



**HAL**  
open science

## Percolation site-lien dans les empilements 2D

D. Bideau, J.P. Troadec, L. Oger

► **To cite this version:**

D. Bideau, J.P. Troadec, L. Oger. Percolation site-lien dans les empilements 2D. Journal de Physique Lettres, 1983, 44 (8), pp.279-283. 10.1051/jphyslet:01983004408027900 . jpa-00232193

**HAL Id: jpa-00232193**

**<https://hal.science/jpa-00232193>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# LE JOURNAL DE PHYSIQUE - LETTRES

---

---

*J. Physique* — *LETTRES* 44 (1983) L-279 - L-283

15 AVRIL 1983, PAGE L- 279

Classification  
*Physics Abstracts*  
05.50

## Percolation site-lien dans les empilements 2D

D. Bideau, J. P. Troadec et L. Oger

Groupe d'Electronique et de Physique des Matériaux,  
U.E.R. S.P.M., Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex, France

(Reçu le 22 décembre 1982, accepté le 25 février 1983)

**Résumé.** — Nous considérons le problème de la percolation site-lien sur un réseau triangulaire modélisant un mélange aléatoire bidimensionnel de disques, l'absence d'un lien correspondant à un défaut de contact entre deux disques voisins. Dans le cas du réseau triangulaire régulier, sur la base d'une hypothèse sur la conduction d'une cellule du réseau direct et d'une cellule du réseau « concurrent », nous proposons un certain nombre de résultats sur les seuils de percolation et les lignes critiques, en bon accord avec les résultats exacts connus et les résultats de simulations numériques.

**Abstract.** — We consider the problem of site-bond percolation on a triangular lattice modeling a 2D random mixture of discs, an inactive bond corresponding to a lack of contact between two neighbour discs. For a regular triangular lattice, a hypothesis about conduction of a cell of the direct lattice and of a cell of the « rival » one permits us to propose some results about percolation thresholds and critical lines, in good agreement with the known exact results and results of numerical simulations.

Le problème de percolation site-lien a d'abord été discuté par Frisch et Hammersley [1]. Il a fait récemment l'objet de nombreuses études, soit par des techniques de renormalisation spatiale [2, 3], soit par la méthode des séries [4, 5]. Coniglio, Stanley et Klein [6] ont proposé un modèle pour la gélification des polymères basé sur la percolation site-lien corrélée.

De même, alors que la percolation a été proposée pour modéliser le comportement d'un mélange de grains conducteurs et isolants [7], les expériences sur les empilements réels ont montré qu'il fallait faire intervenir simultanément une percolation de sites (grains conducteurs ou non) et une percolation de liens (contact existant ou non entre deux grains) [8, 9]. Ceci conduit à une représentation de type réseau des empilements réels au niveau de leurs propriétés de conduction. Cette représentation est du même type que celle proposée par Dodds [10] pour leurs propriétés géométriques. Ce dernier modèle de géométrie statistique prend pour limite de tout empilement réel 2D de disques [11] un empilement dans lequel toutes les liaisons possibles entre disques sont

assurées, ce qui conduit à une triangulation complète du plan. Les liaisons « coupées » de l'empilement réel le seraient de façon aléatoire par rapport à cet empilement limite.

L'étude des propriétés de percolation d'un tel empilement est donc celle d'un réseau site-lien triangulaire, en général irrégulier : les sites  $S$  de ce réseau ont la même probabilité  $p(S)$  de conduire que les disques correspondants, les liens  $E$  ont la même probabilité  $p(E)$  d'être présents que les contacts entre disques. Dans le cas le plus général, ce type de problème n'a pas été étudié. Une première approche peut en être faite, à partir d'une comparaison entre le réseau lui-même et son réseau « concurrent ». Cette notion de réseau concurrent a été introduite par Sykes et Essam [12] (« matching lattice »). Elle peut être généralisée de la façon suivante ; nous construisons le réseau concurrent du réseau direct par deux opérations :

- 1) nous construisons la tessellation de Voronoï (cellules de Wigner-Seitz) du réseau direct ; les côtés des polygones de Voronoï ont pour support les médiatrices des liaisons du réseau direct [13] ;
- 2) un site est placé à l'intérieur de chaque polygone de Voronoï et est relié aux sommets de celui-ci.

Cette construction conduit à un réseau dont le nombre de sites et de liens est double de celui du réseau de départ. A titre d'exemple, nous avons représenté dans la figure 1 le réseau triangulaire régulier et son réseau concurrent.

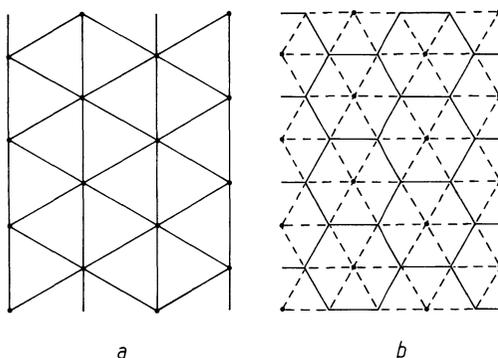


Fig. 1. — 1a. Réseau triangulaire régulier. 1b. Réseau concurrent du réseau 1a.

[1a. Regular triangular lattice, 1b. « rival » network of 1a lattice.]

Si nous affectons à chaque site  $S'$  et à chaque lien  $E'$  du réseau concurrent des probabilités d'existence respectives  $p(S')$  et  $p(E')$  telles que  $p(S') + p(S) = 1$  et  $p(E') + p(E) = 1$ , la construction précédente appliquée au réseau concurrent redonne le réseau direct, les sites (sommets des polygones) et liens (intérieurs aux polygones), toujours présents dans le réseau concurrent, disparaissent dans le réseau direct.

Ces relations entre réseau concurrent et réseau direct sont bien sûr insuffisantes pour déterminer la ligne critique séparant la zone conductrice de la zone isolante dans le plan ( $p(S)$ ,  $p(E)$ ). Dans le cas du réseau triangulaire régulier, à partir d'une hypothèse formulée par Wu [14] dans le cadre du modèle de Potts, et par transformation étoile-triangle des réseaux triangulaires et nid d'abeille, Kondor [15] a proposé une relation donnant cette ligne critique. Malheureusement, l'hypothèse formulée par Wu a été infirmée [16]. Nous proposons ici une nouvelle relation donnant cette ligne critique, également dans le cas du réseau régulier.

Nous considérons le réseau triangulaire régulier de la figure 1a, dans lequel les sites ont une probabilité d'existence  $p(S) = s$  et les liens une probabilité  $p(E) = b$ . Les probabilités correspondantes dans le réseau concurrent sont  $p(S') = A$  et  $p(E') = K$ , pour les éléments non affectés

de la probabilité 1. Nous pouvons considérer le réseau direct comme formé de cellules telles que celles représentées sur la figure 2a, cellules ayant en commun les sites du réseau. Une représentation du même type peut être donnée du réseau concurrent (Fig. 2b). Les corrélations entre cellules sont assurées, dans les deux réseaux par les sites communs à trois cellules. Nous formulons alors l'hypothèse suivante :

— au seuil, les probabilités de conduction à travers une cellule triangulaire sont les mêmes dans les deux réseaux, une cellule étant définie comme conductrice si on peut s'éloigner à l'infini en n'empruntant que des cellules ayant des configurations équivalentes à la sienne.

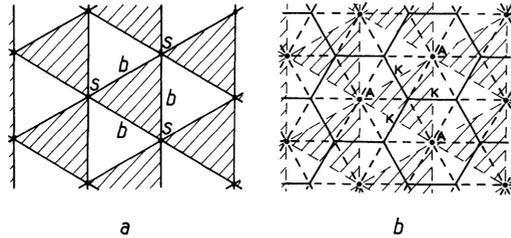


Fig. 2. — 2a. Décomposition du réseau 1a en cellules triangulaires. Les probabilités de site et de lien sont respectivement  $s$  et  $b$ . 2b. Décomposition du réseau 1b en cellules triangulaires. Les probabilités de site et de lien sont respectivement  $A$  et  $K$ .

[2a. Triangular cell partition of 1a lattice. Site and bond probabilities are respectively  $s$  and  $b$ . 2b. Triangular cell partition of 1b lattice. Site and bond probabilities are respectively  $A$  and  $K$ .]

Dans le réseau direct, une cellule est donc conductrice si on peut la traverser par deux sites connectés. Dans le réseau concurrent, une cellule est conductrice si on peut la traverser :

- par au moins deux liaisons  $K$  si aucun site n'est conducteur,
- par au moins deux sites conducteurs,
- par un site conducteur et la liaison  $K$  opposée.

Sur la base de notre hypothèse, au seuil, nous avons donc :

$$s^3(1 - (1 - b)^3) + 3 s^2(1 - s) b = A^3 + 3 A^2(1 - A) + 3 A(1 - A)^2 K + (1 - A)^3 \times (K^3 + 3 K^2(1 - K)). \quad (1)$$

Avec  $A = 1 - s$  et  $K = 1 - b$ , l'équation de la ligne critique dans le plan  $(s, b)$  s'écrit :

$$1 - 6 bs^2 + 3 bs^3 + b^3 s^3 = 0, \quad (2)$$

équation très différente de celle proposée par Kondor [15] :

$$s(3 b - b^3) = 1.$$

On retrouve bien les résultats proposés par Sykes et Essam [12] pour les réseaux site pur ( $s_c = \frac{1}{2}, b = 1$ ) et lien pur ( $s = 1, b_c = 2 \sin \pi/18$ ).

La figure 3 donne la ligne critique obtenue à partir de l'équation (2) dans le plan  $(s, b)$ , ainsi que les valeurs  $(s, b)$  obtenues par simulations numériques sur des réseaux triangulaires  $100 \times 100$ . Il y a bonne concordance entre la courbe et les résultats numériques.

Il nous a semblé également intéressant d'appliquer cette technique à un réseau triangulaire « généralisé », à savoir un réseau triangulaire dans lequel les liens correspondant aux trois direc-

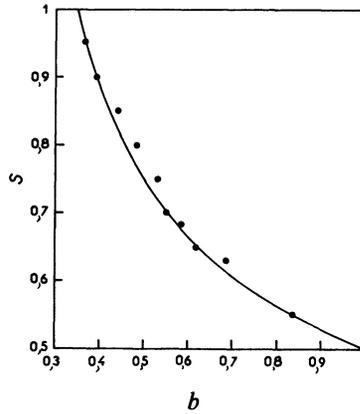


Fig. 3. — Ligne critique dans le plan  $(s, b)$  pour un réseau triangulaire régulier : — équation (2); ● simulations numériques.

[Critical line in plane  $(s, b)$  for regular triangular lattice : — equation (2); ● numerical simulations.]

tions dans le plan sont affectés de probabilités différentes :  $b, b', b''$ . Ce problème a été étudié dans des cas plus particuliers par Redner et Stanley [17] et Sykes et Essam [18] pour un réseau carré anisotrope ( $b \neq b', b'' = 0$ ), par Torrie *et al.* [5] et Guttman et Whittington [3] pour un réseau triangulaire « anisotrope » ( $b = b' \neq b''$ ).

Les deux réseaux (directs et concurrents) étant divisés en cellule suivant le même formalisme que précédemment, l'équation (1) devient :

$$s^3(1 - (1 - b)(1 - b')(1 - b'')) + s^2(1 - s)(b + b' + b'') = A^3 + 3A^2(1 - A) + A(1 - A)^2(K + K' + K'') + (1 - A)^3(KK' + KK'' + K'K'' - 2KK'K''). \quad (4)$$

Au seuil, avec  $A = 1 - s$ ,  $K = 1 - b$ ,  $K' = 1 - b'$ ,  $K'' = 1 - b''$ , on a

$$1 - 2(b + b' + b'')s^2 + (b + b' + b'' + bb'b'')s^3 = 0. \quad (5)$$

Cette relation nous donne, dans certains cas particuliers :

—  $b = b' = b''$  : résultats précédents.

—  $b' = b'' = 0$  : le réseau est alors linéaire. La ligne critique a pour équation :

$$1 - 2bs^2 + bs^3 = 0. \quad (6)$$

Ceci donne comme points critiques uniques ( $s_c = 1, b = 1$ ) et ( $b_c = 1, s = 1$ ).

—  $b'' = 0$  : Pour  $s = 1$ , l'équation (5) donne le résultat exact [17, 18]  $b + b' = 1$ .

Pour  $b = b'$ , nous sommes ramenés au problème de la percolation site-lien dans le réseau carré. Le tableau ci-dessous compare les résultats donnés par l'équation (4) avec ceux obtenus par la méthode des séries [5] lorsque  $b = b' = s$  et  $b'' = d$ .

Il y a bonne concordance entre les deux séries de valeur. La valeur du seuil pour  $b = 1$  ( $s_c \approx 0,597$ ) est très proche de celle obtenue par Sykes *et al.* [19] par la méthode des séries :  $s_c = 0,593 \pm 0,02$ .

Tableau I. — Valeurs de  $d$  et  $s_c$  données d'une part par la méthode de séries [5] et d'autre part par l'équation (4).

[Values of  $d$  and  $s_c$  given by series analysis [5] and equation (4).]

$d$	$s_c(d)$ [5]	$s_c(d)$ Eq. (4)
0	0,593	0,597
0,1	0,584	0,586
0,2	0,576	0,575
0,3	0,566 3	0,565 1
0,4	0,558 0	0,555 1
0,5	0,548 5	0,545 2
0,6	0,539 0	0,535 5
0,7	0,529 5	0,526 2
0,8	0,519 6	0,517 2
0,9	0,509 7	0,508 4
1	0,5	0,5

### Bibliographie

- [1] FRISCH, H. L. et HAMMERSLEY, J. M., *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **11** (1963) 894.
- [2] NAKANISHI, H. et REYNOLDS, P. J., *Phys. Lett. A* **71** (1979) 252.
- [3] GUTTMANN, A. J. et WHITTINGTON, S. G., *J. Phys. A* **15** (1982) 2267.
- [4] AGRAWAL, P., REDNER, S., REYNOLDS, P. J. et STANLEY, H. E., *J. Phys. A* **12** (1979) 2075.
- [5] TORRIE, G. M., GAUNT, D. S., GUTTMANN, A. J. et WHITTINGTON, S. G., *J. Phys. A* **15** (1982) 2259.
- [6] CONIGLIO, A., STANLEY, H. E. et KLEIN, W., *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 518.
- [7] KIRKPATRICK, S., *Rev. Mod. Phys.* **45** (1973) 574.
- [8] OTTAVI, H., CLERC, J., GIRAUD, G., ROUSSENO, J., GUYON, E. et MITESCU, C. D., *J. Phys. C* **11** (1978) 1311.
- [9] TROADEC, J. P. et BIDEAU, D., *J. Physique* **42** (1981) 113.
- [10] DODDS, J. A., *J. Coll. Interf. Sc.* **77** (1980) 317.
- [11] DODDS, J. A., *Nature* **256** (1975) 187.
- [12] SYKES, M. F. et ESSAM, J. W., *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1117.
- [13] ZIMAN, J. M., *Models of disorder* (Cambridge University Press) 1979.
- [14] WU, F. Y., *J. Phys. C* **12** (1979) 645.
- [15] KONDOR, I., *J. Phys. C* **13** (1980) 531.
- [16] WU, F. Y., *J. Phys. A* **14** (1981) 39.
- [17] REDNER, S. et STANLEY, H. E., *J. Phys. A* **12** (1979) 1267.
- [18] SYKES, M. F. et ESSAM, J. W., *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 3.
- [19] SYKES, M. F., GAUNT, D. S. et GLEN, M., *J. Phys. A* **9** (1976) 97.