bandes et des chaleurs spécifiques des solides. Dans le cas présent, cette introduction est peu admissible. En effet, même lorsque tous les n sont nuls, c'est-à-dire au zéro absolu, les termes $\frac{1}{2}\,h\,\nu$ subsistent et entraînent l'existence d'une énergie infinie pour le rayonnement.

Comme il était difficile de douter de l'exactitude des conditions de quantification, comme nous venons de le dire, on a souvent supposé que cette énergie infinie existait bien, mais n'avait pas d'importance, car ce que nous observons, ce sont des variations de l'énergie d'un oscillateur

$$W_K = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\,\nu_K; \tag{1}$$

n variant de n_1 à n_2, le terme constant s'élimine par différence et n'a donc pas d'importance physique. Il faut cependant remarquer que le terme constant intervenait explicitement dans une question importante, la question des fluctuations du rayonnement où sa suppression fausse complètement le résultat. Enfin, l'attention a été de nouveau attirée sur cette question depuis que Heisenberg a montré qu'elle était, dans les conditions qu'il a précisées, en rapport étroit avec le problème de l'énergie propre de l'électron [1].

Dans ce travail, nous voudrions montrer qu'il est possible de faire disparaître cette difficulté, par une modification, non des conditions de quantification, mais de l'expression de l'énergie du champ électromagnétique.

1. Hypothèses fondamentales. — Posé dans ces termes, le problème est assez simple à résoudre. Nous cherchons à déterminer une fonction de Hamilton de laquelle on puisse déduire les équations de Maxwell. Cette expression de l'énergie devra se réduire à l'expression classique

$$W_0 = \frac{1}{2} \int (E^2 + H^2) \, \mathrm{d} V \tag{2}$$

lorsque l'on y fait $h = 0$, c'est-à-dire lorsque les grandeurs de champ sont considérées comme commutables. Cette expression de l'énergie devra nous donner par quantification les photons sans énergie au zéro absolu, et devra permettre une déduction correcte de la formule des fluctuations d'Einstein. Pour la former, on peut se laisser guider par l'analogie si féconde entre ondes lumineuses et ondes matérielles. On sait en effet que la densité d'électricité est donnée par

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{4} \psi_\alpha^+ \psi_\alpha \tag{2}$$

où ψ_α et ψ_α^+ sont des quantités complexes conjuguées et que cette expression donne une valeur correcte pour le nombre d'électrons correspondant à une énergie donnée : $N = 0, 1, 2, \ldots$ sans terme supplémentaire. Nous sommes donc conduits à envisager pour la fonction de Hamilton (densité d'énergie) que nous recherchons une expression de la forme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_\alpha F_\alpha F_\alpha^+ \tag{3}$$

où $F_\alpha\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $F_\alpha^+\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont des grandeurs complexes conjuguées caractérisant le champ. Comme il suffit de trois grandeurs pour caractériser un champ, α variera de 1 à 3. Nous reviendrons plus loin sur le fait que nos grandeurs de champ F_α et F_α^+ ne sont pas réelles, à propos des relations d'incertitude.

Dans ces conditions, nous allons voir que le problème ainsi posé est résolu si l'on établit entre les F_α, F_α^+ et les champs électrique et magnétique la correspondance suivante :

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha &= E_\alpha + \mathbf{i} \frac{\mathrm{rot}_\alpha}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}} H \\ F_\alpha^+ &= E_\alpha - \mathbf{i} \frac{\mathrm{rot}_\alpha}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}} H \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dans ces formules, E et H sont les champs électrique et magnétique habituels (unités

[1] W. Heisenberg, *Z. Physik.*, **65** (1930), p. 4.

d'Heaviside). L'expression $\frac{1}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}}$ représente un opérateur introduit par Landau et Peierls [1] et défini, pour une fonction donnée par son expression sous forme d'intégrale de Fourier

$$\Phi(x, y, z) = \int \varphi(K_x, K_y, K_z)\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}(K_x x + K_y y + K_z z)}\, \mathrm{d}K_x\, \mathrm{d}K_y\, \mathrm{d}K_z,$$

par

$$\frac{1}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}}\,\Phi(x, y, z) = -\int \frac{\varphi(K_x, K_y, K_z)}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}}\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}(K_x x + K_y y + K_z z)}\, \mathrm{d}K_x\, \mathrm{d}K_y\, \mathrm{d}K_z. \tag{5}$$

Nous noterons de même pour ce qui suivra la formule :

$$\sqrt{\Delta}\,\Phi(x, y, z) = \int \mathbf{i}\sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}\, \varphi(K_x, K_y, K_z)\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}(K_x x + K_y y + K_z z)}\, \mathrm{d}K_x\, \mathrm{d}K_y\, \mathrm{d}K_z. \tag{6}$$

L'application deux fois répétée de l'opérateur $\sqrt{\Delta}$ revient évidemment à l'application de l'opérateur laplacien habituel.

Mais pour tirer les conséquences que comporte le choix de cette fonction de Hamilton (3), il importe de connaître le moment conjugué de la variable F_α. Pour ce faire, il faut construire une fonction de Lagrange du système telle que les équations de Lagrange qu'on en déduit soient identiques moyennant (4) aux équations de Maxwell et qu'elle donne lieu à la fonction de Hamilton que nous venons d'indiquer. On obtient ainsi :

$$2L = \dot{F}_\alpha \frac{F_\alpha^+}{\sqrt{\Delta}} - F_\alpha F_\alpha^+ \tag{7}$$

où la sommation est sous-entendue par rapport à l'indice muet α, et où $\dot{F}_\alpha$ est défini par

$$\dot{F}_\alpha = \frac{\partial F_\alpha}{\partial(ct)}.$$

De (7) on déduit pour le moment conjugué de F_α :

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{F}_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{F_\alpha^+}{\sqrt{\Delta}}. \tag{8}$$

La première question qui se pose alors est de trouver les relations de permutation entre ces grandeurs. Il suffit pour cela d'appliquer la théorie générale de quantification des systèmes continus de Heisenberg et Pauli [2]. On obtient ainsi :

$$\left[\frac{1}{2}\frac{F_\alpha^+(x)}{\sqrt{\Delta}}, F_\beta(x')\right] = \frac{hc}{2\pi\mathbf{i}}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(x - x') \tag{9}$$

$$\left[F_\alpha^+(x), F_\beta^+(x')\right] = 0 \qquad \left[F_\alpha(x), F_\beta(x')\right] = 0. \tag{10}$$

(1) L. Landau et R. Peierls. *Z. Physik.*, **62** (1930), p. 188. A propos de ce travail, nous tenons à signaler que les considérations qui y sont esquissées au début contiennent en quelque sorte implicitement la théorie que nous développons, d'un point de vue assez différent.

(2) W. Heisenberg et W. Pauli. *Z. Physik.*, **56** (1929), p. 1

La relation (9) peut encore s'écrire :

$$\left[F_\alpha^+(x), F_\beta(x')\right] = 2 . \frac{hc}{2\pi \mathbf{i}} \delta_{\alpha\beta} \sqrt{\Delta}\, \delta(x - x'). \tag{11}$$

§ 2. **Équations de Maxwell.** — De ces relations de permutation, nous pouvons maintenant déduire facilement les équations de Hamilton de notre système. On trouve ainsi :

$$\dot{F}_\alpha = \sqrt{\Delta}\, F_\alpha \tag{12}$$

$$\dot{F}_\alpha^+ = - \sqrt{\Delta}\, F_\alpha^+ \tag{13}$$

relations auxquelles nous adjoignons, dans le cas du vide, la condition accessoire

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} F^+ = 0. \tag{14}$$

Voyons ce que représentent ces équations (12), (13) et (14) pour les champs E et H. En y remplaçant F_α et F_α^+ par (4), on obtient, en ajoutant et retranchant :

$$\frac{\dot{F}_\alpha + \dot{F}_\alpha^+}{2} = \dot{E}_\alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(F_\alpha - F_\alpha^+\right) = \sqrt{\Delta}\left[\frac{\mathrm{rot}_\alpha}{\sqrt{\Delta}} H\right] = \mathrm{rot}_\alpha H$$

$$\dot{H}_\alpha = \frac{\mathrm{rot}_\alpha}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}} \frac{\dot{F} - \dot{F}^+}{2\mathbf{i}} = \frac{\mathrm{rot}_\alpha}{\mathbf{i}\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\sqrt{\Delta} F + \sqrt{\Delta} F^+}{2\mathbf{i}}\right) = - \mathrm{rot}_\alpha\left(\frac{F + F^+}{2}\right) = - \mathrm{rot}_\alpha E$$

donc :

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\alpha &= \mathrm{rot}_\alpha H \\ \dot{H}_\alpha &= - \mathrm{rot}_\alpha E \\ \operatorname{div} E &= \operatorname{div} H = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

c'est-à-dire les équations de Maxwell. Le fait que nous obtenons ainsi canoniquement ces équations garantit l'invariance vis-à-vis du groupe de Lorentz de notre fonction de Lagrange et de nos relations de permutation (qui pour celles-ci découle naturellement de la théorie de Heisenberg et Pauli).

Il est intéressant également de voir ce que signifient à ce point de vue nos conditions d'échange. En y remplaçant les F_α et F_α^+ par (4), et en remarquant que, si A désigne le potentiel vecteur, on a

$$A = - \frac{\mathrm{rot}\, H}{\Delta} = - \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left(F - F^+\right),$$

on trouve :

$$[E_x, A_x] = - \frac{hc}{2\pi \mathbf{i}}\, \delta(x - x') \tag{16}$$

c'est-à-dire les mêmes relations d'échange que dans la théorie de Heisenberg et Pauli. Ceci est très satisfaisant parce que, comme l'ont montré Jordan et Pauli [1], ces relations s'obtiennent très naturellement, au moyen de raisonnements satisfaisant constamment aux conditions de l'invariance par rapport au groupe de Lorentz, à partir de relations simples de commutation entre composantes de Fourier du rayonnement, relations qui sont à la base de la théorie de la dispersion.

Il importe à ce propos de lever une objection. Nous avons dit au début de ce travail

[1] P. JORDAN et W. PAULI. *Z. Physik.*, **47** (1928), p. 151.

que nous cherchions à former des grandeurs complexes, donc non observables, pour caractériser le champ de manière à éviter les difficultés d'interprétation relatives à la mesure des champs dans le domaine atomique : et voici que nous en déduisons par addition et soustraction des relations de commutation pour les champs habituels. Mais nous pouvons convenir que, dans le domaine atomique, seules nos grandeurs F_α et F_α^+ ont un sens physique, tandis que les grandeurs E et H ne sont que des quantités mathématiques auxiliaires, de sorte que des relations telles que (16) ne peuvent être interprétées comme relations d'incertitude.

3. Energie au zéro absolu. — Il nous reste maintenant à prouver ce qui fait l'objet essentiel de cette théorie, c'est-à-dire qu'elle nous permet une quantification des ondes lumineuses sans énergie au zéro absolu. Pour le montrer, développons les F_α, F_α^+ en séries de fonctions orthogonales w_s, w_s^* correspondant à des ondes planes satisfaisant à une condition cyclique pour un cube d'arête L :

$$w_s = L^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{L}\left(K_1^{(s)}x + K_2^{(s)}y + K_3^{(s)}z\right)} \qquad w_s^* = L^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{L}\left(K_1^{(s)}x + K_2^{(s)}y + K_3^{(s)}z\right)} \tag{17}$$

où $\left(K_1^{(s)}, K_2^{(s)}, K_3^{(s)}\right)$ représente le « vecteur nodal » d'ordre s, relié à la fréquence $\nu^{(s)}$ de la vibration correspondante par

$$\nu^{(s)} = \frac{c}{2L}\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2 + \left(K_3^{(s)}\right)^2} = \frac{c}{2L}\,|K^{(s)}|.$$

Nous poserons donc

$$F_\alpha = \sum_s f_\alpha^{(s)} w_s \qquad F_\alpha^+ = \sum f_\alpha^{+(s)} w_s^* \tag{18}$$

où les w_s sont considérés comme des nombres c, les $f_\alpha^{(s)}$ et $f_\alpha^{+(s)}$ comme des nombres q. En portant les développements précédents dans les conditions de commutabilité (11), on obtient :

$$\left[f_\alpha^{+(s)}, f_\beta^{(s)}\right] = 2\delta_{\alpha\beta} h\nu^{(s)} \tag{19}$$

$$\left[f_\alpha^{+(s)}, f_\beta^{+(s)}\right] = 0 \qquad \left[f_\alpha^{(s)}, f_\beta^{(s)}\right] = 0 \tag{20}$$

et l'énergie totale $\mathcal{H}$ est mise ainsi sous la forme

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\sum_s \sum_\alpha f_\alpha^{(s)} f_\alpha^{+(s)}. \tag{21}$$

Considérons maintenant une rotation $D^{(s)}$ qui amène l'axe x_3 sur la direction $K^{(s)}$. Elle sera définie par une matrice $D_{\alpha\lambda}^{(s)}$ pour laquelle un tableau possible est le suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{K_2^{(s)}}{\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2}} & \dfrac{K_1^{(s)} K_3^{(s)}}{|K^{(s)}|\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2}} & \dfrac{K_1^{(s)}}{|K^{(s)}|} \\[2ex]
\dfrac{-K_1^{(s)}}{\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2}} & \dfrac{K_2^{(s)} K_3^{(s)}}{|K^{(s)}|\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2}} & \dfrac{K_2^{(s)}}{|K^{(s)}|} \\[2ex]
0 & -\dfrac{\sqrt{\left(K_1^{(s)}\right)^2 + \left(K_2^{(s)}\right)^2}}{|K^{(s)}|} & \dfrac{K_3^{(s)}}{|K^{(s)}|}
\end{array}$$

Les $f_\alpha^{(s)}$ et $f_\alpha^{+(s)}$ se transforment par cette rotation en nouvelles grandeurs $b_\lambda^{(s)}$ et $b_\lambda^{+(s)}$ telles que

$$f_\alpha^{(s)} = \sum_\lambda D_{\alpha\lambda}^{(s)} b_\lambda^{(s)}, \qquad f_\alpha^{+(s)} = \sum_\lambda D_{\alpha\lambda}^{(s)} b_\lambda^{+(s)}. \tag{22}$$

Quelle est la signification physique de ces nouvelles grandeurs? Nous voyons que $b_3^{(s)}$ et $b_3^{+(s)}$ sont dirigées suivant $K^{(s)}$ tandis que $b_1^{(s)}$ et $b_1^{+(s)}$, $b_2^{(s)}$ et $b_2^{+(s)}$ lui sont perpendiculaires. Ces deux derniers couples de grandeurs, situés dans le plan de la vibration lumineuse, répondent évidemment aux deux vibrations rectilignes en lesquelles on peut décomposer toute vibration lumineuse. Quant à $\left(b_3^{(s)}, b_3^{+(s)}\right)$ qui est dirigée suivant la direction de propagation de la vibration, elle apparaît comme une « vibration longitudinale » qui sera quantifiée comme les précédentes et donnera lieu à des « photons longitudinaux ». Elle répond tout simplement au champ électrique habituel, dont le rôle très distinct des autres manifestations de l'énergie électromagnétique apparaît ici très nettement. Dans le cas qui nous occupe, où la matière n'est pas présente, il est facile de montrer que, comme il fallait s'y attendre, cette composante est nulle. Il suffit pour cela d'utiliser la condition accessoire (14) qui s'écrit ici, comme on le vérifiera facilement,

$$b_3^{(s)} = b_3^{+(s)} = 0. \tag{23}$$

On vérifiera également que les $b_\alpha^{(s)}$, $b_\alpha^{+(s)}$ vérifient les mêmes relations de commutabilité que les $f_\alpha^{(s)}$, $f_\alpha^{+(s)}$, en particulier :

$$\left[b_\lambda^{+(s)}, b_\lambda^{(s)}\right] = 2h\nu^{(s)}, \tag{24}$$

et que, la substitution $D^{(s)}$ étant unitaire, on a encore

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_s \sum_\lambda b_\lambda^{(s)} b_\lambda^{+(s)} \tag{25}$$

Ceci posé, des relations (24), on déduit que l'on peut faire le changement de variables canoniques :

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda^{(s)} &= \sqrt{2h\nu^{(s)}}\, M_{s,\lambda}^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\Theta_\lambda^{(s)}} \\ b_\lambda^{+(s)} &= \sqrt{2h\nu^{(s)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\Theta_\lambda^{(s)}}\, M_{s,\lambda}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

où les $M_{s,\lambda}$ ont pour valeurs caractéristiques 0, 1, 2 ... et où les $\Theta_\lambda^{(s)}$ sont les variables de phase canoniquement conjuguées aux $M_{s,\lambda}$. En portant les expressions (26) dans (25), on obtient finalement

$$\overline{\mathcal{H}} = \sum_s (M_{s,1} + M_{s,2})\, h\nu^{(s)}, \tag{27}$$

où sont mises en évidence les deux vibrations rectilignes de fréquence $\nu^{(s)}$. Comme on le voit, nous obtenons bien la décomposition de l'énergie électromagnétique en photons, sans énergie au zéro absolu.

Il est intéressant de chercher maintenant en quoi notre expression (3) de l'énergie électromagnétique diffère de l'expression classique (2). On obtient facilement que, à une divergence près, qui n'importe pas dans la question, on a

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha F_\alpha F_\alpha^+ = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) - \frac{1}{2}\sum_x \left[E_x, \frac{\mathrm{rot}_x H}{\sqrt{\Delta}}\right] = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \frac{3}{2}\cdot\frac{hc}{2\pi\mathrm{i}}\sqrt{\Delta}\,\delta(x - x').$$

On voit que conformément au principe de correspondance, lorsque h tend vers zéro, on retombe sur l'expression classique de l'énergie électromagnétique. Mais dans le domaine de la théorie des quanta, nous voyons qu'il s'ajoute un terme qui est justement celui qui vient « compenser » l'énergie au zéro absolu.

4. **Fluctuations**. — Il va sans dire que de l'expression (27) on peut déduire de la manière habituelle la loi de Planck, si l'on suppose présent un petit fragment matériel. Il est plus intéressant de montrer que, toujours en l'absence de matière, cette théorie permet de retrouver correctement la célèbre formule des fluctuations d'Einstein.

La démonstration que nous allons donner suit étroitement celle de Born, Heisenberg et Jordan (1), et ressemble beaucoup à celle qu'a donnée plus récemment Möglich (2). Ce dernier auteur a montré en effet qu'il était possible d'obtenir une forme de l'énergie électromagnétique sans énergie au zéro absolu. La modification qu'il a proposée consiste à modifier l'ordre de certains facteurs dans l'expression de la fonction de Hamilton classique en fonction des coefficients de Fourier des champs, mais cette modification ne peut se traduire en langage de champs et reste liée à une représentation particulière, contrairement à notre théorie. Nous développerons cette démonstration, pour plus de simplicité, dans le cas d'un continuum à une dimension. Ce sera un segment de l'axe des x, de longueur L :

$$-\frac{L}{2} \leqq x \leqq \frac{L}{2}.$$

Les fonctions propres correspondantes sont :

$$w_j = L^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{L} r_j x} \qquad w_j^+ = L^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{L} r_j x}.$$

avec

$$\nu = \frac{c}{2L} r_j.$$

La fonction de Hamilton s'écrit dans ces conditions

$$H(x) = \frac{1}{2L} \sum_{jk} b_j b_k^+ \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{L}(r_j - r_k)x}$$

et l'énergie $W(a)$ relative au segment $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ est :

$$W(a) = \frac{a}{2L} \sum_{jk} b_j b_k^+ \frac{\sin \frac{\pi}{2L}(r_j - r_k) a}{\frac{\pi}{2L}(r_j - r_k) a}. \tag{28}$$

On obtient la valeur moyenne de cette énergie en faisant $j = k$

$$\overline{W(a)} = \frac{a}{L} \sum_j h\nu_j M_j \tag{29}$$

(1) M. Born, W. Heisenberg et P. Jordan, *Z. Physik*, **35** (1926), p. 557; M. Born et P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik* (1930), p. 392.

(2) F. Möglich, *Ann. der Physik*, **2** (1929), p. 676.

où l'on a posé :

$$b_j = \sqrt{2h\nu_j}\, M_j^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{e}^{-\frac{2\pi\mathbf{i}}{h}\theta_j} \qquad b_j^+ = \sqrt{2h\nu_j}\, \mathbf{e}^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{h}\theta_j}\, M_j^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient donc la fluctuation $\Delta = W(a) - \overline{W(a)}$, en convenant de considérer dans $W(a)$ la somme $\sum\limits_{k,j}$ étendue à toutes les valeurs de j et k avec la restriction $j \neq k$. Si maintenant on forme Δ^2 et que pour obtenir $\overline{\Delta^2}$ on prenne le terme diagonal de Δ^2, on trouve

$$\overline{\Delta^2} = \frac{h^2a^2}{L^2} \sum_{\substack{jk \\ j\neq k}} \nu_j\nu_k M_j(M_k + 1) \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2L}(r_j - r_k)a}{\frac{\pi}{2L}(r_j - r_k)a}\right]^2.$$

Supposons maintenant que L augmente indéfiniment, les fréquences propres ν_j seront de plus en plus rapprochées et à la limite la double somme se transforme en intégrale double, et en tenant compte de ce qu'il y a $\frac{2L\,\mathrm{d}\nu}{c}$ fréquences propres dans l'intervalle de fréquences $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$, on obtient

$$\overline{\Delta^2} = \frac{2h^2a}{c} \int \nu^2 M(\nu)\,[M(\nu) + 1]\,\mathrm{d}\nu.$$

Soit $\overline{\Delta_\nu^2}$ la partie de $\overline{\Delta^2}$ relative à l'intervalle $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$

$$\Delta_\nu^2 = \frac{2h^2a}{c}\nu^2 M^2(\nu)\,\mathrm{d}\nu + \frac{2h^2a}{c}\nu^2 M(\nu)\,\mathrm{d}\nu.$$

En décomposant de même $\overline{W(a)}$ avec pour $\overline{W_\nu}$ la valeur

$$\overline{W_\nu} = \frac{2ah}{c} M(\nu)\,\nu\,\mathrm{d}\nu$$

on trouve

$$\overline{\Delta_\nu^2} = \frac{\overline{W_\nu}^2}{\frac{2a}{c}\,\mathrm{d}\,\nu} + h\nu\,\overline{W_\nu}.$$

Soit z_ν le nombre de degrés de liberté de la radiation dans le « volume » a et soit n_ν le nombre de quanta de lumière appartenant à l'intervalle $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$ qui sont à l'intérieur de a :

$$z_\nu = 2a\,\frac{\mathrm{d}\nu}{c}, \qquad n_\nu = 2a.\frac{\mathrm{d}\nu}{c} M(\nu);$$

on obtient alors :

$$\frac{\overline{\Delta_\nu^2}}{\overline{W_\nu}^2} = \frac{1}{z_\nu} + \frac{1}{n_\nu}, \tag{30}$$

c'est-à-dire la formule d'Einstein. La démonstration précédente se généralise sans peine au cas tridimensionnel.

Conclusion. — Nous espérons avoir montré par le présent travail que la difficulté de l'énergie au zéro absolu du rayonnement est toute formelle et peut être supprimée, sans modification des règles actuelles de quantification des systèmes continus, par une transformation simple de la fonction de Hamilton du rayonnement. On pourra remarquer que la notion de potentiel vecteur ou scalaire n'intervient pas dans cette théorie, qui définit le champ électromagnétique par trois grandeurs, de sorte que certaines difficultés formelles de la théorie antérieure (1), qui provenaient de ce que le champ était défini par quatre grandeurs, disparaissent ici.

Nous tenons à remercier MM. les Prs Langevin et Bohr pour l'intérêt qu'ils ont porté au présent travail.

(1) L. Rosenfeld, *Ann. der Physik*, **5** (1930), p. 113.

Manuscrit reçu le 4 mars 1931.