



HAL
open science

FILTRES EN PEIGNE ADAPTATIFS POUR L'ESTIMATION DES COMPOSANTES HARMONIQUES D'UN SIGNAL

N. M'Sirdi, J. Zarader

► **To cite this version:**

N. M'Sirdi, J. Zarader. FILTRES EN PEIGNE ADAPTATIFS POUR L'ESTIMATION DES COMPOSANTES HARMONIQUES D'UN SIGNAL. Journal de Physique Colloques, 1990, 51 (C2), pp.C2-805-C2-808. 10.1051/jphyscol:19902188 . jpa-00230503

HAL Id: jpa-00230503

<https://hal.science/jpa-00230503>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1er Congrès Français d'Acoustique 1990

FILTRES EN PEIGNE ADAPTATIFS POUR L'ESTIMATION DES COMPOSANTES HARMONIQUES D'UN SIGNAL

N.K. M'SIRDI et J.L. ZARADER

Laboratoire de Robotique de Paris de l'Université Pierre et Marie Curie (CNRS UA 1305), 4, Place Jussieu, Tour 66, F-75252 Paris Cedex 05, France

RESUME

Nous présentons dans cet article les filtres en peigne adaptatifs (FPA). La technique que nous avons mis au point permet d'estimer un seul paramètre. Le FPA réalisé apparaît comme une mise en cascade de cellules de second ordre, où seul le paramètre de la première cellule est estimé. La convergence vers un minimum local est assurée si l'énergie du fondamental est suffisante. L'algorithme est globalement stable si le paramètre de biais (r) est convenablement choisi. Aucun test de stabilité n'est nécessaire. Si p est le nombre d'harmoniques du signal, l'algorithme développé ne nécessite que le calcul de $10p$ additions et $12p$ multiplications.

ABSTRACT:

The Adaptive Comb (FPA) Filters have notches at multiples of the fundamental frequency. For the FPA proposed in this communication, only one parameter is adapted for removal of harmonic components. The FPA is implemented as cascaded second order cells and only the parameter of the first cell is estimated. Depending on energy of the fundamental frequency, convergence to a local minimum can be realised. Some strategy (penalty) can be implemented to avoid this problem. It can be shown that the proposed algorithm is globally stable provided that the debiasing parameter is appropriately chosen. No stability test is needed. If p is the number of harmonic components, only $12p$ multiplications and $10p$ additions are required for the RML estimation of FPA parameters.

1 INTRODUCTION

Un grand nombre d'applications nécessitent le traitement de signaux ou de grandeurs physiques de nature harmonique, c'est à dire composés de sinusoïdes aux fréquences $f_0, 2f_0, \dots, pf_0$. La composante de fréquence la plus basse est appelée le fondamental (f_0). Les autres composantes correspondent aux harmoniques du signal ($2f_0, 3f_0, \dots, pf_0$). C'est le cas des signaux de sortie de processus non linéaires excités par une sinusoïde, comme les signaux de parole (voisée) ou de certains signaux biologiques.

Dans ce type d'applications la fréquence du fondamental (f_0) est le plus souvent inconnue et, compte tenu du caractère non-stationnaire des signaux traités, f_0 peut varier au cours du temps. Pour ces deux raisons, nous avons eu recours aux systèmes adaptatifs en introduisant des contraintes supplémentaires aux modèles ARMA pour l'estimation ou le filtrage adaptatif de ces fréquences [1-2].

L'utilisation de filtres sélectifs adaptatifs, dotés de bonnes propriétés, accroît la charge de calcul car les fréquences $f_0, 2f_0, \dots, pf_0$ sont paramétrisées indépendamment les unes des autres.

Au contraire, la mise en oeuvre de Filtres en Peigne Adaptatifs (FPA) [8],

permet d'estimer un seul coefficient au lieu de $2p$ pour les méthodes AR ou $4p$ pour les méthodes ARMA classiques. L'algorithme d'Adaptation Paramétrique (AAP) obtenu assure une estimation sans biais et une bonne capacité de poursuite des fréquences. Il est robuste vis à vis des erreurs de modélisation (nombre de fréquences sous estimé) et de la nature du bruit (cas de bruit non blanc). Ces propriétés ont été étudiées dans [3].

Après un bref exposé de la méthode de mise en oeuvre des FPA, nous étudierons la convergence et le biais d'estimation de ces filtres. Puis nous présenterons l'algorithme d'estimation de la phase et de l'amplitude des sinusoïdes présentes dans le signal.

2 FILTRES EN PEIGNES ADAPTATIFS.

Soit y_k le signal traité, y_k s'écrit :

$$y_k = \sum_{l=1}^p A_l \sin(l\omega_0 k + \alpha_l) + e_k \quad (1)$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0/f_e$, f_e étant la fréquence d'échantillonnage, A_l et α_l sont respectivement l'amplitude et la phase de la sinusoïde de fréquence (lf_0) (harmonique de rang l). On supposera que les harmoniques négligées, c'est à dire d'ordre supérieur à p , sont contenues dans le bruit e_k .

La modélisation ARMA du signal y_k

possède la particularité d'avoir des paramètres MA identiques à ceux de la partie AR [3]. Cette dernière remarque explique l'intérêt d'utiliser un FSA. D'autre part, nous pouvons appliquer une contrainte supplémentaire pour réduire le nombre de coefficients à estimer.

En effet, considérons le filtre sélectif symétrique défini par :

$$H(q^{-1}) = \prod_{l=1}^p \left(\frac{1 + a_l r q^{-1} + r^2 q^{-2}}{1 + a_l q^{-1} + q^{-2}} \right) = \prod_{l=1}^p F_l(q^{-1}) \quad (2)$$

Les coefficients a_l de ce filtre, générateur du signal y_k , sont liés à la fréquence du fondamental, par la relation : $a_1 = -2\cos(\omega_0) = -2\cos(2\pi(f_0/f_e))$ (3)

Nous pouvons ainsi déduire les coefficients a_l des filtres $F_l(q^{-1})$ à partir du premier coefficient a_1 . En utilisant les relations trigonométriques on obtient pour le calcul des coefficients a_l :

$$a_{2m} = -a_m^2 + 2 \quad \text{si } l=2m \quad (4a)$$

$$a_{2m+1} = -a_{2m-1} - a_1 a_{2m} \quad \text{si } l=2m+1 \quad (4b)$$

Seule l'estimation du paramètre a_1 , notée \hat{a}_1 , s'avère nécessaire. Nous noterons de plus que la partie MA du modèle (2) est stable si si \hat{a}_1 est vérifiée la relation :

$$r|\hat{a}_1| < 1+r^2$$

Ainsi le test de stabilité et la procédure de stabilisation sont simplifiés. L'adaptation du Filtre en Peigne se réalise par la procédure itérative suivante :

(i) Calcul de ϵ_k :

$$\epsilon_k = G_1(q^{-1})G_2(q^{-1})..G_p(q^{-1})y_k \quad (5a)$$

en posant

$$G_i(q^{-1}) = \frac{1}{F_i(q^{-1})} = \frac{1+a_i q^{-1} + q^{-2}}{1+r a_i q^{-1} + r^2 q^{-2}} \quad (5b)$$

(ii) Mise à jour $\hat{a}_1(k)$ par minimisation du critère :

$$V_k(\hat{a}_1, \epsilon_i) = - \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \quad (6)$$

(iii) Calcul des nouveaux paramètres $\hat{a}_2(k), \dots, \hat{a}_p(k)$ en utilisant les relations (4).

Puis reprendre à l'étape (i) jusqu'à la fin du traitement. L'erreur de prédiction ϵ_k résulte du filtrage du signal y_k par une cascade de filtres à encoches ($G_i(q^{-1})$

inverses des filtres sélectifs utilisés). L'estimation de la fréquence f_0 est effectuée par le filtre $F_1(q^{-1})$ ou $G_1(q^{-1})$. On peut écrire, en fin de convergence pour un signal stationnaire :

$$\epsilon_k = G_1(q^{-1})\tilde{y}_k \quad (7)$$

$$\tilde{y}_k = \prod_{l=2}^p G_l(q^{-1})y_k \quad (8)$$

L'approche EPR (Erreur de Prédiction Récurrente) [1-2] permet de déduire un algorithme du type Maximum de Vraisemblance Récurrent. Pour cela nous devons évaluer, la dérivée de l'erreur de prédiction, par rapport au paramètre qui nous donne l'expression du gradient :

$$\psi_{k-1} = \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(1-r)(1-rq)}{(1+ra_i q^{-1} + r^2 q^{-2})^2} \right\} \epsilon_{k-1} \quad (9)$$

ψ_{k-1} s'obtient par filtrage des mesures. Pour diminuer la complexité de l'algorithme, essentiellement dû au calcul de ψ_{k-1} , on peut procéder à une légère approximation de l'expression de ψ_{k-1}

Soit $f_j(k)$ ($j = 1, \dots, p$) le signal qui restitue, à la convergence, la composante jf_0 du signal y_k . Une séparation de ces signaux peut être obtenue à partir du filtre représenté sur la figure 1.

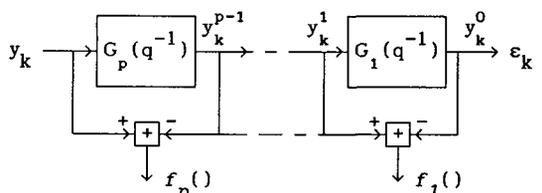


Figure 1 : Cascade de filtres à encoches.

Pour obtenir la composante supprimée par le filtre G_j , il suffit de soustraire la sortie du filtre à son entrée. L'équation (9) peut alors s'écrire aussi :

$$\psi_{k-1} = - \sum_{j=1}^p \left[\frac{d}{da_j} (G_j(q^{-1})) \prod_{i \neq j} G_i(q^{-1}) y_k \right]$$

$$\text{et } T_j(q^{-1}) = \prod_{i \neq j} G_i(q^{-1}) \quad (10)$$

Dans l'équation (10) $T_j(q^{-1})$ apparaît comme un filtre éliminant toutes les composantes différentes de jf_0 . On peut donc identifier le signal issu du filtrage de y_k par $T_j(q^{-1})$ au signal $f_j(k)$ (, si r est proche de 1). A l'aide de cette approximation, l'expression donnant ψ_{k-1} devient:

$$\psi_{k-1} = - \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j (f_j(k-1) - \epsilon_{k-1})}{1 + r a_j q^{-1} + r^2 q^{-2}} \quad (11)$$

La mise à jour du paramètre \hat{a}_1 se réalise de la manière suivante :

$$\hat{a}_1(k) = \hat{a}_1(k-1) + F_{k-1} \psi_{k-1} \epsilon_k \quad (12)$$

$$F_k = F_{k-1} / (1 + \psi_{k-1} F_{k-1} \psi_{k-1}) \quad (13)$$

3 ANALYSE DES PERFORMANCES DES FPA

3.1. Convergence

L'étude de convergence des méthodes de l'Erreur de Prédiction Récursives pour l'adaptation du FPA peut être réalisée de la même façon que pour les FSA. Les hypothèses nécessaires sont vérifiées et nous pouvons définir une Equation Différentielle Ordinaire (ODE) ([1-3], [6]), avec $\theta = \hat{a}_1$:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} (\hat{\theta}(\tau)) = R^{-1}(\tau) f(\hat{\theta}(\tau)) & (14a) \\ \frac{d}{d\tau} R(\tau) = G(\hat{\theta}(\tau)) - R(\tau) & (14b) \end{cases}$$

De plus :

$$f(\hat{\theta}(\tau)) = E\{\psi_{k-1} \varepsilon_k\} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} E\{\varepsilon_k^2\} \quad (15)$$

La fonction de Lyapunov s'écrit :

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} E\{\varepsilon_k^2\} \quad (16)$$

Le long de la trajectoire on a :

$$\frac{d}{d\tau} V(\hat{\theta}_D(\tau)) = f(\hat{\theta}_D(\tau))^T R^{-1}(\tau) f(\hat{\theta}_D(\tau)) \quad (17)$$

Sachant que R est définie positive, on en conclut que V(θ) décroît en dehors de :

$$D_c = \{\theta / f(\theta) = 0\} \quad (18)$$

et que les trajectoires de l'ODE associé convergent vers D_c quand τ tend vers l'infini.

Si le nombre de fréquences est sous estimé, la convergence se fera de façon à détecter le fondamental et les premières harmoniques sous la condition que les harmoniques de rang supérieur aient une énergie plus faible que celles estimées. Nous noterons, par ailleurs, que le problème éventuel de non convergence vers le minimum global peut être dû à une mauvaise estimation de la fréquence f_0 . En effet, si l'énergie du fondamental est inférieure à celle de l'une des harmoniques, le filtre G_1 est susceptible de caler sa fréquence sur cette harmonique. On a, dans ce cas, intérêt de démarrer l'adaptation avec un paramètre initial $a_1(0)$ proche de -2, qui correspond à un filtre en Peigne dont la fréquence f_0 est proche de zéro, et un gain d'adaptation initial faible. Cependant, dans la plupart des applications possibles des filtres en Peigne Adaptatifs, l'énergie du fondamental du signal est beaucoup plus importante que celle des harmoniques.

3.2 Biais de l'Estimation de la fréquence

Les points de convergence de l'AAP minimisant le critère $V(\hat{a}_1) = E\{\varepsilon_k^2\}$, sont caractérisés par l'équation $E\{\psi_{k-1} \varepsilon_k\} = 0$.

L'expression de ψ_{k-1} nous permet d'écrire :

$$\varepsilon_f = E\{\psi_{k-1} \varepsilon_k\} = 0 \quad \text{soit encore :} \quad (19)$$

$$\varepsilon_f = \sum_{j=1}^p \left\{ E \left[\frac{\beta_j (1-r)(1-rq^{-2}) \varepsilon_{k-1} \varepsilon_k}{(1+a_1 q^{-1} + q^{-2})(1+r a_1 q^{-1} + r^2 q^{-2})} \right] \right\} = 0$$

Nous poserons :

$$\phi_y(\omega) = \sum_{j=1}^p A_j \left[\delta(\omega - \omega_j) + \delta(\omega + \omega_j) \right] + \sigma^2$$

où $\phi(\omega)$ est la densité spectrale du signal et σ^2 celle du bruit.

Si on note ω_1 la pulsation à laquelle G_1 présente une encoche alors ω_1 sera celle de G_1 . En supposant que ω_1 est proche de ω_0 , nous avons :

$$G_1(e^{im\omega_0}) \approx \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 1 \\ 0 & \text{si } m = 1 \end{cases} \quad (20)$$

Cette hypothèse est légitime dans la mesure où la convergence de l'algorithme signifie que la fréquence estimée ω_1 sera proche de ω_0 . En tenant compte de (26) l'expression de ε_f devient :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{f1} + \varepsilon_{f2} = \frac{(1-r)}{\pi} \sum_{l=1}^p B_l + \varepsilon_{f2} \quad (21)$$

avec :

$$B_l = \frac{\beta_l (1 - r e^{2il\omega_0}) e^{il\omega_0} (1 + a_1 e^{-il\omega_0} + e^{-2il\omega_0})}{(1 + a_1 e^{il\omega_0} + e^{2il\omega_0})^2 (1 + r a_1 e^{-il\omega_0} + r^2 e^{-2il\omega_0})} \quad (22)$$

$$\varepsilon_{f2} = A \sum_{l=1}^p \int \frac{\beta_l (1-rz^2) z}{(1+r a_1 z+z^2)} \prod_{j=1}^p G_j(z^{-1}) \prod_{j=1}^p G_j(z) \frac{dz}{z}$$

et :

$$A = \frac{(1-r)}{2\pi i} \sigma^2$$

Le premier terme, $\varepsilon_{f1} = 0$ admet une solution unique qui est :

$$a_1 = -2\cos(\omega_0).$$

Le second terme ε_{f2} est faible et proportionnel à $(1-r)^2$. Finalement la solution de l'équation (24) sera donnée par l'expression [3] :

$$\hat{a}_1 = -2\cos(\omega_1) \approx -2\cos(\omega_0) + (1-r)^2 \sigma^2 \mathcal{E}(\omega_1, r) \quad (23)$$

où $\mathcal{E}(\omega_1, r)$ est un terme dépendant de la pulsation ω_1 d'encoche du filtre G_1 et du paramètre de réduction de biais r. Ce terme ($\mathcal{E}(\omega_1, r)$) provient de la contribution due au bruit dans l'expression de la dérivée de la puissance de l'erreur en sortie du filtre adaptatif. Il caractérise l'écart à la solution obtenue dans le cas sans bruit ($\sigma^2=0$). Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{2} &\approx \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = \sin((\omega_1 - \omega_0)/2) \\ \text{soit encore} \\ \frac{\Delta\omega}{2} &\approx \frac{(1-r)}{4r} \sigma^2 \frac{\mathcal{E}(\omega_1, r)}{\sin(\omega)} \end{aligned} \quad (24)$$

D'après (24), le biais donc est fonction de la variance du bruit σ^2 du paramètre r et la fréquence du signal.

4. ESTIMATION DES AMPLITUDES ET PHASES

Dans cette partie, on supposera connues

ou estimées les pulsations ω_1 , et l'on cherchera à estimer, en ligne, l'amplitude et la phase des sinusoides de fréquence f_1 ($\omega_1 = 2\pi f_1 / f_e$).

Le modèle donné par (1) s'écrit aussi :

$$y_k = \sum_{p=1}^p (g_p \cos(\omega_1 k) + h_p \sin(\omega_1 k)) + v_k$$

avec : $\tan(\alpha_1) = \sin(\alpha_1) / \cos(\alpha_1) = g_1 / h_1$
 et : $A_1 = (g_1^2 + h_1^2)^{1/2}$

Compte tenu de ces deux dernières relations, il suffit d'estimer g_1 et h_1 pour en déduire α_1 et A_1 . On se ramène ainsi à un problème classique d'estimation linéaire. L'algorithme que nous utiliserons est celui des Moindres Carrés Récursifs [7].

*** Algorithme d'estimation de g et h.**

Vecteur paramètre estimé à l'instant k :

$$\hat{\theta}_k = [g_1, \dots, g_p, h_1, \dots, h_p]^T \quad (25)$$

Vecteur de mesure :

$$\phi_k = [\cos \omega_1 k, \dots, \cos \omega_p k, \sin \omega_1 k, \dots, \sin \omega_p k]^T \quad (26)$$

Estimation a priori à l'instant k :

$$\hat{y}_k = \hat{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-1} \quad (27a)$$

Erreur de l'estimation a priori :

$$\varepsilon_k^o = y_k - \hat{y}_k = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-1} \quad (27b)$$

Mise à jour du gain d'adaptation :

$$F_k = \frac{1}{\lambda} \left[F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \phi_k \phi_k^T F_{k-1}}{\lambda + \phi_k^T F_{k-1} \phi_k} \right] \quad (28)$$

Mise à jour du vecteur paramètre :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_k \phi_k \varepsilon_k^o \quad (29)$$

Estimation à posteriori

$$\hat{y}_k = \hat{\theta}_k^T \phi_{k-1} \quad (30a)$$

Erreur d'estimation a posteriori :

$$\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \hat{\theta}_k^T \phi_{k-1} \quad (30b)$$

Le facteur d'oubli λ permet de fixer une police d'estimation du gain pour améliorer la capacité de poursuite dans le cas où les amplitudes et les phases varient dans le temps.

5 APPLICATION

L'utilisation de cet algorithme peut être étendue aux signaux en présence d'un bruit à Moyenne Mobile sans porter préjudice à la qualité des estimations.

Les résultats obtenus, pour un signal comportant 3 harmoniques (fig 2) et pour des signaux rectangulaire et triangulaire (fig3) et pour différents rapport signaux (RSB) à bruit, montrent l'efficacité des FPA.

L'algorithme proposé en [4] est beaucoup plus complexe en calcul que celui présenté dans cet article [12]. Le test de stabilité n'est pas nécessaire grâce à l'utilisation d'un paramètre réduction de biais variant exponentiellement [3].

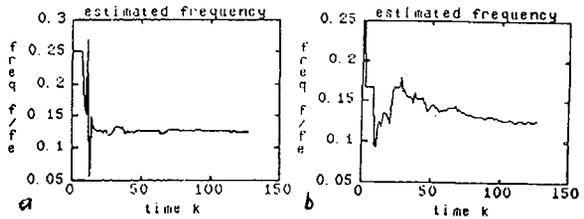


Figure 2 Signal à trois harmoniques $f_0 = f_e/8$.
 a) RSB = 8 dB b) RSB = 2 dB

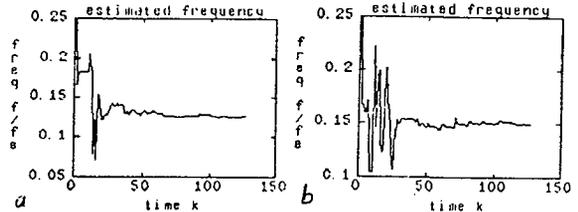


Figure 3 a) Signal rectangulaire RSB = 12 dB
 b) Signal triangulaire RSB = 10 dB

En conclusion nous préciserons qu'il est possible d'utiliser une largeur de bande différente pour chacune des fréquences. Ceci peut être utile dans le cas de systèmes non linéaires excités par un signal à bande étroite. Le signal de sortie sera alors composé de toutes les fréquences présentes à l'entrée et de leurs harmoniques.

REFERENCES

- [1] L. LJUNG, SODERSTROM - 1983. Theory and practice of recursive identification. MIT press
- [2] L.LJUNG System Identification Theory for the users Prentice Hall New Jersey 1987.
- [3] N.K. M'SIRDI. Thèse de Doctorat d'Etat 1988. LAG (ENSIEG)- Grenoble.
- [4] A. NEHORAI and B. PORAT. Adaptive Comb Filtering for harmonic signal Enhancement. IEEE, ASSP 34, N° 5, Oct 1986
- [5] S.M. KAY and S.L. MARPLE Jr. Spectrum Analysis - A Modern Perspective, Proc. of IEEE, V 69, N° 11 Nov.1981.
- [6] A. BENVENISTE, M. METIVIER, P. PRIOURET. Algorithmes Adaptatifs et Approximations Stochastiques. Théorie et applications ed. Masson, Paris 1987.
- [7] R.M.JOHNSTONE, C.R.JOHNSON, R.R.BITMEAD, B.D.O.ANDERSON. Exponential convergence of recursive least squares with exponential forgetting factor. System & control letters, V2, Number 2, august 1982.
- [8] N.K. M'SIRDI et al. ACF for harmonic signals Eusipco 88, Grenoble Septembre 1988 France. Eurasip.