



**HAL**  
open science

**RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE COQUE  
CYLINDRIQUE INFINIE PÉRIODIQUEMENT  
RAIDIE, IMMERGÉE DANS UN FLUIDE LOURD  
PAR UNE MÉTHODE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES  
DE FRONTIÈRES**

P.-O. Mattei

► **To cite this version:**

P.-O. Mattei. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE INFINIE PÉRIODIQUEMENT RAIDIE, IMMERGÉE DANS UN FLUIDE LOURD PAR UNE MÉTHODE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRES. *Journal de Physique Colloques*, 1990, 51 (C3), pp.C3-187-C3-196. 10.1051/jphyscol:1990320 . jpa-00230748

**HAL Id: jpa-00230748**

**<https://hal.science/jpa-00230748>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE INFINIE PÉRIODIQUEMENT RAIDIE, IMMERGÉE DANS UN FLUIDE LOURD PAR UNE MÉTHODE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRES**

P.-O. MATTEI

*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, 31 chemin Joseph-Aiguier, F-13402 Marseille Cedex 9, France*

**Resumé** - Une méthode générale est proposée pour le calcul du tenseur de Green d'une coque qui comporte une ou plusieurs séries de raidisseurs annulaires périodiquement espacés. Ce résultat est utilisé pour établir le champ de déplacement d'une coque qui comporte une série de raidisseurs et qui subit l'effet de contraintes circonférentielles de part et d'autre de l'origine. L'application présentée est le calcul de la pression acoustique rayonnée en champ lointain par cette coque. Les difficultés numériques rencontrées et les solutions adoptées sont proposées. Des exemples numériques sont présentés.

**Abstract** - A general method is proposed for the calculation of the Green tensor for a shell with one or several sets of periodic ring supports. By using this result, the displacement vector of a shell with one set of periodic ring supports submitted to two annular stresses is established. The foreseen application is the calculation of the radiated sound pressure. The numerical problems and the solutions adopted to solve those are proposed. Numerical examples are presented.

## 1 - INTRODUCTION

Décrire le comportement de plaques ou de coques raidies est délicat. Du fait de la présence des raidisseurs, les équations intégrodifférentielles qui gouvernent le déplacement ont des coefficients non constants. Une méthode proposée par Mace /1/ pour une plaque périodiquement raidie permet de contourner cette difficulté. Cette méthode a été étendue par Burroughs /2/ aux coques raidies par des anneaux qui n'agissent sur la coque que par l'intermédiaire de forces normales.

L'objet de cette communication est double. Par utilisation des résultats de /3-4/, le tenseur de Green d'une coque qui comporte un nombre quelconque de séries de raidisseurs périodiquement espacés est établi. Puis, par utilisation de ce noyau, un calcul du champ de déplacement d'une coque soumise à deux appuis simples de part et d'autre de l'origine est présenté. La méthode reste valable si les conditions aux limites sont différentes. La coque traitée dans ce dernier cas ne possède qu'une seule série de raidisseurs mais l'extension à un nombre quelconque ne présente aucune difficulté théorique.

En premier lieu, le cadre théorique est présenté. Dans la seconde partie, les aspects numériques et plus particulièrement les solutions adoptées pour traiter les problèmes rencontrés sont donnés. Enfin, divers exemples numériques sont proposés.

## 2 - DESCRIPTION DU MODELE MATHÉMATIQUE

### 2 - 1 - Mise en équations du problème

Une coque mince cylindrique d'épaisseur  $h_0$  et de rayon  $R$ , occupe une surface  $\sigma$  (fig. 1), définie dans le système de coordonnées cylindriques usuelles  $(x, \theta, z)$  par :  $-\infty < x < +\infty$  ;  $0 \leq \theta < 2\pi$  ;  $z = R$ .

Le changement de variables suivant est effectué :  $x_1 = x/R$ ,  $x_2 = \theta$ ,  $x_3 = z/R$ . Soit  $\sigma_1$ , la portion de la coque définie par  $-L/R < x_1 < +L/R$  et  $\sigma_{\pm}^{\pm}$  les parties de la coque respectivement définies par  $x_1 > L/R$  et  $x_1 < -L/R$ . L'extérieur  $\Omega$  de la surface  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_+^+ \cup \sigma_-^-$  est occupé par un fluide lourd de masse volumique  $\mu_0$  et de célérité du son  $c$ . L'intérieur de la coque contient un fluide suffisamment léger pour que son influence sur le mouvement de la coque soit négligée. On nomme  $\Sigma$ , la sphère de l'infini.

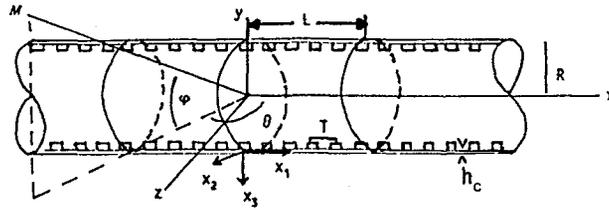


Figure 1. Géométrie de problème.

Une coque N-raïdie est une coque qui comporte N séries de raidisseurs annulaires. Chaque série de raidisseurs est formée d'un nombre infini d'anneaux identiques périodiquement espacés. Soient  $T_j$ ,  $j \in [1, N]$ , les périodes d'espacement interannulaire, on suppose  $T_j = \alpha_j T_1$  où les  $\alpha_j$  sont des entiers.

Pour la consistance du problème, l'opérateur d'anneau est établi avec un ordre d'approximation identique à celui de la coque /5/. Les anneaux sont de forme carrée, d'épaisseur  $h_r$ , de largeur  $b_r$  et de rayon  $R$ . Les lieux d'ancrage des anneaux sur la coque sont localisés aux points  $x_1 = nT_j$ ,  $n \in ]-\infty, +\infty[$  pour  $j \in [1, N]$ .

Pour prendre en compte l'effet des raidisseurs sur la coque, on écrit que chaque anneau exerce sur la coque une force de composantes normale, tangentielle et parallèle à l'axe de la coque non nulles. Par utilisation de l'opérateur des anneaux, les composantes de cette force sont reliées au champ de déplacement de l'anneau. D'autre part, les anneaux sont supposés rigidement liés à la coque. En chaque point d'ancrage, on écrit la continuité des déplacements.

Les propriétés mécaniques de la coque et des anneaux sont respectivement :

$E_s, E_r$  : modules d'Young  
 $\nu_s, \nu_r$  : coefficients de Poisson  
 $\mu_s, \mu_r$  : masses volumiques

Il n'y a pas de sources au sein du fluide. L'excitation appliquée à la coque est harmonique, elle s'exprime par  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)e^{-i\omega t}$  où  $\omega$  est la pulsation. Pour alléger l'écriture, le terme  $e^{-i\omega t}$  est supprimé.

L'opérateur des anneaux en régime harmonique s'exprime par le tenseur suivant :

$$\bar{\bar{A}} = \begin{cases} a_1^1 = -\frac{E_a}{R^2} I_{x_3} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 1 \right\} + \omega^2 \mu_a A \\ a_2^2 = \frac{E_a}{R^2} A \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega^2 \mu_a A \\ a_3^3 = \frac{E_a}{R^2} A + \frac{E_a}{R^2} I_{x_1} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \omega^2 \mu_a A \\ a_1^3 = a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0 \\ a_2^3 = a_3^2 = \frac{E_a}{R^2} A \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases} \quad (1)$$

où  $I_{x_1}$  et  $I_{x_2}$  sont les moments d'inertie principaux et  $A$  est la section droite d'un anneau. L'opérateur des coques est défini par /6/ :

$$\bar{C} = \begin{cases} c_1^1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu_c}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega^2 \mu_c \frac{1-\nu_c^2}{E_c} R^2 \\ c_2^2 = \frac{1-\nu_c}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega^2 \mu_c \frac{1-\nu_c^2}{E_c} R^2 \\ c_3^3 = 1 + \frac{h_c^2}{12 R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\}^2 - \omega^2 \mu_c \frac{1-\nu_c^2}{E_c} R^2 \\ c_1^2 = c_2^1 = \frac{1+\nu_c}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ c_1^3 = c_3^1 = \nu_c \frac{\partial}{\partial x_1} \\ c_2^3 = c_3^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases} \quad (2)$$

Soit  $\bar{u}(x_1, x_2)$ , le déplacement de la coque. Le déplacement du n-ième anneau de la j-ème série de raidisseurs est noté  $\bar{v}_n^j(x_2)$ . En chaque point  $nT_j$ , il y a continuité du déplacement de la coque et de l'anneau localisé en ce point. Soit p, la pression acoustique. Le déplacement de la coque et la pression acoustique sont solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D \bar{C} \bar{u} = F - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{Trp} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{j=N} \bar{f}_j & \text{sur } \sigma \\ (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites pour } u & \text{en } x_1 = \pm L/R \\ \text{Tr } \partial_{x_3} p = \omega^2 \mu_0 u_3 & \text{sur } \sigma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} [r \partial_r p + ikp] = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \bar{f}_j = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[ \bar{A}_j - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{A}_k \right] \bar{v}_n^j(x_2) \delta_{nT_j}(x_1) \quad \forall j \in [1, N] \\ \bar{v}_n^j(x_2) = \bar{u}(nT_j, x_2) & \forall n \in ]-\infty, +\infty[ \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $D = \frac{E h}{(1-\nu^2)R^2}$  est la rigidité à la flexion de la coque.

L'influence du fluide sur le mouvement de la coque s'exprime par l'intermédiaire de la représentation de Green de la pression acoustique rayonnée. La condition de continuité des vitesses normales de la coque et du fluide permet de relier la pression au déplacement normal. La forme la plus simple du noyau intégral qui représente le couplage semble être une série de Fourier par rapport à la variable angulaire. Chacun des coefficients de cette série s'exprime par une intégrale de Fourier //.

La condition de Sommerfeld pour p et les conditions aux limites pour u assurent l'existence et l'unicité des représentations de Green de la pression et du déplacement. Après introduction de la représentation de Green de la pression et écriture de la continuité des déplacements, la seule inconnue est le déplacement de la coque, il est solution du système intégrodifférentiel à coefficients non constants suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D \bar{C} + \bar{\mathfrak{K}}) \bar{u} = \bar{F} - \sum_{k=1n=-\infty}^{k=Nn=+\infty} \left( \bar{\mathfrak{A}}_j - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{\mathfrak{A}}_k \right) \bar{u}(nT_j, x_2) \delta_{nT_j}(x_1) \quad \text{sur } \sigma \\ \text{Conditions aux limites pour } u \end{array} \right. \quad \text{en } x_1 = \pm L/R \quad (4)$$

où  $\bar{\mathfrak{K}}$  est un opérateur matriciel défini par :

$$\mathfrak{K}_{ij}^3 = 0 \text{ si } (i,j) \neq (3,3) ; \mathfrak{K}_{33}^3 = \omega^2 \mu_0 \int_{\sigma} G(M,P) \cdot (P) dP \quad (5)$$

Pour introduire le représentation de Green du déplacement, ce qui, rappelons-le permet de tenir compte de la discontinuité du déplacement due aux contraintes circonférentielles, il est nécessaire de connaître le noyau de Green de la coque raidie couplée.

**2 - 2 - Tenseur de Green de la coque N-raïdie couplée avec le fluide**

Le tenseur de Green  $\bar{\mathfrak{G}}_N$  de la coque N-raïdie couplée au le fluide est la solution de :

$$(D\bar{C} + \bar{\mathfrak{K}}) \bar{\mathfrak{G}}_N(x_1, x_2; x'_1, x'_2) + \sum_{j=1n=-\infty}^{j=Nn=+\infty} \sum_{k=1}^{k=j-1} \left( \bar{\mathfrak{A}}_j - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{\mathfrak{A}}_k \right) \bar{\mathfrak{G}}_N(nT_j, x_2; x'_1, x'_2) \delta_{nT_j}(x_1) = \bar{\mathfrak{J}} (\delta_{x'_1}(x_1) \otimes \delta_{x'_2}(x_2)) \quad (6)$$

où  $\bar{\mathfrak{J}}$  est le tenseur identité et  $\otimes$  désigne le produit tensoriel usuel. La solution de (6), du fait de la géométrie du problème est de toute évidence périodique par rapport à la variable angulaire  $x_2$ , elle est cherchée sous forme d'une série de Fourier :

$$\bar{\mathfrak{G}}_N(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \bar{\mathfrak{G}}_{Nm}(x_1; x'_1) e^{im(x_2 - x'_2)} \quad (7)$$

$\bar{\mathfrak{G}}_{Nm}$  sont les coefficients de Fourier du tenseur de Green et sont solutions de l'équation suivante :

$$(D\bar{C}_m + \bar{\mathfrak{K}}_m) \bar{\mathfrak{G}}_{mN}(x_1; x'_1) + \sum_{j=1n=-\infty}^{j=Nn=+\infty} \sum_{k=1}^{k=j-1} \left( \bar{\mathfrak{A}}_{mj} - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{\mathfrak{A}}_{mk} \right) \bar{\mathfrak{G}}_{mN}(nT_j; x'_1) \delta_{nT_j}(x_1) = \bar{\mathfrak{J}} \delta_{x'_1}(x_1) \quad (8)$$

où  $\bar{C}_m$ ,  $\bar{\mathfrak{K}}_m$ ,  $\bar{\mathfrak{A}}_m$  sont les coefficients de Fourier de  $\bar{C}$ ,  $\bar{\mathfrak{K}}$  et  $\bar{\mathfrak{A}}$ .

Par transformation de Fourier par rapport à la variable  $x_1$ , (8) devient :

$$(D\bar{C}_m(\zeta) + \bar{\mathfrak{K}}_m(\zeta)) \bar{\mathfrak{G}}_{mN}(\zeta; x'_1) + \sum_{j=1n=-\infty}^{j=Nn=+\infty} \sum_{k=1}^{k=j-1} \left( \bar{\mathfrak{A}}_{mj} - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{\mathfrak{A}}_{mk} \right) \bar{\mathfrak{G}}_{mN}(nT_j; x'_1) e^{-2i\pi\zeta nT_j} = \bar{\mathfrak{J}} e^{-2i\pi\zeta x'_1} \quad (9)$$

La solution de l'équation (9) s'obtient par récurrence. Il convient de poser en premier lieu qu'une coque sans raidisseurs est 0-raïdie. Puis par utilisation des résultats de /3-4/, l'expression du noyau de Green de la coque 1-raïdie est donnée. De là, l'expression du noyau de Green de la coque N-raïdie est calculée comme fonction de celle de la coque (N-1)-raïdie.

Pour une coque 0-raïdie, l'équation (9) s'écrit :

$$(D\bar{C}_m(\zeta) + \bar{\mathfrak{K}}_m(\zeta)) \bar{\mathfrak{G}}_{m0}(\zeta; x'_1) = \bar{\mathfrak{J}} e^{-2i\pi\zeta x'_1} \quad (10)$$

soit :  $\hat{f}_m(\zeta) = [D\bar{C}_m(\zeta) + \bar{\mathfrak{K}}_m(\zeta)]^{-1}$ , La solution de (10) s'écrit :

$$\bar{\mathfrak{G}}_{m0}(\zeta; x'_1) = \hat{f}_m(\zeta) e^{-2i\pi\zeta x'_1} \quad (11)$$

Pour une coque 1-raïdie, il a été vu /3-4/ que la solution s'exprime comme suit :

$$\bar{\mathfrak{G}}_{m1}(\zeta; x'_1) = \hat{f}_m(\zeta) e^{-2i\pi\zeta x'_1} - \frac{\hat{f}_m(\zeta)}{T_1 \bar{\mathfrak{A}}_{m1}} \left( \bar{\mathfrak{J}} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T_1} \hat{f}_m(\zeta - \frac{n}{T_1}) \bar{\mathfrak{A}}_{m1} \right)^{-1} \left( \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n/T_1}(\zeta) * \left( \hat{f}_m(\zeta) e^{-2i\pi\zeta x'_1} \right) \right)$$

où \* est le produit de convolution usuel par rapport à  $\zeta$ .

Par utilisation de l'équation (11), la formule ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\mathfrak{G}_{m1}(\zeta; x'_1) = \mathfrak{G}_{m0}(\zeta; x'_1) - \frac{\mathfrak{G}_{m0}(\zeta; 0)}{T_1} \bar{\mathfrak{A}}_{m1} \left( \mathfrak{J} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T_1} \mathfrak{G}_{m0}(\zeta - \frac{n}{T_1}; 0) \bar{\mathfrak{A}}_{m1} \right)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n/T_1}(\zeta) * \mathfrak{G}_{m0}(\zeta; x'_1)$$

De cette dernière écriture, est déduite la solution générale de l'équation (9) :

$$\mathfrak{G}_{mN}(\zeta; x'_1) = \mathfrak{G}_{m(N-1)}(\zeta; x'_1) - \frac{\mathfrak{G}_{m(N-1)}(\zeta; 0)}{T_N} \bar{\mathfrak{A}}_{mN} \left( \mathfrak{J} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T_N} \mathfrak{G}_{m(N-1)}(\zeta - \frac{n}{T_N}; 0) \bar{\mathfrak{A}}_{mN} \right)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n/T_N}(\zeta) * \mathfrak{G}_{m(N-1)}(\zeta; x'_1) \quad (12)$$

où :  $\bar{\mathfrak{A}}_{mN} = \bar{\mathfrak{A}}_{mj} - \sum_{k=1}^{k=j-1} \bar{\mathfrak{A}}_{mk}$ .

Des équations (11) et (12), par transformée de Fourier inverse en  $x_1$ , la solution générale de l'équation (8) est déduite :

$$\bar{\mathfrak{G}}_{m0}(x_1; x'_1) = \bar{\Gamma}(x_1) * \delta_{x_1} \quad \text{pour } N = 0 \quad (13)$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_{mN}(x_1; x'_1) = \bar{\mathfrak{G}}_{m(N-1)}(x_1; x'_1) - \bar{\mathfrak{G}}_{m(N-1)}(x_1) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n/T_1}(\zeta) \bar{\mathfrak{G}}_{m(N-1)}(x_1; x'_1) \quad \text{pour } N > 0 \quad (14)$$

avec :  $\bar{\mathfrak{G}}_{mj}(x_1) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\bar{\mathfrak{G}}_{mj}(\zeta, 0)}{T} \bar{\mathfrak{A}}_{mj} \left( \mathfrak{J} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} \bar{\mathfrak{G}}_{mj}(\zeta - \frac{n}{T}; 0) \bar{\mathfrak{A}}_{mj} \right)^{-1} \right)$

**2 - 3 - Représentation de Green de la coque 1-raïdie en appuis simples**

Soit donc à résoudre le système différentiel (4) dans le cas d'une coque 1-raïdie. Pour simplifier l'écriture, l'indice 1 lié au nombre de séries de raidisseurs est omis. La coque est soumise à deux appuis simples qui s'exercent sur son pourtour, de part et d'autre de l'origine. Par utilisation de la théorie des distributions, les discontinuités du champ de déplacement de la coque introduisent des termes de sauts localisés aux points de discontinuités. Ces sources s'expriment en fonction de  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$  et de ses dérivées successives. Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \text{Tr} \left( \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{e1}}{\partial x_1} \right) = 0, & \text{Tr}(u_{i2} - u_{e2}) = 0 \\ \text{Tr}(u_{i3} - u_{e3}) = 0, & \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 u_{i3}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_{e3}}{\partial x_1^2} \right) = 0 \end{cases}$$

où  $u_i \in \sigma_i$  et  $u_e \in \sigma_e^\pm$ .

L'équation à résoudre est la suivante :

$$(D \bar{C} + \bar{\mathfrak{A}}) \bar{u}(x_1, x_2) = \bar{F} - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \bar{\mathfrak{A}} \bar{u}(nT, x_2) \delta_{nT}(x_1) - \bar{S}^+ + \bar{S}^- \quad (15)$$

Les sauts s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^\pm = \sigma_1(\pm L/R, x_2) \frac{\partial \delta_{\pm L/R}(x_1)}{\partial x_1} \\ S_2^\pm = \left\{ \frac{1+\nu_c}{2} \frac{\partial \sigma_1(\pm L/R, x_2)}{\partial x_2} + \frac{1-\nu_c}{2} \sigma_2'(\pm L/R, x_2) \right\} \delta_{\pm L/R}(x_1) \\ S_3^\pm = \left\{ \nu u_1(\pm L/R, x_2) + x \sigma_3'''(\pm L/R, x_2) + 2x \frac{\partial^2 \sigma_3'(\pm L/R, x_2)}{\partial x_2^2} \right\} \delta_{\pm L/R}(x_1) \\ \quad + x \sigma_3'(\pm L/R, x_2) \frac{\partial^2 \delta_{\pm L/R}(x_1)}{\partial x_1^2} \end{array} \right.$$

avec :  $\sigma_k^{(p)} = \left( \frac{\partial^p u_k(\pm L/R, x_2)}{\partial x_1^p} \right)_i - \left( \frac{\partial^p u_k(\pm L/R, x_2)}{\partial x_1^p} \right)_e$  et  $x = \frac{h_c^2}{12 r^2}$

Du fait de la géométrie du problème, le déplacement est développé en série de Fourier par rapport à  $x_2$ . Chaque coefficient de Fourier du déplacement est solution de l'équation suivante :

$$(\overline{D}\overline{c}_m + \overline{\mathcal{A}}_m) \overline{u}_m(x_1; x_1') + \overline{\mathcal{A}}_m \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{u}_m(nT; x_1') \delta_{nT}(x_1) = \overline{F}_m(x_1; x_1') - \overline{S}_m^+(x_1; \frac{L}{R}) + \overline{S}_m^-(x_1; \frac{L}{R}) \quad (16)$$

où les termes sources  $\overline{S}_m$  sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{m1}^\pm = \alpha_{m1}^\pm \frac{\partial \delta_{\pm L/R}(x_1)}{\partial x_1} \\ S_{m2}^\pm = \alpha_{m2}^\pm \delta_{\pm L/R}(x_1) \\ S_{m3}^\pm = \alpha_{m4}^\pm \delta_{\pm L/R} + \alpha_{m4}^\pm \frac{\partial^2 \delta_{\pm L/R}(x_1)}{\partial x_1^2} \end{array} \right.$$

Par utilisation du tenseur de Green de la coque 1-raïdiée dont la formule est donnée par (14), chaque harmonique angulaire du champ de déplacement  $\overline{u}_m$ , solution de l'équation (16) s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{u}_m(x_1; x_1') &= \overline{I}_m(x_1) * \left( \overline{F}_m(x_1; x_1') - \overline{S}_m^+(x_1 - \frac{L}{R}) + \overline{S}_m^-(x_1 - \frac{L}{R}) \right) \\ &\quad - \overline{\mathcal{B}}_m(x_1) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left( \delta_{nT}(x_1) \overline{I}_m(x_1) * \left( \overline{F}_m(x_1; x_1') - \overline{S}_m^+(x_1 - \frac{L}{R}) + \overline{S}_m^-(x_1 - \frac{L}{R}) \right) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Les nouvelles inconnues sont les densités des sources  $S_m^\pm$ . Pour les déterminer, on écrit en  $x_1 = \pm L/R$  les valeurs de  $\frac{\partial^2 u_{m3}}{\partial x_1^2}$ ,  $\frac{\partial u_{m1}}{\partial x_1}$ ,  $u_{m2}$ ,  $u_{m3}$ . Ce qui conduit à une infinité de systèmes de huit équations intégrales pour déterminer les huit fonctions inconnues  $\alpha_{mi}$  qui définissent  $S_m^\pm$ ; un système pour chaque harmonique angulaire.

Il ne semble pas possible d'obtenir des expressions analytiques simple des tenseurs  $\overline{I}_m$  et  $\overline{\mathcal{B}}_m$ . Par contre leur transformées de Fourier par rapport à  $x$ , sont connues explicitement. Ainsi, les coefficients des matrices et seconds membres sont donnés par des intégrales de Fourier.

### 3 - ASPECTS NUMERIQUES

Il a été vu au paragraphe précédent que le problème initial a été ramené à la résolution d'une suite de systèmes d'équations algébriques de rang huit. La principale difficulté réside dans l'évaluation des intégrales de Fourier qui donnent les coefficients des matrices et seconds membres de ces systèmes. Dans un premier temps, un bref aperçu des problèmes rencontrés et des solutions adoptées est proposé. Ensuite, le calcul du diagramme de directivité est présenté. Il est en particulier montré analytiquement que la pression asymptotique rayonnée par la coque est nul dans la direction de la génératrice du cylindre.

#### 3 - 1 - calcul des coefficients du système linéaire

Il faut tout d'abord remarquer que, d'après l'équation (17), le déplacement de la coque raidie comporte deux termes. Une contribution due à la coque non raidie et un terme qui caractérise l'effet des anneaux. Pour la suite des calculs, cette distinction sera maintenue. D'autre part, du fait des propriétés du produit de convolution et de la transformée de Fourier vis à vis de la mesure de Dirac et de ses dérivées /8/, on montre que les coefficients du système linéaire sont donnés par des intégrales du type suivant :

$$I_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^{(p+q)} \hat{f}_{mk}^j(\zeta) e^{2i\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)L/R\zeta} d\zeta \quad (18)$$

$$I_a = \sum_{l=1}^{l=3} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^p \hat{g}_{mk}^l(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}_{m1}^j(\zeta - \frac{n}{T}) \left(\zeta - \frac{n}{T}\right)^q e^{2i\pi\epsilon_1 L/R \frac{n}{T}} e^{2i\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)L/R\zeta} d\zeta \quad (19)$$

où  $I_c$  caractérise la contribution de la coque sans raidisseurs et  $I_a$  l'effet des raidisseurs.  $p$  et  $q$  caractérisent les ordres de dérivation introduit par la représentation de Green et l'application des conditions aux limites au champ de déplacement.  $m$  est toujours l'harmonique angulaire considérée dans l'équation (17).  $\hat{f}_{mi}^j$  est l'élément  $i$ -ème ligne  $j$ -ième colonne du tenseur  $\hat{f}_m$ .  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  valent  $\pm 1$  et déterminent la valeur où est calculée la transformée de Fourier inverse.

Puisque les intégrales ne doivent être calculées qu'en deux points, la méthode d'intégration choisie est de type Gauss-Legendre à pas variable qui est plus précise qu'une méthode FFT et permet une adaptation rapide du pas d'intégration aux variations locales de la fonction à intégrer.

Il est facile de voir que les fonctions  $\hat{f}_{mi}^j(\zeta)$  sont des fonctions paires ou impaires en  $\zeta$ . On en déduit qu'il en est de même pour les fonctions  $\hat{g}_{mi}^j(\zeta)$ . Il est évident que pour les intégrales (18), l'intégration se ramène entre 0 et  $+\infty$ . D'autre part, pour les intégrales (19), de part la parité des fonctions et les propriétés des séries infinies qui apparaissent dans le noyau de Green de la coque l-raïdie, on peut montrer que :

$$I_a = 2 \sum_{l=1}^{l=3} \int_0^{+\infty} \zeta^p \hat{g}_{mk}^l(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}_{m1}^j(\zeta - \frac{n}{T}) \left(\zeta - \frac{n}{T}\right)^q \cos 2i\pi L/R \left(-\epsilon_1 \frac{n}{T} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\zeta\right) d\zeta$$

si  $\zeta^p \hat{g}_{mk}^l(\zeta)$  et  $\hat{f}_{m1}^j(\zeta - \frac{n}{T}) \left(\zeta - \frac{n}{T}\right)^q$  sont de parités identiques. Si ces dernières sont de parités différentes, il convient de remplacer le terme en cosinus par un sinus multiplié par le nombre imaginaire pur  $i$ .

Cette méthode nécessite toutefois d'étudier plus en détails deux cas particuliers : le comportement des fonctions à l'infini et autour de point isolés.

#### Comportement à l'infini

Les fonctions  $\hat{f}_{mi}^j$  ont une décroissance à l'infini qui va de  $\zeta^{-2}$  à  $\zeta^{-6}$ . Les intégrales de Fourier correspondantes sont convergentes sauf celles qui traitent les dérivées secondes de  $\hat{f}_{m1}^1$  et quatrièmes de  $\hat{f}_{m3}^3$  car ces dernières décroissent respectivement en  $\zeta^{-2}$  et  $\zeta^{-4}$ . Les

décompositions suivantes sont utilisées :

$$\hat{f}_{m1}^j(\zeta) = \frac{\lambda_{m1}}{-4\pi^2\zeta^2 + b} + f_{m1}^j(\zeta) \text{ et } \hat{f}_{m3}^j(\zeta) = \frac{\lambda_{m3}}{16\pi^4\zeta^4 - d} + f_{m3}^j(\zeta)$$

où  $b, d$  et  $\lambda_{mi}$  sont des constantes (le choix de  $b$  et  $d$  est arbitraire). Les fonctions  $f_{mj}^j$  décroissent asymptotiquement en  $\zeta^{-4}$  pour  $j = 1$  et en  $\zeta^{-6}$  pour  $j = 3$ . Les premiers termes qui contiennent des singularités s'inversent analytiquement :

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\lambda_{m1}}{-4\pi^2\zeta^2 + b} \right) = \lambda_{m1} \frac{e^{i b |x_1|}}{2ib} ; \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\lambda_{m3}}{16\pi^4\zeta^4 - d} \right) = -\frac{\lambda_{m3}}{2d^2} \left( \frac{e^{i d |x_1|}}{2id} + \frac{e^{-d |x_1|}}{2d} \right)$$

Les intégrales sont alors somme des termes inversés analytiquement et d'intégrales de Fourier convergentes. Pour ce qui concerne les intégrales qui caractérisent l'effet des anneaux, la propriété du produit de convolution vis a vis de la dérivation (qui permet de choisir le terme sur lequel s'applique l'opérateur de dérivation) permet d'éviter ces problèmes en dérivant alternativement les deux termes. On rappelle qu'une dérivation est introduite par la convolution avec les sources, l'autre l'est par application des conditions aux limites qui amène le système de huit équations à huit inconnues.

Toujours de part les propriétés des fonctions  $\hat{f}_{mi}^j$ , on montre que les séries qui apparaissent dans le noyau de Green,  $\hat{S}_{mi}^j(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}_{mi}^j(\zeta - n/T)$ , convergent simplement. D'autre part, on montre que les séries  $\hat{S}_{mi}^j(\zeta)$  ont un comportement asymptotique en  $\zeta$  similaire aux  $\hat{f}_{mi}^j(\zeta)$ . Les intégrales  $I_a$  sont donc toutes convergentes.

Comportement pseudo-singulier autour de points isolés.

Par définition,  $\hat{f}_{mi}^j(\zeta) = \frac{N_{mi}^j(\zeta)}{\mathcal{D}_m(\zeta)}$ . Pour chaque mode, il existe une ou plusieurs valeurs  $\zeta_m$  pour lesquelles le déterminant  $\mathcal{D}_m(\zeta)$  s'annule ou est très voisin de zéro. On utilise alors la décomposition suivante. Les fonctions sont éventuellement multipliées par un cosinus ou un sinus :

$$I_c = \int_0^{\zeta_m - \epsilon_1} \zeta^{(p+q)} \hat{f}_{mk}^j(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_m + \epsilon_2}^{\zeta_m + \epsilon_2} \zeta^{(p+q)} \hat{f}_{mk}^j(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_m - \epsilon_1}^{\zeta_m + \epsilon_2} \zeta^{(p+q)} \hat{f}_{mk}^j(\zeta) d\zeta$$

Les deux premières intégrales sont calculées numériquement. La troisième est évaluée analytiquement comme suit :

$$\int_{\zeta_m - \epsilon_1}^{\zeta_m + \epsilon_2} \zeta^{(p+q)} \hat{f}_{mk}^j(\zeta) d\zeta = \frac{N_{mi}^j(\zeta_m)}{\mathcal{D}_m'(\zeta_m)} \int_{\zeta_m - \epsilon_1}^{\zeta_m + \epsilon_2} \frac{\zeta^{(p+q)}}{\zeta - \zeta_m} d\zeta$$

le calcul de cette dernière intégrale est classique. La dérivée du déterminant est connue analytiquement.

Il y a deux valeurs  $\zeta_m$  pour  $n = 0$ , il n'y en a qu'une pour  $n \neq 0$ . Les valeurs  $\zeta_m$  sont déterminées par dichotomie et l'intervalle est choisi de manière à minimiser l'erreur faite.

Soit à traiter maintenant les intégrales  $I_a$ . Supposons que sur  $[0; +\infty[$ ,  $\mathcal{D}_m$  ne s'annule qu'en une seule valeur ; pour plusieurs, le principe est le même. Il apparaît sur  $[0; +\infty[$  une infinité dénombrable de valeurs  $\zeta$  pour lesquelles  $\hat{S}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(\zeta - n/T)$  est singulière. En effet, sur chaque intervalle  $[k/T; (k+1)/T]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , il y a deux valeurs de  $\zeta$ ,  $\zeta_{m1}$  et  $\zeta_{m2}$  pour lesquelles  $\zeta - n/T = \zeta_m$  pour  $n = n_1$  et  $n = n_2$ . Comme précédemment, on isole les singularités en décomposant l'intégrale sur chaque intervalle  $[k/T; (k+1)/T]$  en cinq parties. Les trois premières sont évaluées numériquement. Les deux restantes sont traitées de la même manière

soit : 
$$I_{as} = \int_{\zeta_{m1}-\epsilon_1}^{\zeta_{m1}+\epsilon_1} \zeta^p \mathcal{E}(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(\zeta - \frac{n}{T}) \left(\zeta - \frac{n}{T}\right)^q \cos 2i\pi L/R \left(-\epsilon_1 \frac{n}{T} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \zeta\right) d\zeta$$

Sur l'intervalle d'intégration analytique choisi, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(\zeta - n/T) = \hat{f}(\zeta - n_1/T) + \sum_{n=-\infty}^{n=n_1-1} \hat{f}(\zeta - n/T) + \sum_{n=n_1+1}^{n=+\infty} \hat{f}(\zeta - n/T) \approx \hat{f}(\zeta - n_1/T)$$

or dans le terme  $\mathcal{E}$  apparait aussi cette série singulière. De part la définition de  $\mathcal{E}$ , on montre que  $I_{as}$  s'exprime sous la forme suivante :

$$I_{as} = \int_{\zeta_{m1}-\epsilon_1}^{\zeta_{m1}+\epsilon_1} \zeta^p \hat{f}(\zeta) \zeta^q \cos 2i\pi L/R \left(-\epsilon_1 \frac{n}{T} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \zeta\right) d\zeta$$

intégrale qui n'est plus singulière sauf si  $\zeta_{m1} = \zeta_m$  cas qui a été traité précédemment.

Il existe aussi des valeurs de  $\zeta$  pour lesquelles le déterminant qui définit  $\mathcal{E}$  est singulier. Le traitement de cette singularité s'effectue de la même manière que pour l'effet des coques. La seule différence provient du calcul de la dérivée du déterminant qui n'est plus connu analytiquement mais approché. Ces dernières valeurs sont déterminées par le programme d'intégration. L'intervalle d'intégration analytique est choisi de manière à introduire une erreur totale inférieure à l'erreur réalisée par l'intégration numérique.

L'inversion des systèmes linéaires d'ordre huit ne pose aucun problème particulier et se fait par un méthode classique.

### 3 - 2 - Calcul du diagramme de directivité

Pour des raisons de simplicité d'écriture, les résultats qui suivent sont donnés pour une coque sans contraintes, leur extension au cas de la coque contrainte ne présente aucune difficulté théorique.

La pression asymptotique rayonnée par une coque cylindrique en un point M, défini par ses coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$  est donnée par [7] :

$$p = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{4i\omega^2 \mu}{k \sin\theta} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \hat{u}_{m3} \left(\frac{k \cos\theta}{2\pi}\right) \frac{e^{im(\varphi - \pi/2)}}{H'_m(kR \sin\theta)} + O(r^{-2}) \quad (20)$$

$H'_m$  est la dérivée première de la fonction de Hankel de première espèce. La composante radiale du déplacement  $\hat{u}_3$  est donnée par la formule (17).

La représentation (20) est valable pour  $\theta$  compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . Cependant, lorsque  $\theta$  tend vers  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , l'expression ne peut être calculée numériquement en raison de la singularité de la fonction de Hankel à l'origine. Toutefois, cette expression possède une limite qui s'évalue analytiquement.

En utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Hankel à l'origine, on montre que  $\forall m \neq 0, H'_m(z) = O(1/z^{n+1})$  et  $H'_0(z) \approx 2i/\pi z$ . Le seul terme non nul dans le développement (20) est donc le terme qui correspond à  $m = 0$ . Il est donné par :

$$p(r \rightarrow \infty, \varphi, \theta = 0) = -\frac{e^{-ikr}}{2r} \omega^2 \mu \hat{u}_{03} \left(\frac{k \cos\theta}{2\pi}\right)$$

Le déplacement normal est donné par :

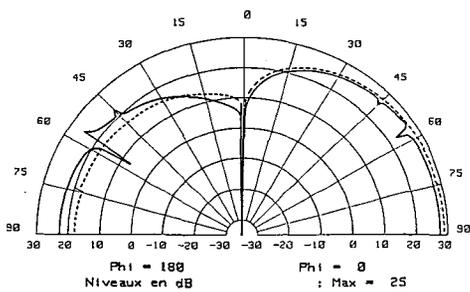
$$\hat{u}_{03}(\zeta; x'_1) = \sum_{k=1}^{k=3} \hat{f}_{03}^k(\zeta) F_{0k}(\zeta; x'_1) - \sum_{l=1}^{l=3} \hat{g}_{03}^l(\zeta) \left( \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{j=1}^j \hat{f}_{0j}^l(\zeta - n/T) F_{0j}(\zeta - n/T; x'_1) \right)$$

On peut montrer que les termes  $\hat{f}_{03}^k \left(\frac{kR \cos\theta}{2\pi}\right)$  sont des fractions rationnelles dont le dénominateur comporte une singularité en  $\ln(\sin\theta)$  due au terme de couplage et tendent vers zéro pour  $\theta$  qui tend vers  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . De même, les termes  $\hat{g}_{03}^l \left(\frac{kR \cos\theta}{2\pi}\right)$ , de part leur définition, sont nuls pour l'harmonique zéro et pour  $\theta$  qui tend vers  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .

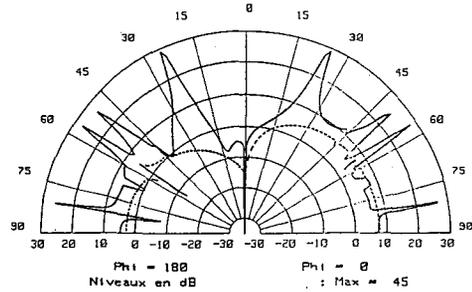
Pour le calcul numérique de la série (20), on peut montrer que les termes qui définissent  $\hat{u}_{03}$  sont soit pairs, soit impairs en  $m$ . Il est possible de ne calculer la série que pour les  $m$  positifs. Le nombre de termes pris en compte dépend de la fréquence et de la précision choisie, dans le cas considéré, celle-ci est inférieure au dB.

#### 4 - EXEMPLES NUMERIQUES

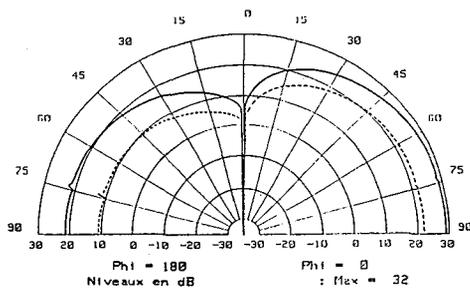
Les exemples présentés ci-dessous concernent une coque en acier de 6 m. de rayon, d'épaisseur 6 cm. Sur chaque figure, il est tracé deux courbes, une en traits pleins et une en pointillés qui permet une comparaison des niveaux acoustiques. Toutes les courbes sont tracées pour une fréquence de 50 Hz, trois modes ont été pris en compte. Dans tous les cas, les raidisseurs en acier sont identiques. La première série (0.1 m  $\times$  0.1 m) est espacée de 1 m.. La deuxième (0.2 m.  $\times$  0.2 m.) est espacée de 5 m. L'excitation est localisée à l'origine des axes de la coque.



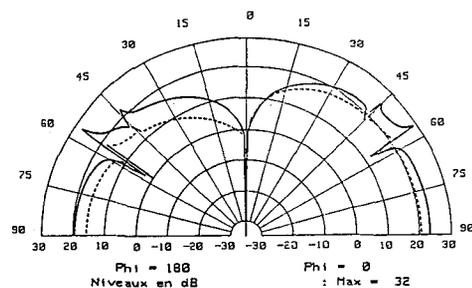
Coque 1-raïdie (ref. 0-raïdie)



Coque 2-raïdie (ref. 1-raïdie)



Coque contrainte 0-raïdie (ref. 0-raïdie)



Coque contrainte 1-raïdie (ref. 1-raïdie)

#### REFERENCES

- /1/ MACE, B.R. Sound radiation from a plate reinforced by two sets of parallel stiffeners, Journal of Sound and Vibration, 71, 3:435-441, 1980.
- /2/ BURROUGHS, C.B. Acoustic radiation from fluid loaded infinite circular cylinders with doubly periodic ring supports, Journal of the Acoustical Society of America, 75, 3:715-722, 1984.
- /3/ MATTEI, P.-O. Rayonnement acoustique d'une coque cylindrique infinie périodiquement raidie, immergée dans un fluide lourd, Premier Congrès Français d'Acoustique, Lyon, 1990.
- /4/ MATTEI, P.-O. Calculation of the displacement vector of a fluid-loaded stiffened cylindrical shell under constraints. EuroBEM Meeting, Nice, 1990.
- /5/ MATTEI, P.-O. Vibrations des structures élastiques, approximation corps minces, Note interne L.M.A. n°114, ISSN 0750-7356, 1989.
- /6/ LEISSA, A.W. Vibrations of shells, NASA SP-288 Washington DC, 1973.
- /7/ HABAULT, D. and FILIPPI, P. Sound radiation by a baffled cylindrical shell : a numerical technique based on boundary integral equations, Journal of Sound and Vibration, 131, 1:13-36, part 1-2, 1989.
- /8/ SCHWARTZ, L. Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.